This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

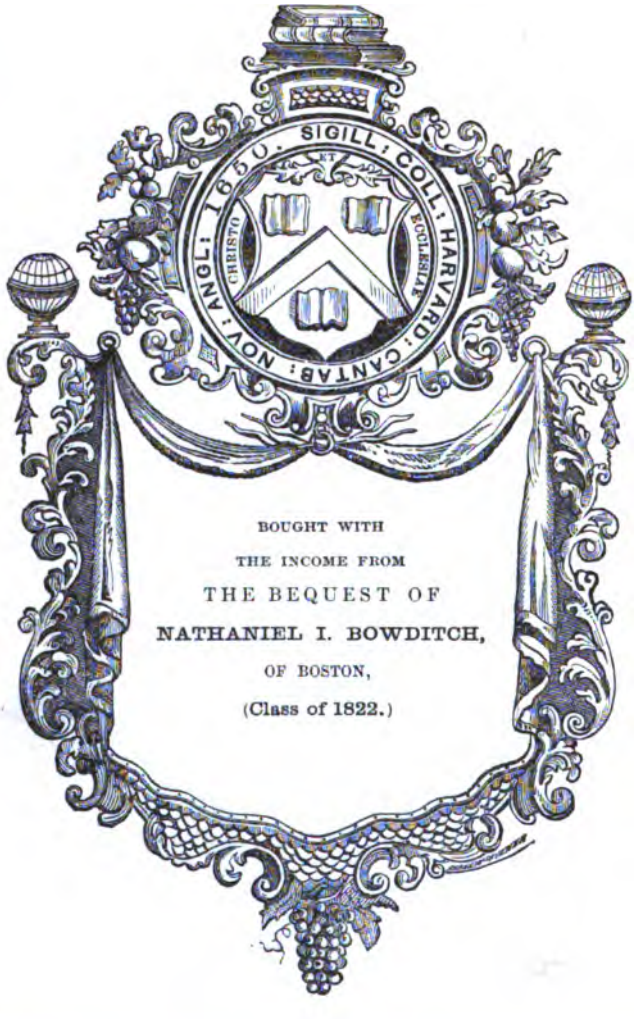
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Phys 778.93



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822.)

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME TROISIÈME.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES MILIEUX CONTINUS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1900

(Tous droits réservés.)

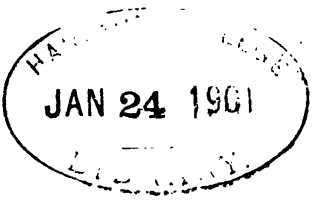
Phys. 778. 93

923
1

1012
3

JAN 24 1901

Bowditch fund



Phys 778.2

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME TROISIÈME.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES MILIEUX CONTINUS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900
Premier fascicule.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES MILIEUX CONTINUS.

CHAPITRE XXVIII.

INTÉGRALES DE VOLUMES, DE SURFACES ET DE LIGNES.

533. Objet du Chapitre. — Nous établirons dans ce Chapitre quelques formules d'un usage constant en Mécanique et en Physique mathématique.

I. — INTÉGRALES DE VOLUMES ET DE SURFACES. FORMULE DE GREEN. FLUX. DIVERGENCE.

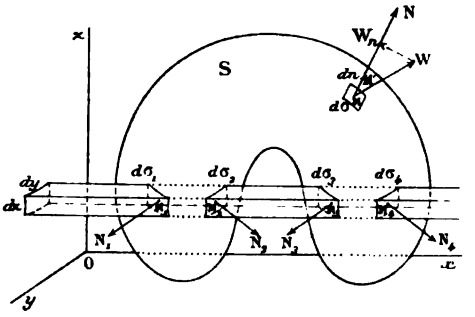
534. Transformation d'une intégrale de volume en une intégrale de surface. Formule de Green. — Soit une région continue de l'espace en chaque point $M(x, y, z)$ de laquelle sont définies trois fonctions $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$ uniformes et continues, ces fonctions admettant en outre des dérivées partielles du premier ordre. On peut représenter géométriquement ces trois fonctions en faisant correspondre, à chaque point $M(x, y, z)$ de la région, le vecteur MW ayant pour origine le point M, et pour projections les valeurs F, G, H des fonctions en ce point.

La région considérée devient alors ce qu'on nomme un *champ*

de vecteurs. Le vecteur W est déterminé d'une façon uniforme en chaque point du champ; il ne devient en aucun point du champ, ni infini, ni discontinu; sa direction est bien déterminée en chaque point, excepté aux points où il devient nul.

Ceci posé, considérons, dans le champ, un volume V composé d'une ou plusieurs parties, limité par une surface S. Désignons

Fig. 278.



par $d\tau$ un élément du volume V; par $d\sigma$ un élément de la surface S et par α, β, γ les cosinus des angles que la normale MN à l'élément $d\sigma$, dirigée vers l'extérieur du volume V, fait avec les axes coordonnés (*fig.* 278).

Nous allons démontrer la formule

$$(1) \qquad \iiint_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau = \int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma,$$

la première intégrale s'étendant à tous les éléments du volume V et la seconde à tous les éléments de la surface S.

Pour cela, commençons par calculer l'intégrale

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x}\, d\tau,$$

que nous pourrons écrire, en remplaçant $d\tau$ par $dx\, dy\, dz$,

$$\iiint \frac{\partial F}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \int\int dy\, dz \int \frac{\partial F}{\partial x}\, dx.$$

Intégrons d'abord par rapport à la variable x : cherchons entre quelles limites va s'étendre l'intégration par rapport à x. Soit, dans le plan yz (*fig.* 278), un élément $dy\, dz$; considérons le

prisme qui aurait cet élément pour base et dont les génératrices seraient parallèles à Ox; il découpe dans le corps un élément $d\sigma_1$ en y entrant en M_1 : soient $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ les cosinus de la normale M_1N_1 à cet élément, dirigée vers l'extérieur; il découpe ensuite un élément $d\sigma_2$ en sortant du corps en M_2 : soient α_2, β_2, γ_2 les cosinus de la normale M_2N_2 à cet élément, dirigée vers l'extérieur; puis il rentre en M_3, sort en M_4, ... Puisque le volume est supposé limité, le nombre des entrées et des sorties $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots$ est pair; tous les éléments $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots$ ont même projection $dy\,dz$ sur le plan des xy.

Soient $F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots$ les valeurs de la fonction F aux points $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots$; on a

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = (F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \ldots,$$

car l'intégrale indéfinie est F et il faut intégrer de M_1 à M_2, puis de M_3 à M_4, ... L'intégrale triple devient donc

$$\int\int dy\,dz\,[(F_2 - F_1) + (F_4 - F_3) + \ldots].$$

Or la normale à $d\sigma_1$, dirigée vers l'extérieur du volume fait un angle obtus avec Ox; son cosinus que nous avons désigné par α_1 est négatif, nous avons donc

$$dy\,dz = -\alpha_1 d\sigma_1,$$

car $dy\,dz$ et $d\sigma_1$, qui représentent des aires, sont essentiellement positifs. En $d\sigma_2$, la normale extérieure fait avec Ox un angle aigu, α_2 est positif et l'on a

$$dy\,dz = \alpha_2 d\sigma_2;$$

de même

$$dy\,dz = -\alpha_3 d\sigma_3,$$
$$dy\,dz = \alpha_4 d\sigma_4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remplaçons dans l'intégrale, il vient

$$\int\int\int_V \frac{\partial F}{\partial x}\,dv = \int\int dy\,dz\,(-F_1 + F_2 - F_3 + F_4 - \ldots)$$
$$= \int\int (+\alpha_1 d\sigma_1 F_1 + \alpha_2 d\sigma_2 F_2 + \alpha_3 d\sigma_3 F_3 + \alpha_4 d\sigma_4 F_4 + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x}\, d\tau = \iint_S \alpha F\, d\sigma,$$

la deuxième somme étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S.

Voici deux applications immédiates de cette formule.

Faisons d'abord $F = 1$, nous aurons

$$0 = \iint \alpha\, d\sigma;$$

résultat évident *a priori,* car il exprime que la somme algébrique des projections de tous les éléments d'une surface fermée, sur un plan, est nulle.

Faisons ensuite $F = x$, nous aurons

$$\iiint d\tau = V = \iint \alpha x\, d\sigma,$$

formule qui ramène le calcul d'un volume au calcul d'une intégrale double.

Revenons maintenant à la démonstration de la formule (1).

Nous venons de voir que l'on a

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x}\, d\tau = \iint_S \alpha F\, d\sigma;$$

un calcul analogue donne

$$\iiint_V \frac{\partial G}{\partial y}\, d\tau = \iint_S \beta G\, d\sigma,$$

$$\iiint_V \frac{\partial H}{\partial z}\, d\tau = \iint_S \gamma H\, d\sigma.$$

Ajoutant membre à membre ces formules, on obtient la formule (1).

535. **Interprétation géométrique. Flux. Divergence.** — Considérons, dans le champ de vecteurs, un élément (*fig.* 278) superficiel $d\sigma$ situé au point $M(x, y, z)$ et menons à cet élément la normale MN dans un sens déterminé ; désignons par W_n la projection sur la normale MN du vecteur MW de projections F, G, H correspondant au point M. On appelle *flux élémentaire à*

travers $d\sigma$ dans le sens MN *le produit*

$$W_n\, d\sigma.$$

Analytiquement, si α, β, γ sont les cosinus directeurs de MN, on a

$$W_n = \alpha F + \beta G + \gamma H,$$

et le flux est

$$W_n\, d\sigma = (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma.$$

Si l'on considère une portion finie S de surface ayant deux faces, le flux total à travers cette surface dans un sens déterminé est la somme des flux élémentaires à travers les divers éléments de la surface S; c'est donc l'intégrale

$$\int\int_S W_n\, d\sigma$$

ou

$$\int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma,$$

étendue à la surface S.

En chaque point M du champ la quantité

$$E = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}$$

a une valeur bien déterminée qu'on appelle la *divergence* du vecteur W en ce point. Cette quantité a une signification géométrique indépendante du choix des axes comme nous le verrons plus loin. Ceci posé, l'équation (1), relative au volume V situé dans le champ, peut s'écrire

$$\int\int\int_V E\, d\tau = \int\int\int_S W_n\, d\sigma;$$

elle exprime le flux total à travers la surface fermée S, de l'intérieur vers l'extérieur, en fonction des valeurs de la divergence aux divers points du volume limité par S.

En particulier, si l'on applique la formule ci-dessus à un volume infiniment petit $d\tau$ entourant un point $M(x, y, z)$ et limité par une surface s, la première intégrale se réduit à un seul élément, et l'on a

$$E\, d\tau = \int\int_s W_n\, d\sigma,$$

formule qui montre que la *divergence* E *a, au point* M, *une valeur indépendante du choix des axes,* et égale au flux à travers une surface fermée infiniment petite, entourant M, divisé par le volume que limite cette surface.

536. **Cas particulier où** $F\,dx + G\,dy + H\,dz$ **admet un facteur intégrant.** — Supposons maintenant qu'il existe un facteur fonction de x, y, z tel que le produit de $F\,dx + G\,dy + H\,dz$ par ce facteur soit la différentielle totale d'une fonction $\varphi(x, y, z)$. En désignant ce facteur par $\frac{1}{\psi(x, y, z)}$, on aura

$$\frac{1}{\psi}(F\,dx + G\,dy + H\,dz) = d\varphi,$$

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz = \psi\,d\varphi,$$

$$(W) \qquad F = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad G = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad H = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

On dit, dans certains Ouvrages (¹), que le vecteur W de projections F, G, H est alors *doublement scalaire,* tandis que dans le cas général il est *triplement scalaire.* Cela tient à ce qu'on nomme *fonction scalaire* une fonction des coordonnées x, y, z ayant une valeur en chaque point du champ considéré. Dans le cas général, pour définir le vecteur W en chaque point du champ, il faut connaître les *trois fonctions scalaires* F, G, H, tandis que dans le cas actuel il suffit de connaître les *deux fonctions scalaires* φ et ψ.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

on a actuellement, pour la divergence du vecteur W,

$$E = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \psi\,\Delta\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

(¹) *Voyez* par exemple : V. BJERKNES, *Zur Theorie gewisser Vektorgrössen,* (Videnskabsselskabets Skrifter. I. Math.-naturv. Klasse. 1898. No. 4; Christiania.)

et la formule (1) devient

$$(2)\quad \begin{cases} \iiint_V \psi\,\Delta\varphi\,d\tau + \iiint_V \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) d\tau \\ \quad = \iint_S \psi\left(\alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) d\sigma. \end{cases}$$

Le deuxième membre est le flux à travers la surface S. Le facteur $\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ est appelé dérivée de φ suivant la normale extérieure à S et désigné par $\frac{d\varphi}{dn}$. Pour justifier cette expression, menons la normale extérieure MN en un point M de S (*fig.* 278) et prenons sur cette normale un point M′ infiniment voisin de M à une distance $MM' = dn$. Les coordonnées de M étant x, y, z, celles de M′ sont $x + \alpha\,dn$, $y + \beta\,dn$, $z + \gamma\,dn$. Quand on passe de M à M′, les coordonnées croissent donc des quantités infiniment petites

$$dx = \alpha\,dn, \qquad dy = \beta\,dn, \qquad dz = \gamma\,dn;$$

d'autre part la fonction φ croît de

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

d'où, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs

$$\frac{d\varphi}{dn} = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

La formule peut alors s'écrire

$$(3)\quad \begin{cases} \iiint_V \psi\,\Delta\varphi\,d\tau \\ \quad + \iiint_V \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial\psi}{\partial z}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) d\tau = \iint_S \psi\,\dfrac{d\varphi}{dn}\,d\sigma. \end{cases}$$

Il est évident que, si l'on prenait de même la dérivée de φ suivant la normale *intérieure,* cette dérivée serait égale et de signe contraire à la dérivée suivant la normale *extérieure.*

Autre forme de la formule. — Dans la formule précédente permutons φ et ψ; puis retranchons la nouvelle formule ainsi

obtenue de (3), il vient

$$(3\ bis) \qquad \iiint_V (\psi\,\Delta\varphi - \varphi\,\Delta\psi)\,d\tau = \iint_S \left(\psi\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d\psi}{dn}\right) d\sigma.$$

537. Remarque. — Nous avons déduit la formule (2) de la formule (1); on peut inversement déduire la formule (1) de (2).

En effet, faisons dans la formule (2)

$$\psi = F, \qquad \varphi = x,$$

nous avons $\Delta\varphi = 0$ et

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x}\,d\tau = \iint_S \alpha F\,d\sigma.$$

On retrouverait de même les deux autres formules du n° **534**, en faisant successivement dans (2)

$$\psi = G, \quad \text{et} \quad \varphi = y \quad \text{ou} \quad \psi = H \quad \text{et} \quad \varphi = z.$$

538. Cas où $F\,dx + G\,dy + H\,dz$ est une différentielle exacte. — Supposons

$$F\,dx + G\,dy + H\,dz = d\varphi(x, y, z),$$

$$(W) \qquad F = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad G = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad H = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Le vecteur W dérive alors de la seule fonction $\varphi(x, y, z)$: on peut l'appeler un *vecteur simplement scalaire*. Ce cas a été examiné en détail dans le premier Volume, à propos des forces dérivant d'une fonction de forces (n°s 87, 88). La divergence du vecteur W est alors

$$E = \Delta\varphi$$

et la formule générale (1) devient

$$(4) \qquad \iiint_V \Delta\varphi\,d\tau = \iint_S \frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma,$$

comme on le voit en faisant, dans les formules (2) et (3), $\psi = 1$.

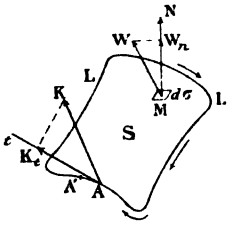
II. — INTÉGRALES DE SURFACES ET DE LIGNES. THÉORÈME D'AMPÈRE ET DE STOKES. TOURBILLON.

539. Énoncé du théorème. — La formule générale que nous allons indiquer a été donnée par Stokes : elle avait déjà été employée par Ampère en Électromagnétisme dans un cas particulier.

Considérons un champ de vecteurs dans lequel à chaque point $M(x, y, z)$ on fait correspondre un vecteur MK ayant pour projections P, Q, R, ces trois quantités étant des fonctions uniformes et continues de x, y, z dans tout le champ, admettant des dérivées premières continues.

Imaginons, dans le champ, une portion de surface S, non fermée, ayant deux faces et limitée par un contour L (*fig.* 279).

Fig. 279.



Choisissons arbitrairement une des deux faces de S et menons la normale MN à S du côté choisi; concevons ensuite un mobile A parcourant le contour L dans un sens tel que si l'on mène les normales à la surface voisines du contour, le mobile, en passant près de ces normales, tourne autour d'elles dans le sens positif (de gauche à droite pour un observateur debout sur la surface du côté choisi); ce sens de circulation est indiqué par une flèche sur la figure.

Cela posé, appelons $d\sigma$ un élément superficiel de S, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale MN à cet élément; on a

$$(5)\quad \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] d\sigma,$$

où l'intégrale de gauche est prise tout le long du contour L dans

le sens indiqué et où celle de droite est étendue à l'aire de la surface S. Dans cette formule, les axes Ox, Oy, Oz sont supposés orientés comme dans tout le cours de l'Ouvrage.

540. Démonstration. — Nous allons d'abord établir la formule dans l'hypothèse que Q et R sont nuls

$$\int_L P\,dx = \int\int_S \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma. \tag{6}$$

Pour cela, nous ferons deux hypothèses restrictives qu'il sera facile de faire disparaître ensuite :

1° Nous admettrons que, en tous les points de S, la normale MN fait avec Oz un angle constamment aigu ou constamment obtus : cet angle pouvant d'ailleurs devenir droit; pour fixer les idées, nous supposerons cet angle constamment obtus :

$$\gamma \leq 0.$$

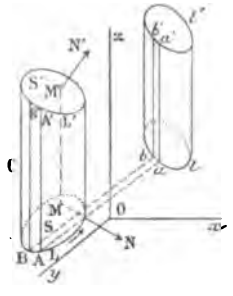
2° Nous supposerons en outre que $P(x, y, z)$ conserve un signe constant, $+$ par exemple, sur toute la surface

$$P(x, y, z) \geq 0.$$

Dans ces conditions la formule est intuitive : elle a en effet une signification géométrique simple.

Menons, par chaque point M de coordonnées x, y, z (*fig.* 280)

Fig. 280.



pris sur S un segment MM′ parallèle à Oz et égal à $P(x, y, z)$; quand le point M décrit S, le point M′ décrit une surface S′ limitée par un contour L′ et les segments MM′ remplissent un volume V,

limité latéralement par une portion de surface cylindrique C, en haut par S′, en bas par S. La formule (6), à démontrer, s'obtient en écrivant que la somme algébrique des projections des éléments superficiels de la surface fermée C + S + S′ sur le plan des xz est *nulle*.

En effet, la somme algébrique des projections des éléments superficiels de la surface cylindrique C sur le plan xOz est

$$\int_L P\,dx,$$

car l'aire élémentaire comprise entre deux génératrices AA′ et BB′, infiniment voisines, se projette sur le plan des xz suivant un parallélogramme $aa'b'b$ de base $aa' = AA' = P(x, y, z)$ et de hauteur dx; la somme algébrique des projections des éléments $d\sigma$ de S est

$$\int\int_S \beta\,d\sigma;$$

la somme algébrique des projections des éléments $d\sigma'$ de S′ est

$$\int\int_{S'} \beta'\,d\sigma';$$

si l'on appelle α', β', γ' les cosinus directeurs de la normale M′N′ à S′ extérieure au volume V. Écrivant que la somme de ces projections est nulle, on a

$$\int_L P\,dx + \int\int_S \beta\,d\sigma + \int\int_{S'} \beta'\,d\sigma' = 0. \tag{7}$$

Évaluons $d\sigma'$ et α', β', γ' en fonction de $d\sigma$ et α, β, γ. Tout d'abord, si l'on considère un cylindre élémentaire parallèle à Oz ayant pour base un élément $d\sigma$ de S, il découpe sur S′ un élément $d\sigma'$; la somme algébrique des projections de ces deux éléments sur le plan xOy est évidemment nulle; donc

$$\gamma\,d\sigma + \gamma'\,d\sigma' = 0, \qquad d\sigma' = -\frac{\gamma}{\gamma'}\,d\sigma;$$

on en conclut

$$\int\int_{S'} \beta'\,d\sigma' = -\int\int_S \frac{\gamma\beta'}{\gamma'}\,d\sigma.$$

La relation (7) devient alors

$$\int_L P\,dx + \int\int_S \frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\gamma'}\,d\sigma = 0. \tag{8}$$

La surface S ayant pour équation

$$z = f(x, y),$$

nous appellerons p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y; nous aurons alors, entre les cosinus directeurs de la normale MN, les relations

$$\frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \frac{\gamma}{-1}.$$

Le point M ayant pour coordonnées x, y, z, les coordonnées x', y', z' de M′ sont

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z + P(x, y, z); \end{aligned}$$

si donc on appelle p' et q' les dérivées partielles de z' par rapport à x', y' ou, ce qui revient au même, par rapport à x et y, on a

$$\begin{aligned} p' &= p + \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z}p, \\ q' &= q + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}q, \end{aligned}$$

et les cosinus directeurs de la normale M′N′ vérifient les relations

$$\frac{\alpha'}{p'} = \frac{\beta'}{q'} = \frac{\gamma'}{-1}.$$

Dans la relation qui donne q', remplaçons q' par $-\frac{\beta'}{\gamma'}$ et q par $-\frac{\beta}{\gamma}$, nous aurons

$$\frac{\beta\gamma' - \gamma\beta'}{\gamma'} = \gamma\frac{\partial P}{\partial y} - \beta\frac{\partial P}{\partial z}.$$

La relation (8) devient donc

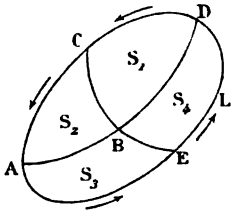
$$\int_L P\,dx = \int\int_S \left(\beta\frac{\partial P}{\partial z} - \gamma\frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma. \tag{9}$$

La formule est ainsi démontrée.

Il est facile maintenant de faire disparaître les deux hypothèses restrictives que nous avons faites : quelle que soit la surface S, on peut la diviser par des courbes auxiliaires en parties telles que, sur chacune d'elles, γ et P aient un signe constant.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il faille diviser la surface S

Fig. 281.



en quatre parties S_1, S_2, S_3, S_4 par les courbes ABD, CDE. La formule s'applique à chacune des parties ; on a

$$\int_{ABCA} P\,dx = \iint_{S_3} \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$\int_{CBDC} P\,dx = \iint_{S_1} \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$\int_{DBED} P\,dx = \iint_{S_4} \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$\int_{EBAE} P\,dx = \iint_{S_2} \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma.$$

Ajoutant ces formules membre à membre et remarquant que, dans la somme des premiers membres, les intégrales telles que $\int_{AB} P\,dx$ et $\int_{BA} P\,dx$ prises en sens contraires sur la même courbe ont une somme nulle, on obtient la formule à démontrer.

En faisant une permutation circulaire on démontre de même les deux formules

$$\int_L Q\,dy = \iint_S \left(\gamma \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha \frac{\partial Q}{\partial z}\right) d\sigma,$$

$$\int_L R\,dz = \iint_S \left(\alpha \frac{\partial R}{\partial y} - \beta \frac{\partial R}{\partial x}\right) d\sigma.$$

Ajoutons ces formules à la formule (9), nous aurons la formule

de Stokes dans sa généralité

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \int\int_S \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] d\sigma.$$

541. Interprétation géométrique de la formule de Stokes. — Nous avons appelé K le vecteur appliqué au point $M(x, y, z)$ et ayant pour projections les valeurs des fonctions P, Q, R en ce point. Considérons, dans le champ de vecteurs, un contour fermé L et menons, en chaque point A de ce contour, la tangente At dans le sens de circulation choisi sur ce contour (*fig.* 279); soient dx, dy, dz les projections d'un déplacement infiniment petit $AA' = ds$ effectué sur le contour dans le sens de circulation choisi, la quantité $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est égale à $K_t\,ds$, K_t désignant la projection du vecteur K sur la tangente At. Cela résulte immédiatement de ce que nous avons vu autrefois pour l'expression du travail élémentaire (n° 83). On a donc

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_L K_t\,ds,$$

et la valeur commune de ces intégrales est le travail total qu'accomplirait une force fictive égale à K agissant sur un mobile qui parcourrait le contour L dans le sens choisi.

D'autre part, faisons correspondre, à chaque point M du champ, un deuxième vecteur MW ayant pour projection sur les trois axes

$$(W)\quad W_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad W_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad W_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ce nouveau vecteur s'appelle le *tourbillon* du premier K. L'intégrale double figurant dans le deuxième membre de la formule de Stokes est alors

$$\int\int_S (\alpha W_x + \beta W_y + \gamma W_z)\,d\sigma = \int\int_S W_n\,d\sigma,$$

W_n désignant la projection de W sur la normale à $d\sigma$. Cette inté-

grale est donc le *flux du tourbillon* W *à travers la surface* S. La formule de Stokes

$$\int_L K_t\,ds = \int\int_S W_n\,d\sigma$$

peut alors s'énoncer ainsi :

Le travail d'un vecteur agissant sur un point qui décrit un contour fermé est égal au flux du tourbillon de ce vecteur à travers une surface continue limitée à ce contour.

Cet énoncé montre que le vecteur tourbillon d'un vecteur donné a une signification géométrique indépendante du choix des axes. On peut remarquer que la *divergence* du vecteur tourbillon est *nulle;* en effet, d'après les valeurs de W_x, W_y, W_z, on a identiquement

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0.$$

Il en résulte que le flux du tourbillon à travers une surface fermée, située dans le champ, est *nul.*

542. Cas particuliers. — Dans ce qui précède, le vecteur K de projections P, Q, R est quelconque. Voici deux cas particuliers importants :

1° *Pour que* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *admette un facteur intégrant, il faut et il suffit que le tourbillon du vecteur* K *soit, en chaque point, perpendiculaire à ce vecteur.*

En effet, appelons $\frac{1}{\psi}$ ce facteur intégrant; si l'on a

$$\frac{1}{\psi}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = d\varphi,$$

$$P = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad Q = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad R = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

on obtient pour les projections du tourbillon

$$W_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad W_y = \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

$$W_z = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$PW_x + QW_y + RW_z = 0, \tag{10}$$

ce qui démontre que le tourbillon est perpendiculaire au vecteur.

Réciproquement, on démontre en Analyse que, si cette condition de perpendicularité (10) est remplie identiquement, l'expression $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ admet un facteur intégrant.

En employant une façon de parler définie plus haut, on a ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le vecteur K soit doublement scalaire.

2° *Pour que* $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ *soit une différentielle totale exacte, il faut et il suffit que le tourbillon soit identiquement nul.*

En effet, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont précisément

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

543. Invariants. — Dans ce qui précède, nous avons été conduits à déduire d'un champ de vecteurs, soit des fonctions de point, soit d'autres vecteurs qui ont des significations indépendantes du choix des axes et qui sont, par suite, des invariants pour un changement d'axes quelconque.

Ainsi, pour un vecteur K de projections P, Q, R, la divergence

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

est une fonction de point indépendante du choix des axes, le tourbillon est un deuxième vecteur indépendant du choix des axes, le tourbillon du tourbillon en serait un autre, etc.

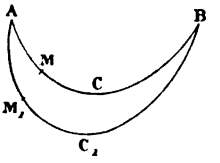
M. Heinrich Burckhardt a résolu le problème général de déterminer ainsi toutes les fonctions d'un ou de plusieurs vecteurs qui sont des fonctions de points ou qui peuvent servir à définir de nouveaux vecteurs (*Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen;* 1893).

544. Première application. — Soient A et B deux points quelconques du champ de vecteurs (*fig.* 282) : joignons-les par une courbe C et considérons l'intégrale

$$I = \int_{ACB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{ACB} K_t\,ds,$$

prise de A en B le long de cette courbe. Cherchons ce que doivent être les fonctions P, Q, R de x, y, z pour que la valeur de cette intégrale I dépende seulement des positions des points A et B et

Fig. 282.



non de la courbe C. Pour cela, déformons cette courbe d'une manière continue, en conservant les extrémités A et B fixes, de façon que, pendant la déformation, elle ne rencontre aucun point où les fonctions P, Q, R ou leurs dérivées soient discontinues; désignons par C_1 la courbe ainsi déformée. Nous devons avoir, quelles que soient les courbes C et C_1,

$$\int_{ACB} K_t\,ds = \int_{AC_1B} K_t\,ds,$$

ou, en intervertissant les limites de la deuxième intégrale et changeant son signe,

$$\int_{ACBC_1A} K_t\,ds = 0,$$

l'intégration étant faite sur le contour fermé $ACBC_1A$. Ce contour fermé est une ligne quelconque L tracée dans le champ de vecteurs; la question à résoudre revient donc à celle-ci :

Que doivent être les fonctions P, Q, R *pour que l'intégrale*

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque L, *soit nulle?*

Pour cela, il faut et il suffit, d'après le théorème de Stokes, que l'intégrale double

$$J = \int\int_S \left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \dots\right] d\sigma,$$

étendue à une aire S quelconque, soit *nulle*. Or, cette condition

exige que, sous le signe d'intégration, les coefficients de α, β, γ soient nuls. En effet, si, par exemple, $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$ n'était pas identiquement nul, on pourrait prendre pour surface S une aire plane parallèle au plan des yz, assez petite pour que $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$ ait un signe constant sur cette aire. On aurait alors $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$ et l'intégrale J ayant tous ses éléments de même signe ne serait pas nulle. Donc, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire que le *tourbillon* soit nul, ou encore que l'expression

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

soit une différentielle totale exacte d'une fonction $U(x, y, z)$. S'il en est ainsi, l'intégrale I a pour valeur la différence des valeurs de U aux deux points A et B.

On retrouve de cette façon les propositions démontrées par une autre voie au sujet du travail (Chap. IV).

545. Deuxième application. — Nous venons de trouver les conditions pour qu'une intégrale de ligne ne dépende que des extrémités de la ligne d'intégration et non de cette ligne elle-même, et nous avons, en supposant ces conditions remplies, exprimé cette intégrale en fonction des extrémités de la ligne.

Nous allons chercher de même la condition pour qu'une intégrale de surface ne dépende que du contour L limitant cette surface; puis, en supposant cette condition remplie, nous exprimerons l'intégrale de surface en fonction du contour.

Soit un champ de vecteurs W défini par les projections F, G, H du vecteur W sur les axes. F, G, H sont des fonctions de x, y, z comme plus haut. Soit un contour quelconque L : faisons passer par ce contour une surface continue quelconque S limitée au contour, et considérons l'intégrale de surface

$$I = \int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\,d\sigma = \int\int_S W_n\,d\sigma$$

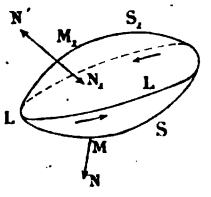
étendue à l'aire S. La signification de cette intégrale a été donnée précédemment : I est le flux de vecteur à travers la surface S.

Quand on fait varier S d'une manière continue *en assujettissant cette surface à être toujours limitée au même contour* L, l'intégrale I change en général de valeur.

Cherchons quelle condition doivent remplir F, G, H pour que l'intégrale I dépende uniquement du contour L et non de la surface S.

Pour cela (*fig.* 283) déformons d'une manière continue la surface S passant par le contour L, en conservant le même sens pour les normales et en supposant que dans cette déformation elle ne franchisse aucun point où F, G, H et leurs dérivées premières

Fig. 283.



cessent d'être finies; nous transformons ainsi la surface S en une autre surface S_1 pour laquelle le sens positif des normales est M_1N_1 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et l'élément superficiel $d\sigma_1$. On devra avoir

$$\int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma - \int\int_{S_1} (\alpha_1 F + \beta_1 G + \gamma_1 H)\, d\sigma_1 = 0.$$

L'ensemble des deux surfaces S et S_1 limite un volume V : la normale $MN(\alpha, \beta, \gamma)$ est *extérieure* à ce volume, la normale M_1N_1 est *intérieure;* si en M_1 on mène la normale extérieure M_1N', ses cosinus directeurs sont

$$\alpha' = -\alpha_1, \qquad \beta' = -\beta_1, \qquad \gamma' = -\gamma_1,$$

et l'équation s'écrit

$$\int\int_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma + \int\int_{S_1} (\alpha' F + \beta' G + \gamma' H)\, d\sigma_1 = 0.$$

ce qui veut dire que l'intégrale

$$\int\int_{S+S_1} (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma$$

étendue à la surface totale $S + S_1$, limitant le volume V, doit être

nulle. Mais le contour L étant quelconque ainsi que les surfaces S et S_1, la surface $S + S_1$ est arbitraire. La question à résoudre revient donc à celle-ci : *Que doivent être les fonctions* F, G, H *pour que l'intégrale*

$$\iint (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma$$

étendue à une surface fermée quelconque soit nulle, c'est-à-dire pour que le flux à travers une surface fermée quelconque soit nul?

D'après la formule de *Green* (n° 534), il faut et il suffit pour cela que l'intégrale triple

$$\iiint_V \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}\right) d\tau$$

étendue à un volume quelconque soit *nulle :* donc, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \tag{11}$$

c'est-à-dire que la divergence du vecteur F, G, H soit *nulle*.

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale de surface ne dépende que du contour.

Cette condition étant remplie, l'intégrale

$$\iint_S (\alpha F + \beta G + \gamma H)\, d\sigma$$

doit pouvoir être évaluée dès qu'on connaît le contour L de la surface d'intégration S. Pour résoudre cette dernière question, nous démontrerons la proposition d'Analyse suivante :

Si trois fonctions F, G, H, *de* x, y, z, *vérifient la condition* (11), *on peut toujours trouver trois autres fonctions* P, Q, R *telles que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} = F, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} = G, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = H. \end{cases} \tag{12}$$

En d'autres termes, le vecteur F, G, H *peut toujours être regardé (et cela d'une infinité de façons) comme le tourbillon d'un autre vecteur* P, Q, R.

Pour le montrer, cherchons d'abord une solution particulière P_1, Q_1, R_1 des équations (12). On peut prendre $R_1 = 0$, puis pour vérifier la deuxième équation

$$P_1 = \int_{z_0}^{z} G(x, y, z)\, dz$$

où z_0 est une constante. La première équation donne alors

$$\frac{\partial Q_1}{\partial z} = -F(x, y, z);$$

la fonction la plus générale Q_1 vérifiant cette relation est

$$Q_1 = -\int_{z_0}^{z} F(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction arbitraire de x et y.

En portant ces valeurs de P_1 et Q_1 dans la troisième équation, on a

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\right) dz + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = H(x, y, z).$$

D'après l'identité (11), supposée remplie, la quantité sous le signe $\int$ est $-\frac{\partial H}{\partial z}\, dz$, on a donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + H(x, y, z) - H(x, y, z_0) = H(x, y, z),$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = H(x, y, z_0).$$

On pourra, par une quadrature, déterminer une fonction φ vérifiant cette dernière équation

Nous avons ainsi déterminé trois fonctions particulières P_1, Q_1, R_1 telles que

$$\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = F,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = G.$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = H.$$

Pour avoir les fonctions P, Q, R les plus générales vérifiant les équations (12), il suffit de remarquer que l'on a, par soustraction,

$$\frac{\partial(R-R_1)}{\partial y}-\frac{\partial(Q-Q_1)}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial(P-P_1)}{\partial z}-\frac{\partial(R-R_1)}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial(Q-Q_1)}{\partial x}-\frac{\partial(P-P_1)}{\partial y}=0;$$

ces conditions expriment que $P-P_1$, $Q-Q_1$, $R-R_1$ sont les dérivées partielles d'une fonction $U(x, y, z)$; on a donc

$$P=P_1+\frac{\partial U}{\partial x},\qquad Q=Q_1+\frac{\partial U}{\partial y},\qquad R=R_1+\frac{\partial U}{\partial z},\tag{13}$$

U étant une fonction arbitraire de x, y, z.

Nous pouvons maintenant revenir à notre problème. Si la condition (11) est remplie, l'intégrale

$$\int\int_S(\alpha F+\beta G+\gamma H)\,d\sigma,$$

étendue à une surface S limitée par un contour L, peut s'écrire, à l'aide des fonctions P, Q, R que nous venons de calculer,

$$\int\int_S\left[\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\dots\right]d\sigma;$$

elle est donc, d'après la formule de Stokes, égale à l'intégrale

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

prise sur le contour. Cette dernière intégrale doit avoir la même valeur quelle que soit la fonction arbitraire U figurant dans les formules (13). C'est ce qu'il est aisé de vérifier. En y remplaçant P, Q, R par les expressions (13) on obtient

$$\int_L(P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz)+\int_L dU,$$

expression indépendante de U, car

$$\int_L dU=0.$$

Nous renverrons, pour une étude plus complète au point de vue analytique, au *Traité d'Analyse* de M. Picard, premier Volume.

546. Champ résultant de plusieurs champs de vecteurs. — Soit un vecteur W_1, de projections $F_1(x, y, z)$, $G_1(x, y, z)$, $H_1(x, y, z)$, défini dans une certaine région de l'espace; soit, de même, un deuxième vecteur W_2, de projections $F_2(x, y, z)$, $G_2(x, y, z)$, $H_2(x, y, z)$ défini dans la même région. On a ainsi deux champs de vecteurs. Le champ résultant s'obtient en faisant correspondre à chaque point (x, y, z), de la région considérée le vecteur résultant de W_1 et W_2.

On a alors immédiatement les théorèmes suivants :

La divergence du vecteur résultant est la somme des divergences des vecteurs composants.

Le flux du vecteur résultant à travers une surface est la somme des flux des vecteurs composants à travers la même surface.

Le tourbillon du vecteur résultant est la somme géométrique des tourbillons des vecteurs composants.

CHAPITRE XXIX.

ATTRACTION. POTENTIEL.

I. — ATTRACTION DE POINTS ISOLÉS.

547. Attraction newtonienne. — La loi de l'attraction universelle est la suivante : *Deux points matériels de masses m et m' placés à une distance r exercent l'un sur l'autre une attraction d'intensité*

$$\frac{fmm'}{r^2}.$$

Dans cette formule, la constante f est l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance ; la valeur numérique de cette constante dépend donc du choix des unités.

Si nous convenons de regarder l'action mutuelle de deux points comme *positive* quand les points se *repoussent,* et comme *négative* quand ils s'*attirent,* nous pouvons dire que l'action mutuelle F des deux masses m et m' est

$$F = -\frac{fmm'}{r^2}.$$

Dimensions de f. — La formule précédente, où F désigne une force, peut s'écrire $f = -\frac{Fr^2}{mm'}$. Quand on prend une unité de longueur λ fois plus petite, une unité de temps τ fois plus petite et une unité de masse μ fois plus petite, F, r, m et m' deviennent $\frac{F\lambda\mu}{\tau^2}$, $r\lambda$, $m\mu$, $m'\mu$; donc f devient $f\frac{\lambda^3}{\mu\tau^2}$. Si l'on convient de prendre comme unité de masse un cube d'eau ayant pour côté l'unité de longueur, on a $\mu = \lambda^3$ et la valeur numérique de f dépend uniquement de l'unité de temps. Cette remarque conduit à des conséquences indiquées par M. Lippmann (*Comptes rendus,* 8 mai 1899).

548. Attraction de plusieurs points isolés sur un point. Potentiel. — Soient n points fixes de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$, et un point mobile P de masse μ situé aux distances $r_1, r_2, \ldots, r_n$ des points fixes. Les valeurs algébriques $F_1, F_2, \ldots, F_n$ des attractions de ces points sur le point P sont

$$F_1 = -\frac{f\mu m_1}{r_1^2}, \qquad F_2 = -\frac{f\mu m_2}{r_2^2}, \qquad \ldots, \qquad F_n = -\frac{f\mu m_n}{r_n^2};$$

la résultante F de ces attractions dérive d'une fonction de forces que l'on obtient immédiatement comme il suit (*voyez* Tome I, Chap. IV). Imprimons au point P un déplacement infiniment petit PP′; le travail de la résultante F est égal à la somme des travaux élémentaires des composantes qui sont $F_1 dr_1$, $F_2 dr_2$, ..., $F_n dr_n$: il a donc pour expression

$$-\frac{f\mu m_1}{r_1^2} dr_1 - \frac{f\mu m_2}{r_2^2} dr_2 - \ldots - \frac{f\mu m_n dr_n}{r_n^2}.$$

Or cette expression est la différentielle totale de la fonction

$$f\mu\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n}\right).$$

En posant

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n},$$

on voit que la résultante F dérive de la fonction de forces

$$f\mu U.$$

Si l'on appelle x, y, z les coordonnées du point P, U est une fonction de x, y, z, et il serait aisé de vérifier que les projections de F sur les axes peuvent s'écrire

$$X = f\mu \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = f\mu \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = f\mu \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Il suffit donc de connaître la fonction U pour en déduire l'attraction des points donnés sur le point P. Cette proposition est due à Lagrange.

En particulier, l'attraction résultante K des points donnés sur un point de masse 1 placé au point P a pour composantes suivant

les axes, $f\frac{\partial U}{\partial x}$, $f\frac{\partial U}{\partial y}$, $f\frac{\partial U}{\partial z}$. Cette force K est normale aux surfaces

$$U = \text{const.}$$

appelées *surfaces de niveau* ou *surfaces équipotentielles :* elle est dirigée par rapport à chacune de ces surfaces du côté où U croît et a pour intensité $f\frac{dU}{dn}$, $\frac{dU}{dn}$ désignant la dérivée de U suivant la normale à la surface de niveau.

La composante de l'attraction K suivant une demi-droite quelconque PD est égale à la dérivée de fU *suivant la direction* PD,

$$K_D = f \lim \frac{U_{P'} - U_P}{PP'}$$

quand PP′ tend vers zéro (Tome I, Chapitre IV).

Nous appellerons le point P où l'on prend la valeur du potentiel, le point *attiré* ou le point *potentié;* cette dernière expression est employée par M. Boussinesq dans ses *Compléments de Calcul intégral.*

549. Champ de forces; lignes de forces; tubes de forces. — L'ensemble des forces K qui agissent sur un point de masse 1 occupant successivement diverses positions de l'espace s'appelle un *champ de forces.* En chaque point P du champ, la force K est déterminée : la direction et l'intensité de la force K en P s'appellent *direction* et *intensité du champ au point* P. Sur un point de masse μ placé en P agit une force $F = \mu K$. On dit que le champ est *uniforme* quand les forces qui le constituent sont égales et parallèles. Par exemple, dans une petite étendue, la pesanteur donne naissance à un champ uniforme.

On appelle, d'après Faraday, *lignes de forces,* des lignes telles que leur tangente en chacun de leurs points coïncide avec la force K du champ à ce point. Ces lignes sont les trajectoires orthogonales des surfaces de niveau. Par chaque point du champ, en dehors des centres attractifs, il en passe une, et une seule. Par exemple, dans un champ uniforme, les lignes de forces sont des droites parallèles; dans un champ provenant de l'attraction d'un seul point m_1, toutes les forces sont dirigées vers ce point et les lignes de forces sont des droites concourant en m_1.

Tubes de forces. — Considérons dans le champ un contour fermé C : les lignes de forces partant des divers points de ce contour forment un tube qu'on nomme *tube de force*. Par exemple, dans un champ uniforme, les tubes de forces sont des cylindres; dans le champ produit par un seul centre m_1, ce sont des cônes de sommet m_1.

550. Signification mécanique de la fonction U. — Si l'on considère l'unité de masse soumise à l'attraction résultante des centres $m_1, m_2, \ldots, m_n$, le travail élémentaire de cette attraction résultante, correspondant à un déplacement infiniment petit de cette unité de masse, est

$$f\,dU.$$

Supposons que l'unité de masse passe de la position P_0, où le potentiel a la valeur U_0, à la position P où il a la valeur U, le travail de la résultante des attractions est

$$T = fU - fU_0.$$

En particulier, si la position P_0 est infiniment éloignée, U_0 est nul, car toutes les distances $r_1, r_2, \ldots, r_n$ commencent par être infinies, et l'on a

$$T = fU.$$

La valeur de la fonction fU en un point P est donc le travail de la résultante des attractions sur un point de masse unité amené de l'infini à la position P.

551. Attractions électriques et magnétiques. — On sait qu'une masse électrique ou magnétique peut être *positive* ou *négative*. Soient deux masses électriques m et m' placées à la distance r : si l'on convient, comme plus haut, de regarder l'action mutuelle de ces deux masses comme *positive* quand elles se *repoussent* et comme *négative* quand elles s'*attirent,* cette action mutuelle F a pour valeur algébrique

$$F = k\frac{mm'}{r^2},$$

k désignant une constante *positive;* en effet, quand m et m' sont de mêmes signes, les masses m et m' se repoussent; quand m et m' sont de signes contraires, elles s'attirent.

La même formule donne l'action mutuelle de deux masses magnétiques.

On passera donc des formules relatives à l'attraction newtonienne aux formules relatives aux attractions et répulsions électriques ou magnétiques, en remplaçant la constante f par la constante $-k$.

A cause de ce changement de signe, la force appliquée à l'unité de masse qui, dans l'attraction newtonienne, est dirigée par rapport aux surfaces de niveau du côté des potentiels *croissants*, est, au contraire, dans les attractions électriques et magnétiques, dirigée du côté des potentiels *décroissants*.

En résumé, qu'il s'agisse d'attraction newtonienne ou d'attractions et répulsions électriques et magnétiques, on est toujours ramené à calculer la fonction potentielle

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n} = \sum \frac{m}{r}.$$

552. **Exemple.** — Soient deux masses agissantes de masses 4 et 1 placées aux points A et B. On a

$$U = \frac{4}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

r_1 et r_2 désignant les distances du point P aux deux centres A et B. Les surfaces équipotentielles

$$U = C$$

sont évidemment de révolution autour de AB : il suffit, pour les déterminer, de connaître leurs traces sur un plan passant par AB.

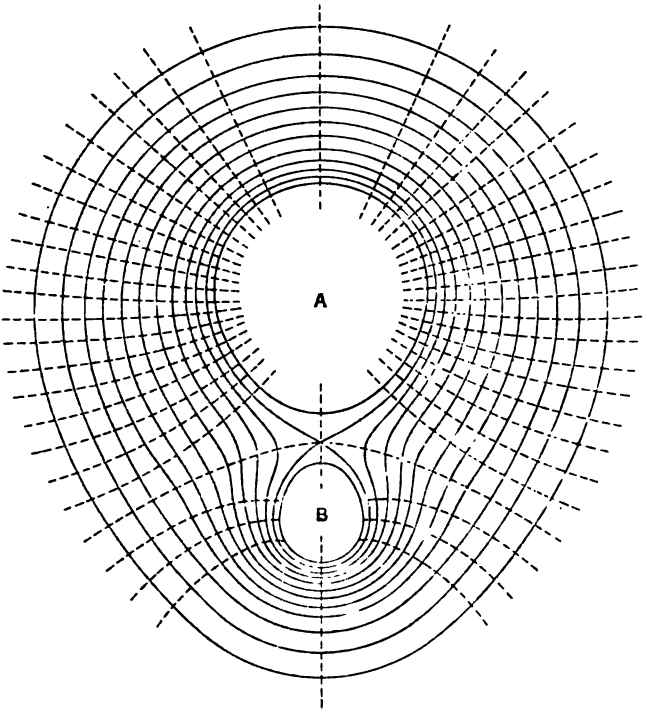
Dans ce plan les lignes équipotentielles ont la forme indiquée dans la *fig.* 284 empruntée au *Traité d'Électricité et de Magnétisme* de Maxwell et reproduite dans les *Leçons sur l'Électricité* d'Éric Gérard. Si C est très grand, la ligne

$$U = C$$

se compose de deux courbes fermées entourant l'une A, l'autre B, car, pour que U soit très grand, il faut que r_1 ou r_2 soit très petit. La constante C diminuant, il arrive un moment où ces deux courbes fermées se soudent de façon à former une courbe unique

avec un point double entre A et B. Puis, C diminuant encore, les lignes équipotentielles forment des courbes fermées entourant les deux points à la fois.

Fig. 284.



En chaque point, la force résultante est normale à la surface équipotentielle passant par ce point. En particulier au point double entre A et B, la force devrait être normale aux deux nappes se soudant en ce point; comme cela est impossible, il faut en conclure qu'en ce point la force est *nulle* et que ce point est une position d'équilibre (d'ailleurs instable).

Les lignes équipotentielles tracées en traits pleins sur la figure correspondent à des valeurs du potentiel variant en progression arithmétique. Les lignes pointillées sont les lignes de forces. En chaque point, la force est dirigée suivant la ligne de force, du côté où U croît, et a approximativement une intensité inversement proportionnelle au petit segment de ligne de force compris entre les deux surfaces de niveau voisines.

353. Énergie potentielle d'un système de points soumis à des forces newtoniennes. — Soient n points mobiles, de masses m_1, m_2, ..., m_n, s'attirant suivant la loi de Newton; appelons r_{ij} la distance des points m_i, m_j : l'action mutuelle de ces deux points est

$$F_{ij} = -f\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}.$$

Si l'on déplace infiniment peu tous les points, le travail élémentaire de l'action mutuelle des deux points m_i, m_j est (n° 92)

$$-f\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\,dr_{ij},$$

et la somme de tous les travaux élémentaires des actions mutuelles des points deux à deux est

$$\mathfrak{T}_e = -f\sum_{ij}\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\,dr_{ij}, \tag{1}$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons des points m_1, m_2, ..., m_n deux à deux. On peut écrire évidemment l'expression ci-dessus

$$\mathfrak{T}_e = f\,dV,$$

en posant

$$V = \sum_{ij}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \tag{2}$$

L'expression fV s'appelle *énergie potentielle* du système des points m_1, m_2, ..., m_n (n° 353).

Quand ces points passent d'une position initiale à une position finale, le travail total des forces attractives est égal à

$$\int \mathfrak{T}_e = \int f\,dV = f(V - V_0),$$

V_0 et V désignant les valeurs de la fonction V dans les positions initiales et finales. En particulier, si dans la position initiale les points sont infiniment éloignés les uns des autres, on a

$$\int \mathfrak{T}_e = fV,$$

L'énergie potentielle des points dans une certaine confi-

guration est donc le travail total que produiraient les forces attractives, si les points, d'abord infiniment éloignés les uns des autres, étaient amenés à la configuration considérée.

On peut dire aussi que cette énergie potentielle est le travail des forces extérieures qu'il faudrait faire agir sur le système de points, dans la configuration considérée, pour séparer ces points et les amener, au repos, à des distances infinies les uns des autres.

Autre expression de l'énergie potentielle. — La fonction

$$V = \sum \frac{m_i m_j}{r_{i,j}}$$

peut être écrite comme il suit

$$\begin{aligned} V = \quad & \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{r_{1,2}} + \frac{m_3}{r_{1,3}} + \ldots + \frac{m_n}{r_{1,n}} \right) \\ & + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{r_{2,1}} + \frac{m_3}{r_{2,3}} + \ldots + \frac{m_n}{r_{2,n}} \right) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{2} m_n \left(\frac{m_1}{r_{n,1}} + \frac{m_2}{r_{n,2}} + \ldots + \frac{m_{n-1}}{r_{n,n-1}} \right), \end{aligned}$$

où $r_{j,i} = r_{i,j}$. Dans cette expression, le coefficient de m_1 est la somme des quotients des masses autres que m_1, par leurs distances à m_1; celui de m_2, la somme des quotients des masses autres que m_2 par leurs distances à m_2, etc. On peut remarquer que cette expression de V résulte aussi du théorème des fonctions homogènes appliqué à V considérée comme fonction de $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Soient alors U_1 la valeur du potentiel des masses $m_2, m_3, \ldots, m_n$ au point m_1, U_2 celle du potentiel des masses $m_1, m_3, \ldots, m_n$ au point m_2, etc., U_i la valeur du potentiel de toutes les masses excepté m_i au point m_i, on peut écrire

$$V = \frac{1}{2}(m_1 U_1 + m_2 U_2 + \ldots + m_n U_n),$$

ou

$$V = \frac{1}{2} \sum m U. \tag{3}$$

554. Flux de force. — Prenons d'abord un élément de surface infiniment petit $d\sigma$ placé au point P et menons la normale PN à cet élément dans un sens déterminé : pour distinguer les deux faces de cet élément, nous appellerons *face positive* celle qui porte

la normale PN et *face négative* l'autre face. Soient K la force du champ au point P, θ l'angle de cette force avec PN, et K_n la projection de cette force sur PN. D'après une définition déjà donnée (n° 535), on appelle *flux de force* à travers l'élément $d\sigma$ dans le sens PN la quantité

$$K\cos\theta\, d\sigma = K_n\, d\sigma.$$

Soit U le potentiel en P, on sait que la composante K_n suivant PN a pour valeur $f\frac{dU}{dn}$, la dérivée étant prise *normalement* à l'élément dans le sens PN; le flux de force élémentaire à travers $d\sigma$ a donc aussi pour expression

$$f\frac{dU}{dn}\, d\sigma.$$

Ce flux est positif ou négatif suivant que θ est aigu ou obtus, ou, ce qui revient au même, suivant que U croît ou décroît pour un déplacement effectué dans le sens PN.

Si la force K est la résultante de plusieurs autres, K′, K″, ... le flux de force dû à K à travers $d\sigma$ est la somme des flux de force dus aux composantes K′, K″, ... Cela résulte de ce que, en projetant sur PN, on a

$$K_n = K'_n + K''_n + \dots.$$

Flux de force à travers une surface d'étendue finie. — Le flux de force à travers une portion de surface S, dans un certain sens, est la somme des flux de forces à travers les divers éléments superficiels $d\sigma$ de cette surface. Il a donc pour expression

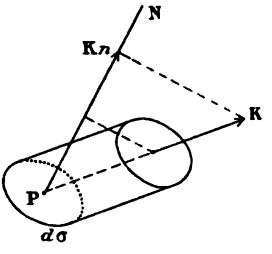
$$\iint_S K\cos\theta\, d\sigma = \iint_S K_n\, d\sigma = f\iint_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma,$$

l'intégration étant étendue à la surface S.

Interprétation du flux de force. — Imaginons un liquide à l'état de régime permanent remplissant l'espace considéré, et supposons que chaque molécule liquide, en arrivant au point géométrique P, y possède une vitesse égale à K en grandeur, direction et sens. Les vitesses des diverses molécules liquides sont ainsi représentées par les mêmes vecteurs que les forces du champ : les trajectoires des molécules liquides sont les lignes de forces. Prenons un élément superficiel $d\sigma$ fixe placé en P. Nous allons montrer

que *le volume du liquide traversant l'élément* $d\sigma$, *dans le sens* PN *pendant l'unité de temps, est égal précisément à* $K_n\,d\sigma$, *c'est-à-dire au flux de force à travers* $d\sigma$. En effet, considérons

Fig. 285.



les molécules liquides placées à l'instant t sur $d\sigma$: à l'instant $t + dt$, chacune d'elles se sera avancée de $K\,dt$ dans la direction K : les molécules ayant traversé $d\sigma$ dans le temps dt forment donc un cylindre oblique de base $d\sigma$ et d'arête $K\,dt$; la hauteur de ce cylindre est $K_n\,dt$ et son volume $K_n\,d\sigma\,dt$. Le volume de liquide traversant $d\sigma$ dans l'unité de temps est donc bien $K_n\,d\sigma$.

D'après cela, le flux de force à travers une surface d'étendue finie est égal au volume du liquide traversant cette surface pendant l'unité de temps.

555. **Expression du flux de force dans le cas où le champ provient de l'attraction d'un seul point.** — Supposons qu'il n'existe qu'un centre attractif de masse m ; la force K agissant sur l'unité de masse placée en P est alors dirigée suivant Pm et égale à $f\frac{m}{r^2}$, r désignant la distance Pm ; le potentiel est

$$U = \frac{m}{r};$$

les surfaces de niveau sont des sphères de centre m et les tubes de forces, des cônes de sommet m.

1° *Flux de force élémentaire.* — Soit $d\sigma$ un élément superficiel placé en P, PN la normale à cet élément et θ l'angle mPN que fait la force K avec cette normale ; le flux de force à travers

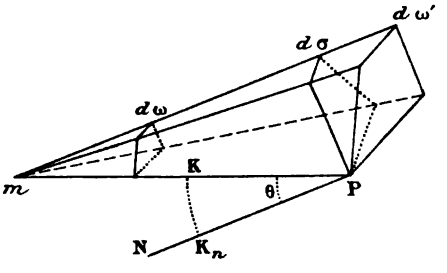
$d\sigma$ dans le sens PN est

$$f\frac{m}{r^2}\cos\theta\, d\sigma = f\frac{dU}{dn}\, d\sigma = fm\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma,$$

la dérivée étant prise dans le sens PN (*fig.* 286).

Considérons le cône de sommet m et de base $d\sigma$: soit $d\omega$ l'ou-

Fig. 286.



verture de ce cône égale par définition à l'aire de sa trace sur une surface sphérique de centre m et de rayon 1; soit $d\omega'$ l'aire de la trace du même cône sur une sphère de centre m et de rayon $mP = r$. Supposons d'abord θ aigu : l'angle du plan de $d\sigma$ avec celui de $d\omega'$ est θ et l'on a

$$d\omega' = d\sigma\cos\theta,$$

car $d\omega'$ peut être regardé comme la projection de $d\sigma$ sur le plan tangent à la sphère de centre m et de rayon $mP = r$. D'ailleurs

$$d\omega = \frac{d\omega'}{r^2} = \frac{d\sigma\cos\theta}{r^2}.$$

On a donc, pour le flux de force à travers $d\sigma$,

$$\text{flux} = fm\, d\omega.$$

Si nous supposons, au contraire, θ obtus, l'angle aigu du plan de $d\sigma$ avec celui de $d\omega'$ est $\pi - \theta$ et l'on a

$$d\omega' = -d\sigma\cos\theta,$$
$$d\omega = \frac{d\omega'}{r^2} = -\frac{d\sigma\cos\theta}{r^2}.$$

L'expression du flux est alors

$$\text{flux} = -fm\, d\omega.$$

Le flux élémentaire à travers $d\sigma$ est donc

$$\pm f m \, d\omega,$$

où il faut prendre + ou — suivant que θ est aigu ou obtus, ou encore suivant que l'on voit du point m la face positive ou la face négative de l'élément $d\sigma$, en appelant face positive celle qui porte la normale PN.

Premier exemple de la conservation du flux dans un tube de force. — Dans le cas actuel, les tubes de forces sont des cônes de sommet m : prenons un de ces cônes d'ouverture $d\omega$; le flux est le même à travers toutes les sections $d\sigma$ du cône et égal à $\pm f m \, d\omega$. Imaginons qu'un liquide à l'état de régime régulier se meuve de façon que chaque molécule ait une vitesse représentée par le même vecteur que la force du champ au point où elle se trouve. Alors les molécules suivent des droites dirigées vers m, et l'on peut regarder un tube de force comme un canal conique que suit le courant en se dirigeant vers le point m, où la vitesse du courant devient infinie et où le courant disparaît comme dans une prise d'eau. La quantité de liquide traversant une section quelconque du tube pendant l'unité de temps est $f m \, d\omega$; elle est *constante*.

2° *Flux à travers une surface d'étendue finie.* — Soit S une portion de surface à laquelle on mène les normales PN d'un côté déterminé. Le flux de force à travers S provenant de l'action d'un seul point m est la somme des flux élémentaires à travers tous les éléments $d\sigma$ de S; il a donc pour valeur

$$f m \int \pm d\omega,$$

$d\omega$ étant l'ouverture du cône ayant pour sommet m et pour base un des éléments $d\sigma$ de S, et le signe étant choisi comme nous l'avons vu. Si l'on désigne par Ω la somme

$$\Omega = \int \pm d\omega,$$

qu'on peut appeler *valeur algébrique* de l'ouverture du cône C, constitué par la réunion de tous les cônes élémentaires ayant m pour sommet et pour bases les divers éléments $d\sigma$ de S, le flux de

force à travers S dans le sens PN est

$$fm\Omega.$$

Ce cône C est un tube de force; le flux traversant une section quelconque de ce cône est

$$fm\Omega.$$

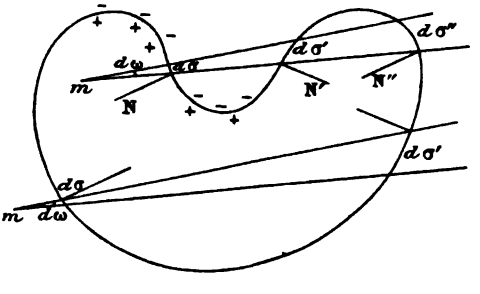
3° *Flux de force dû à un point à travers une surface fermée.* — Trois cas sont à distinguer, suivant que le centre attractif m est à l'intérieur ou à l'extérieur de la surface fermée, ou sur la surface.

Premier cas. — *Quand le centre attractif est à l'intérieur d'une surface fermée, le flux total à travers cette surface de l'extérieur vers l'intérieur est*

$$4\pi fm.$$

La face positive de la surface est alors la face interne. Du point m comme sommet, traçons un cône d'ouverture infiniment petite $d\omega$; ce cône découpe sur la surface un nombre impair d'éléments superficiels $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$, ... tournant alternativement leurs

Fig. 287.



faces positives et leurs faces négatives vers le point m. D'après cela, le flux à travers $d\sigma$ est positif et égal à $fm\,d\omega$; de même le flux à travers $d\sigma'$ est négatif et égal à $-fm\,d\omega$; à travers $d\sigma''$, il est $+fm\,d\omega$, ... et ainsi de suite. Comme le nombre des éléments $d\sigma$, $d\sigma'$, $d\sigma''$, ... est impair, la somme des flux de force à travers ces éléments est

$$fm\,d\omega.$$

Si maintenant on considère tous les cônes élémentaires tracés

dans toutes les directions autour de m, on voit que la somme des flux de forces à travers tous les éléments de la surface est

$$fm\int d\omega.$$

Actuellement $\int d\omega$ est l'aire de la sphère de rayon 1 ou 4π. On a donc pour le flux total

$$4\pi fm.$$

Ce théorème devient intuitif par la comparaison avec le mouvement d'un liquide. Si l'on imagine tous les cônes élémentaires de sommet m et d'ouverture $d\omega$ orientés dans toutes les directions autour de ce point, chacun de ces cônes est le siège d'un courant uniforme qui amène vers le point m dans l'unité de temps une quantité de liquide égale à $fm\,d\omega$. La quantité totale de liquide qui, dans ce même temps, pénètre dans une surface fermée entourant m est alors évidemment

$$fm\int d\omega = 4\pi fm.$$

ce qui donne le théorème à démontrer.

Le flux de force de l'*intérieur vers l'extérieur* à travers la même surface est égal et de signe contraire au précédent; il a pour valeur

$$-4\pi fm.$$

Deuxième cas. — *Quand le centre attractif est à l'extérieur d'une surface fermée, le flux total à travers cette surface est* nul.

En effet, si du centre attractif m comme sommet on décrit un cône d'ouverture infiniment petite $d\omega$ (*fig.* 287), ce cône coupe la surface en un nombre pair d'éléments $d\sigma, d\sigma', \ldots$ tournant alternativement leurs faces négatives et positives vers m. A travers le premier élément, le flux de l'extérieur vers l'intérieur est

$$-fm\,d\omega,$$

à travers le deuxième il est $+fm\,d\omega\ldots$. Comme le nombre de ces éléments est pair, la somme de ces flux est *nulle*. Le flux total à travers la surface est donc *nul*.

Ce théorème devient évident à l'aide de la comparaison déjà faite. Le courant qui suit chaque cône élémentaire de sommet m entre dans la surface en un point, mais en ressort intégralement par un autre. La somme algébrique des quantités de liquide pénétrant dans la surface est donc nulle.

Troisième cas. — *Si le point m est sur une surface fermée, le flux de force à travers la surface de l'extérieur vers l'intérieur est* $2\pi fm$, *à condition qu'au point m le plan tangent à la surface soit bien déterminé.*

En effet, si l'on considère tous les cônes élémentaires d'ouverture $d\omega$ ayant m comme sommet, ceux de ces cônes qui sont, par rapport au plan tangent en m, du même côté que l'intérieur de la surface, coupent celle-ci en un nombre impair d'éléments superficiels et le flux qui entre par un de ces cônes est $fm\,d\omega$; au contraire, ceux des cônes qui sont de l'autre côté du plan tangent en m coupent la surface en un nombre pair d'éléments et le flux qui entre dans la surface par un de ces cônes est *nul*. La somme des flux qui entrent est donc la somme des quantités $fm\,d\omega$ relatives aux cônes situés *d'un côté* du plan tangent, c'est-à-dire $2\pi fm$, car la somme des ouvertures de ces cônes est l'aire d'une demi-sphère de rayon 1.

556. **Théorème de Gauss.** — Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ un nombre quelconque de masses attirantes, les unes extérieures, les autres intérieures à une surface fermée. *Le flux de force total à travers cette surface de l'intérieur vers l'extérieur est égal au produit de* $-4\pi f$ *par la somme des masses intérieures.* En effet, le flux de force total provenant de toutes ces masses est égal à la somme des flux de forces provenant de chacune d'elles; celles qui sont extérieures donnent des flux de forces *nuls;* celles qui sont intérieures donnent des flux de forces de la forme $-4\pi fm$. Le flux total est donc

$$-4\pi f\,\mathrm{M}',$$

M′ désignant la somme des masses intérieures.

Autre forme du théorème précédent. — Soit U le potentiel des masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$, le flux de force à travers un élément

de surface $d\sigma$ de l'intérieur vers l'extérieur est

$$f\frac{dU}{dn}d\sigma,$$

$\frac{dU}{dn}$ désignant la dérivée prise suivant la normale extérieure à l'élément. Le flux de force total à travers une surface fermée S est donc

$$f\iint\frac{dU}{dn}d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface. Ce flux est d'ailleurs égal à $-4\pi f M'$; on a donc

$$\iint\frac{dU}{dn}d\sigma=-4\pi M'.$$

337. Conservation du flux dans un tube de force. — Imaginons un champ produit par l'attraction de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ et un tube de force correspondant à ce champ (n° 349). Soient S et S′ deux sections transversales planes ou courbes faites dans ce tube. Supposons que, dans le tube, il ne se trouve *aucune masse agissante* entre les deux sections. Alors *le flux de force traversant la section* S *dans un certain sens, est égal au flux de force traversant* S′ *dans le même sens*. En effet, considérons la surface fermée constituée par les deux sections S et S′ et les parois du tube. Le flux de force total à travers cette surface fermée est *nul*, d'après le théorème précédent. Mais le flux de force à travers la paroi latérale est nul, car en un point de la paroi latérale, la force du champ est tangente à cette paroi et sa composante normale est nulle; donc les flux de forces sortant de la surface fermée à travers les sections S et S′ sont égaux et de signes contraires. On peut dire aussi que le flux de force entrant par la section S est égal au flux sortant par S′.

Si, entre les deux sections S et S′ du tube de force se trouvent des masses agissantes ayant pour somme M′, un raisonnement analogue montre que le flux de force entrant par S est égal au flux sortant par S′ augmenté de $4\pi f M'$.

Supposons que le tube ait une section infiniment petite et soient $d\sigma$ et $d\sigma'$ deux sections droites entre lesquelles ne se trouve aucune masse attirante; les forces en $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont normales à ces

sections; en écrivant que les flux sont égaux, on a

$$K\,d\sigma = K'\,d\sigma';$$

le long d'un tube de force infiniment petit, la force varie donc en raison inverse de la section droite.

Dans la comparaison avec le mouvement permanent d'un liquide, le tube de force se présente comme un tuyau dans lequel circule le liquide. La quantité de liquide traversant deux sections S et S′ est la même, à condition qu'entre S et S′ ne se trouve aucune prise d'eau; sinon la différence entre ces deux quantités est égale au liquide absorbé par les prises.

Ce théorème montre que les tubes de forces ne peuvent pas s'arrêter brusquement dans la portion de l'espace où ne se trouve aucune masse agissante; car si un tube se rétrécissait de façon à avoir finalement une section nulle en un point, la force deviendrait infinie en ce point. Un tube de force se continue donc jusqu'à ce qu'il revienne sur lui-même en constituant un canal comme un tore, ou jusqu'à ce qu'il s'éloigne indéfiniment, ou enfin jusqu'à ce qu'il rencontre une masse agissante.

Faraday évalue le flux de force à travers une surface, par l'image suivante : Supposons que l'on prenne une unité de surface très petite et appelons tube de force unité, un tube dans lequel le flux de force est égal à 1. Nous pouvons alors nous représenter l'espace comme rempli de tubes de forces *unités* placés les uns à côté des autres. Le flux à travers une surface sera sensiblement égal au nombre de tubes de forces unités traversant cette surface.

558. Équation de Laplace. — Le potentiel

$$U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_n}{r_n}$$

est une fonction des coordonnées x, y, z du point P, finie et continue dans tout l'espace excepté aux centres attractifs eux-mêmes où elle est évidemment infinie. Nous allons montrer qu'en tous les points de l'espace, à l'exception des centres attractifs, elle vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

ou, sous forme abrégée,

$$\Delta U = 0.$$

En effet, en appelant a_1, b_1, c_1 les coordonnées du point fixe m_1, on a

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2}};$$

donc

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} = 3\frac{(x-a_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} = 3\frac{(y-b_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3},$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} = 3\frac{(z-c_1)^2}{r_1^5} - \frac{1}{r_1^3},$$

Ajoutant ces trois expressions, on trouve zéro dans le deuxième membre. Donc

$$\Delta \frac{1}{r_1} = 0.$$

De même

$$\Delta \frac{1}{r_2} = 0, \quad \ldots, \quad \Delta \frac{1}{r_n} = 0.$$

Or, d'après l'expression de U,

$$\Delta U = m_1 \Delta \frac{1}{r_1} + m_2 \Delta \frac{1}{r_2} + \ldots + m_n \Delta \frac{1}{r_n},$$

donc

$$\Delta U = 0.$$

559. Autre démonstration du théorème de Gauss. — La démonstration du n° 556 a un caractère élémentaire; en voici une autre reposant sur l'équation de Laplace.

1° Soit d'abord une surface fermée S *ne contenant dans son intérieur aucun des centres attractifs*. Le flux de force à travers cette surface, de l'intérieur vers l'extérieur, est

$$f\int\int_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma,$$

la dérivée étant prise suivant la normale extérieure. La fonction U

figurant dans l'équation (4) sont de même égales à $4\pi m_2, \ldots,$ $4\pi m_p$; et cette équation donne finalement

$$\int\int_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma = -4\pi(m_1 + m_2 + \ldots + m_p) = -4\pi M'.$$

M′ désignant la somme des masses attirantes intérieures à S. Le théorème est ainsi démontré.

II. — MASSES CONTINUES. — GÉNÉRALITÉS. SIMPLE ET DOUBLE COUCHE.

560. Potentiel d'une masse continue. — Les théorèmes que nous venons de démontrer, relativement au champ de forces créé par l'attraction de points matériels isolés, s'étendent, comme l'a montré Lagrange, au champ de forces créé par l'attraction de masses continues. Il suffit, pour cela, de regarder une masse continue comme formée d'un nombre infiniment grand de masses infiniment petites. Le potentiel

$$\sum \frac{m}{r}$$

se trouve alors remplacé par une intégrale définie.

Divisons la masse continue en éléments de masse infiniment petits dm : soient a, b, c les coordonnées d'un de ces éléments, r sa distance au point $P(x, y, z)$,

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

L'attraction newtonienne de l'élément dm sur l'unité de masse placée au point P a pour projections

$$-f\frac{x-a}{r^3}\,dm, \quad -f\frac{y-b}{r^3}\,dm, \quad -f\frac{z-c}{r^3}\,dm.$$

La résultante K de ces attractions a donc pour projections

$$(K) \qquad \begin{cases} X = -f\int\int\int \frac{x-a}{r^3}\,dm, \\ Y = -f\int\int\int \frac{y-b}{r^3}\,dm, \\ Z = -f\int\int\int \frac{z-c}{r^3}\,dm; \end{cases}$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments attirants dm. Considérons alors la fonction de x, y, z

$$U = \int \frac{dm}{r};$$

la règle de la différentiation sous le signe $\int$, provisoirement admise, donne immédiatement

$$X = f\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = f\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = f\frac{\partial U}{\partial z}.$$

La force K du champ dérive donc de la fonction fU.

De même, l'attraction électrique ou magnétique d'une masse électrique ou magnétique continue, sur un point P de masse unité, dérive de la fonction $-kU$.

561. Surfaces de niveau. Lignes et tubes de forces. Flux de force. — Les définitions et les propriétés données plus haut pour les surfaces de niveau, les lignes et tubes de forces, le flux de force, s'étendent d'elles-mêmes au champ de forces créé par l'attraction d'une masse continue.

562. Équation de Laplace. — Nous avons vu que le potentiel U d'un système de points isolés est une fonction des coordonnées x, y, z du point attiré P vérifiant l'équation de Laplace

$$\Delta U = 0$$

tant que le point P ne coïncide pas avec un des points attirants. On peut donc prévoir que le potentiel d'une masse continue vérifiera également l'équation de Laplace, *en tous les points de l'espace situés en dehors des masses attirantes*. Pour le vérifier, reprenons l'expression

$$U = \int \frac{dm}{r}$$

du potentiel, l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la masse attirante. Dans cette intégrale

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

x, y, z désignant les coordonnées du point attiré et a, b, c celles de l'élément attirant dm; dans l'intégration x, y, z sont donc

regardés comme constants et les coordonnées a, b, c de dm varient seules; d'ailleurs les limites de l'intégration sont indépendantes de x, y, z.

Si le point x, y, z est *extérieur* à la masse attirante, r ne s'annule pas dans l'intégrale, tous les éléments de l'intégrale restent finis et l'on peut appliquer, sans objection, la règle de la différentiation sous le signe $\int$. On a alors

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} dm \dots\dots$$

Calculant de même les dérivées secondes par rapport à ~~x~~ et y, et z on a

$$\Delta U = \int \Delta \frac{1}{r} dm,$$

et comme $\Delta \frac{1}{r} = 0$ (n° 558), on a

$$\Delta U = 0.$$

L'équation de Laplace est ainsi démontrée. Elle exprime que la divergence de l'attraction est nulle *en dehors des masses attirantes*.

563. **Lignes, surfaces et volumes attirants.** — Les masses continues dont on étudie l'attraction peuvent former une ligne, une surface ou un volume.

En Mécanique céleste, quand on veut étudier les attractions mutuelles des astres, on est conduit à des attractions de volumes. Dans la théorie de l'électricité, on est conduit à des attractions de surfaces, car la matière attirante est alors répartie sur la surface des corps conducteurs. L'attraction d'une ligne n'a pas de signification physique directe, mais on ramène, dans certains cas, l'attraction d'un volume ou d'une surface à celle d'une ligne.

564. **Potentiel d'une ligne.** — Soient ds un élément de longueur de la ligne, dm sa masse; le rapport $\frac{dm}{ds} = \rho$ s'appelle *densité linéaire de la ligne attirante*. Cette densité peut varier d'un point de la ligne à l'autre; quand elle est constante, la ligne est *homo-*

gène. Cela posé, en adoptant les notations précédentes, on a pour la valeur du potentiel de la ligne au point $P(x, y, z)$

$$U = \int \frac{dm}{r} = \int \frac{\rho\, ds}{r},$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne.

Le potentiel est alors exprimé par une intégrale simple. Il est une fonction continue de x, y, z admettant des dérivées également continues en tous les points ne coïncidant pas avec un des éléments de la ligne attirante. Enfin la fonction U vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta U = 0,$$

en tous les points non situés sur la ligne attirante.

565. **Potentiel d'une simple couche.** — Soit une couche attirante d'épaisseur infiniment petite ayant la forme d'une surface S. Soient $d\sigma$ un élément superficiel de cette couche, dm la masse de matière attirante contenue dans cet élément; le rapport $\frac{dm}{d\sigma} = \rho$ s'appelle *densité superficielle de la couche attirante;* quand ρ est constant, la couche attirante est homogène. En désignant, comme plus haut, par r la distance du point potentié $P(x, y, z)$ à l'élément dm de coordonnées a, b, c, on a pour le potentiel

$$U = \int \frac{dm}{r} = \int\int_S \frac{\rho\, d\sigma}{r}.$$

Dans cette intégrale, a, b, c, ρ sont, sur la surface S, des fonctions de deux paramètres. On a donc à calculer une intégrale double.

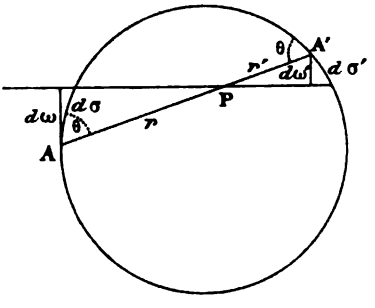
La fonction potentielle U ainsi que l'attraction K qui en dérive sont continues en tous les points P de l'espace non situés sur la surface attirante. Le potentiel U reste même continu quand le point P traverse la surface attirante; mais l'attraction varie alors d'une manière discontinue. C'est ce que nous montrerons d'abord sur des exemples. Enfin, en tous les points non situés sur la couche, la fonction U vérifie l'équation de Laplace $\Delta U = 0$.

566. Exemple. — Potentiel d'une couche sphérique homogène infiniment mince. — Nous allons établir les propositions suivantes :

Soit une couche sphérique homogène infiniment mince de masse totale M, *de centre* O *et de rayon* R ; *la valeur du potentiel de cette couche en un point* P *intérieur à la couche est constante et égale à* $\frac{M}{R}$; *la valeur du potentiel en un point* P *extérieur à la couche est égale à* $\frac{M}{OP}$.

Premier cas : *le point* P *est intérieur.* — Traçons du point P comme sommet un cône d'ouverture infiniment petite découpant sur la sphère deux éléments superficiels $d\sigma$ et $d\sigma'$ placés à des

Fig. 289.



distances r et r' de P. Soit ρ la densité superficielle de la couche ; les masses dm et dm' des éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont

$$dm = \rho\, d\sigma, \qquad dm' = \rho\, d\sigma';$$

leurs attractions sur l'unité de masse placée en P sont dirigées en sens contraires et ont pour intensités

$$\frac{f\rho\, d\sigma}{r^2}, \qquad \frac{f\rho\, d\sigma'}{r'^2}$$

Mais les éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ font des angles égaux θ avec une génératrice quelconque AA' du cône : si donc on décrit de P comme centre avec PA $= r$ et PA' $= r'$ comme rayons des surfaces sphériques, le cône considéré découpe sur ces surfaces des éléments $d\omega$ et $d\omega'$ qui peuvent être regardés comme les projections

de $d\sigma$ et $d\sigma'$, et on a

$$d\omega = d\sigma \sin\theta, \qquad d\omega' = d\sigma' \sin\theta;$$

d'autre part $d\omega$ et $d\omega'$ sont proportionnels aux carrés de leurs distances r et r' au sommet P; on a donc

$$\frac{d\omega}{d\omega'} = \frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{r^2}{r'^2},$$

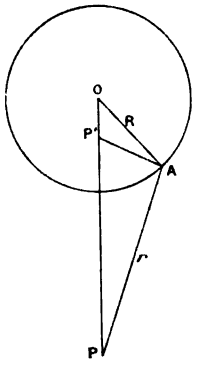
$$\frac{d\sigma}{r^2} = \frac{d\sigma'}{r'^2}.$$

Les attractions des éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ sur le point P sont donc égales et opposées. Toute la surface de la couche pouvant ainsi être divisée en couples d'éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ dont les actions se neutralisent, l'action totale de la couche sur le point P est *nulle*. Donc, en tous les points intérieurs, le potentiel est *constant,* car ses dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ qui définissent l'attraction sont *nulles*. La valeur constante de ce potentiel à l'intérieur est égale à sa valeur au centre, qui est

$$U = \sum \frac{m}{R} = \frac{1}{R} \sum m = \frac{M}{R}.$$

Deuxième cas : *Le point* P *est extérieur*. — Soit P' le point conjugué harmonique de P par rapport aux deux extrémités du

Fig. 290.



diamètre OP, c'est-à-dire le point tel que $OP.OP' = R^2$. Soit dm un élément de masse placé en A. Les triangles OAP et OAP' sont

semblables, car ils ont un angle égal O compris entre côtés proportionnels : en appelant r et r' les distances AP et AP', on a donc

$$\frac{r}{r'} = \frac{OP}{R}.$$

Le potentiel U au point P est

$$U = \int \frac{dm}{r};$$

remplaçant r par sa valeur tirée de la relation précédente, on a

$$U = \frac{R}{OP} \int \frac{dm}{r'}.$$

Cette dernière intégrale $\int \frac{dm}{r'}$ est la valeur du potentiel de la couche au point *intérieur* P' : on a donc, d'après le premier cas,

$$\int \frac{dm}{r'} = \frac{M}{R}$$

et

$$U = \frac{M}{OP}.$$

Nous avons ainsi l'expression du potentiel au point extérieur P. Ce potentiel est le même que si *toute la masse de la couche était concentrée au centre*. On en conclut que *l'attraction d'une couche sphérique homogène sur un point extérieur est la même que si toute la masse de la couche était concentrée au centre.*

Continuité du potentiel. — Quand le point P, situé d'abord à l'extérieur, se déplace d'une manière continue, le potentiel varie d'une manière continue : quand P atteint la couche infiniment mince, le potentiel prend la valeur $\frac{M}{R}$ qu'il conserve ensuite dans tout l'intérieur. Le potentiel varie donc d'une manière continue quand P traverse la couche. Il n'en est pas de même pour l'attraction.

Discontinuité de l'attraction. — Si le point P est infiniment voisin de la couche *à l'extérieur,* l'attraction est dirigée suivant PO et égale à $\frac{fM}{R^2}$; si, au contraire, le point P est infiniment voisin de la couche *à l'intérieur,* l'attraction est nulle. Cette at-

traction varie donc brusquement quand P traverse la couche. En appelant ρ la densité superficielle de la couche, on a $M = 4\pi R^2 \rho$, et on voit que *la composante de l'attraction normale à la couche* (composante qui, dans le cas actuel, se confond avec l'attraction même) *varie de* $4\pi f\rho$ *quand le point* P *traverse la couche.*

Énergie potentielle de la couche. — Nous avons vu (n° 553) que l'énergie potentielle d'un système de points matériels soumis à l'attraction newtonienne est

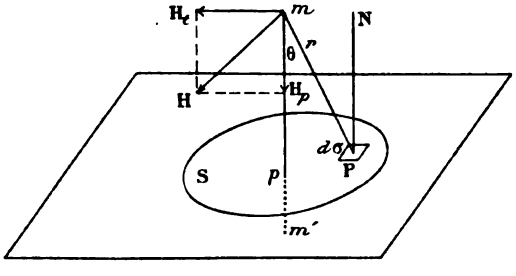
$$V = \frac{1}{2}\sum m U,$$

m désignant la masse d'un quelconque des points du système et U la valeur du potentiel des autres points en m. Dans le cas actuel, si dm est un élément de la couche, la valeur du potentiel du reste de la couche en dm est $\frac{M}{R}$; on a donc

$$V = \frac{1}{2}\int \frac{M}{R}\, dm = \frac{M^2}{2R}.$$

567. Attraction d'une aire plane homogène. — Soit une aire plane S homogène de densité superficielle ρ. L'attraction H de cette aire sur un point m de masse 1 peut être décomposée en deux forces, l'une H_p dirigée suivant la perpendiculaire mp au plan et

Fig. 291.



l'autre H_t dirigée parallèlement au plan. Nous nous bornerons au calcul de H_p, qui conduit à un résultat simple souvent employé.

Un élément d'aire $d\sigma$ placé en P à une distance $Pm = r$ du point m exerce en m une attraction élémentaire $\frac{f\rho\, d\sigma}{r^2}$ dont la com-

posante suivant mp est

$$\frac{f\rho\, d\sigma}{r^2}\cos\theta,$$

θ désignant l'angle Pmp. La composante H_p de l'attraction totale est la somme de ces composantes élémentaires

$$H_p = f\rho\int\int_S \frac{d\sigma}{r^2}\cos\theta,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire attirante S. Le calcul de cette intégrale est identique à celui que nous avons fait n° 555 pour le calcul du flux de force dû à un point à travers une surface. En effet, si l'on mène la normale PN à l'élément $d\sigma$ du côté de m, θ est aussi l'angle mPN; la force H_p est donc le flux de force qui serait produit par un centre attractif de masse ρ placé en m à travers l'aire plane, dans le sens PN. Si l'on considère le cône ayant pour sommet m et pour base l'aire plane, et si l'on désigne par Ω l'aire découpée par ce cône sur une sphère de centre m et de rayon 1, on a, comme on l'a vu au n° 555,

$$H_p = f\rho\Omega.$$

Si le point attiré m est très près du plan attirant, à une distance du plan qui est infiniment petite par rapport aux distances du point m aux points du contour de l'aire, l'aire Ω diffère infiniment peu d'un hémisphère; on a donc alors

$$H_p = 2\pi f\rho.$$

Il va de soi que l'on ne peut rien dire *a priori* de la composante H_t parallèle au plan, puisque cette composante dépend de la forme du contour de l'aire. Dans le cas particulier où le contour de l'aire a pour centre de symétrie la projection p du point attiré m sur le plan, il est évident que, par raison de symétrie, H_t est *nulle*.

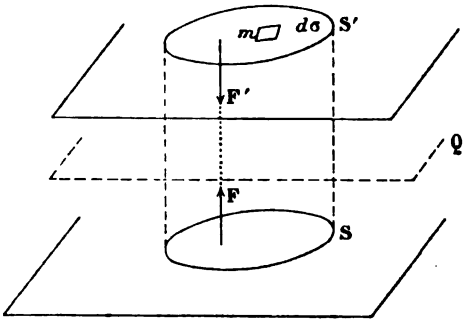
Discontinuité de l'attraction quand le point m traverse la surface attirante. — Si l'on prend deux positions m et m' du point attiré infiniment rapprochées de la surface S et symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de cette surface, on voit que les composantes H_t et H'_t de l'attraction sur ces deux points sont identiques, par raison de symétrie; mais les composantes H_p et H'_p

sont égales à $2\pi f\rho$ et dirigées *en sens contraire,* l'une suivant mp, l'autre suivant $m'p$. *La composante de l'attraction normale à la surface attirante subit donc une variation brusque de* $4\pi f\rho$ *quand le point m traverse la surface attirante.*

On a ainsi un deuxième exemple d'un fait général déjà signalé à propos de l'attraction d'une couche sphérique.

568. Attraction de deux aires planes homogènes identiques placées en face l'une de l'autre. — Considérons deux aires planes S et S′ homogènes et identiques placées de façon à former les deux bases d'un même cylindre droit. La symétrie de la figure par

Fig. 292.



rapport au plan Q équidistant de S et S′ permet de montrer que les attractions de S sur les divers éléments de S′ ont une résultante unique F′ normale à S′; réciproquement, les attractions de S′ sur les éléments de S ont une résultante F égale et directement opposée. En effet, soit h l'attraction d'un élément a de S sur un élément b' de S′; associons à h l'attraction h' de l'élément b de S symétrique de b' par rapport à Q sur l'élément a' de S′ symétrique de a. Ces deux forces h et h' égales et dirigées suivant les diagonales $b'a$ et $a'b$ du rectangle $aa'bb'$ ont évidemment une résultante normale à S′ et dirigée vers S : toutes ces résultantes élémentaires se composent en une F′. Pour calculer F et F′ prenons sur S′ un élément $d\sigma$ de masse $\rho\, d\sigma$ placé en m; la composante H_p de l'attraction de S sur l'unité de masse placée en m est, d'après ce qui précède, $f\rho\Omega$, où Ω est l'angle solide sous lequel on voit de m l'aire S; sur l'élément $\rho\, d\sigma$ le plan S exerce donc

une attraction dont la composante normale au plan est

$$f\rho\,\Omega.\rho\,d\sigma;$$

l'attraction résultante F′ de S sur S′ étant normale à S′ est la somme de ces composantes normales. Donc

$$F' = F = f\rho^2 \iint \Omega\, d\sigma.$$

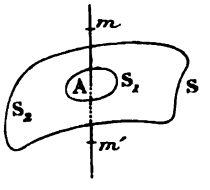
Cas où les plans sont à une distance infiniment petite par rapport à leurs dimensions. — Dans cette hypothèse, pour tous les points m de S′, excepté pour les points infiniment voisins des bords, on a sensiblement $\Omega = 2\pi$. Comme d'autre part $\iint d\sigma$ est l'aire S des deux surfaces planes, on a

$$F = F' = 2\pi f\rho^2 S,$$

formule employée dans la théorie des condensateurs électriques.

569. Discontinuité de l'attraction d'une simple couche quand le point attiré traverse la couche. — Soit une surface attirante S de densité superficielle variable ρ. Soient A un point de la surface, m et m' deux points placés sur la normale en A infiniment près de

Fig. 293.



la surface et de part et d'autre de A. Appelons H et H′ les attractions de la surface sur l'unité de masse placée en m et en m', et H_p, H'_p les composantes de ces attractions suivant la normale mm', estimée positivement dans le sens mm'. On a, dans ces conditions,

$$H_p - H'_p = 4\pi f\rho,$$

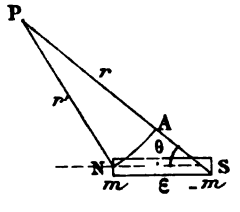
ρ désignant la valeur de la densité en A. Nous ne démontrerons pas ce théorème en toute rigueur et nous nous contenterons de l'indication suivante, en renvoyant pour plus de détails aux Leçons

de Riemann, *Schwere, Electricität und Magnetismus*. Traçons sur la surface, autour du point A, une courbe fermée détachant une aire très petite S_1. La surface S est ainsi partagée en deux parties S_1 et $S_2 = S - S_1$. L'attraction de S sur un point quelconque P est la somme géométrique des attractions H_1 et H_2 de S_1 et S_2. Quand le point attiré P va de m en m', l'attraction H_2 de S_2 varie d'une manière continue, car P ne traverse pas S_2 : les composantes normales de H_2 aux points m et m' diffèrent donc infiniment peu. La petite surface S_1 peut être regardée comme une aire plane située dans le plan tangent en A et ayant une densité constante ρ : en lui appliquant le résultat démontré pour l'attraction d'une aire plane (n° 567), on voit que, P allant de m en m', la composante normale de H_1 diminue de $4\pi\rho f$. Donc la composante normale de H, somme des composantes normales de H_1 et H_2, diminue de $4\pi\rho f$.

Cette propriété a été entrevue par Coulomb, précisée par Poisson et démontrée rigoureusement par Laplace et Cauchy.

570. Aimant élémentaire. — On appelle *aimant élémentaire* un aimant dont les dimensions peuvent être regardées comme infiniment petites par rapport aux dimensions du champ dans lequel on étudie son action. Les aimants élémentaires sont supposés avoir la forme de cylindres droits avec les pôles concentrés sur les bases. Soient m la masse magnétique répandue sur le pôle N,

Fig. 294.



— m celle du pôle S, ε la longueur de l'aimant; considérons une masse magnétique égale à l'unité positive placée en P, à des distances r et r' des pôles S et N. Le potentiel magnétique en P est

$$U = \sum \frac{m}{r} = \frac{m}{r'} - \frac{m}{r} = \frac{m(r - r')}{rr'}.$$

Comme la longueur ε de l'aimant est infiniment petite par rapport aux distances r et r', le produit rr' est sensiblement égal à r^2; d'autre part, si l'on décrit un arc de cercle NA de P comme centre avec PN comme rayon, le triangle SNA rectangle en A donne

$$SA = r - r' = \varepsilon \cos\theta,$$

θ étant l'angle de l'axe de l'aimant pris dans le sens SN avec la droite qui joint l'aimant au point P. Donc

$$U = \frac{m\varepsilon\cos\theta}{r^2}.$$

On peut aussi exprimer ce résultat de la façon suivante : Écrivons

$$U = m\varepsilon\frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{\varepsilon};$$

le facteur $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$ est l'accroissement $\Delta\frac{1}{r}$ de la fonction $\frac{1}{r}$ quand on passe du point S au point voisin N situé à une distance ε de S. Comme ε est supposé infiniment petit, le rapport $\frac{1}{\varepsilon}\Delta\frac{1}{r}$ est la dérivée de $\frac{1}{r}$ prise dans le sens SN, c'est-à-dire suivant la normale menée à la base S du côté de N. Si nous désignons cette dérivée par $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$, nous aurons

$$U = m\varepsilon\frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

La droite SN est l'axe de l'aimant élémentaire, et la quantité εm son moment. Cette notion est due à Poisson. Si l'on appelle α, β, γ les cosinus des angles que fait l'axe SN avec les axes, on a

$$U = m\varepsilon\left[\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \beta\frac{\frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right].$$

Dans cette expression, α, β, γ sont des constantes. Cette fonction, étant un potentiel dû à des attractions en raison inverse du carré de la distance, satisfait à l'équation de Laplace en dehors de l'ai-

mant élémentaire. Cela est aisé à vérifier, car de l'identité $\Delta \frac{1}{r} = 0$ on déduit en différentiant par rapport à x, y ou z

$$\Delta\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) = 0, \qquad \Delta\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) = 0, \qquad \Delta\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) = 0.$$

On a donc $\Delta U = 0$.

L'expression U du potentiel d'un aimant élémentaire dépend, comme on voit, des dérivées premières de $\frac{1}{r}$. Des potentiels contenant des dérivées d'ordres plus élevés se rencontrent en pyroélectricité et en piézoélectricité (MAXWELL, *Treatise on Electricity and Magnetism*).

Surfaces équipotentielles. — Dans cet exemple, les surfaces équipotentielles $U = \text{const.}$ sont évidemment de révolution autour de l'axe SN : il suffit donc de construire les courbes équipotentielles dans un plan passant par SN. Si l'on prend SN comme axe polaire, ces courbes ont pour équation

$$\frac{\cos\theta}{r^2} = c.$$

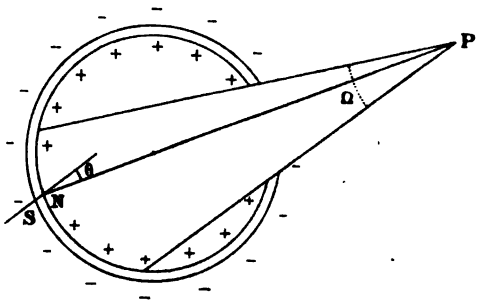
571. Feuillets magnétiques. Double couche uniforme. — On appelle *feuillet magnétique* un aimant lamellaire dont les faces ont des densités magnétiques égales et opposées. Imaginons donc un feuillet d'épaisseur constante ε affectant la forme d'une surface courbe quelconque : cette épaisseur ε sera regardée comme infiniment petite : supposons que, sur une des faces du feuillet, soit distribuée une couche uniforme de magnétisme positif de densité superficielle ρ, de sorte que chaque élément superficiel $d\sigma$ contienne une masse magnétique $\rho\, d\sigma$; supposons que sur la face opposée, soit de même distribuée une couche uniforme de densité $-\rho$. Un feuillet de ce genre peut être considéré comme formé par la juxtaposition d'aimants élémentaires NS de longueur constante ε, dont les axes sont normaux au feuillet et dont les bases $d\sigma$ sont couvertes de masses magnétiques

$$\pm m = \pm \rho\, d\sigma.$$

Le potentiel de cette double couche en un point P est la somme

des potentiels dus aux aimants composants. L'aimant élémentaire SN de base $d\sigma$ a pour axe la normale SNN′ au feuillet : soit

Fig. 295.



θ l'angle de cette normale avec SP ; le potentiel de cet aimant au point P est, d'après la formule précédente,

$$\frac{\mu\, d\sigma \cos\theta}{r^2},$$

r désignant la distance SP et μ le produit $\varepsilon\rho$. Ce potentiel élémentaire est positif ou négatif suivant que θ est aigu ou obtus, c'est-à-dire suivant que du point P on voit la base N ou la base S de l'aimant élémentaire. La valeur du potentiel de la double couche en P est alors, si l'on met μ en facteur,

$$U = \mu \int\int \frac{d\sigma \cos\theta}{r^2},$$

l'intégration étant étendue à toute la surface.

On peut écrire aussi

$$U = \mu \int\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

la dérivée $\frac{d\frac{1}{r}}{dn}$ étant prise normalement au feuillet dans le sens SNN′. Cette intégrale a une signification remarquable qui résulte immédiatement de ce qui a été vu précédemment pour le flux de force provenant d'un centre unique (n° 555). Nous avons vu en effet que le flux de force dû à un centre unique de masse m placé

en P, à travers une surface donnée, est

$$fm\int\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma.$$

On voit donc que, U *désignant le potentiel d'un feuillet magnétique en un point* P, *le produit*

$$fU = f\mu\int\int \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma$$

est égal au flux de force qu'enverrait à travers le feuillet, dans le sens SN, *un centre unique de masse* μ *placé en* P.

Le potentiel U du feuillet en P est donc égal à

$$\mu\Omega,$$

Ω désignant la somme algébrique des ouvertures $\pm d\omega$ des cônes élémentaires ayant leur sommet en P et ayant pour bases les divers éléments superficiels $d\sigma$ d'une des faces du feuillet (n° 555). La face du feuillet qu'il faut actuellement regarder comme positive est la face N.

Le potentiel U est une fonction de la position du point P qui est continue tant que le point P ne traverse pas la surface. Il vérifie l'équation de Laplace.

Conséquences. — 1° Si le feuillet est fermé, la face S étant à l'extérieur, son potentiel en un point intérieur est $4\pi\mu$, en un point de la surface $2\pi\mu$ et en un point extérieur o. Quand le point attiré P se déplace d'une manière continue de l'intérieur vers l'extérieur, le potentiel en P diminue donc brusquement de $2\pi\mu$ au moment où P atteint le feuillet, puis diminue de nouveau de $2\pi\mu$ quand il en sort.

2° Si le feuillet n'est pas fermé, la même propriété a encore lieu. En effet, soit U le potentiel d'un feuillet ouvert $\mathcal{F}$; fermons ce feuillet à l'aide d'un feuillet auxiliaire $\mathcal{F}'$ dont le potentiel au même point soit U'. Alors on peut écrire

$$U = (U + U') - U'$$

où $U + U'$ est le potentiel du feuillet total *fermé* $\mathcal{F} + \mathcal{F}'$. Quand le point P traverse le feuillet $\mathcal{F}$ de la face N vers S, le potentiel

U + U′ du feuillet fermé total diminue deux fois de $2\pi\mu$, le potentiel U′ du feuillet auxiliaire varie d'une manière continue, donc U diminue deux fois de $2\pi\mu$, une fois quand P atteint le feuillet, une seconde fois quand il l'a traversé.

Ainsi, tandis que le potentiel d'une simple couche varie d'une manière continue quand le point potentié P traverse la couche, le potentiel d'une double couche subit une double discontinuité.

572. Double couche de densité variable. — Au lieu de supposer la densité superficielle $\pm\rho$ constante, on peut supposer qu'elle varie d'une manière continue sur chacune des faces du feuillet. En posant encore $\varepsilon\rho = \mu$, on a, pour la valeur du potentiel du feuillet en un point P,

$$U = \int\int_S \frac{\mu\cos\theta}{r^2}\,d\sigma = \int\int_S \mu\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma,$$

où μ varie d'une manière continue sur la surface. Cette fonction U vérifie l'équation de Laplace en dehors de la double couche.

Les propriétés du potentiel d'une double couche ont été étudiées par Ampère, par Helmholtz, par Neumann, par M. Tauber (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, 1897), par M. Liapounoff (*Comptes rendus*, 1897, et *Société Mathématique de Kharkow*, 1897). On trouvera des renseignements sur ce sujet dans le premier Volume du *Traité d'Analyse* de M. Picard (Gauthier-Villars), et dans la *Théorie du potentiel newtonien*, par M. Poincaré (Carré et Naud; 1899).

573. Actions mutuelles d'un courant et d'un aimant. — L'action d'un courant fermé sur un pôle magnétique peut être ramenée à l'action d'un feuillet magnétique ayant comme contour la courbe suivie par le courant.

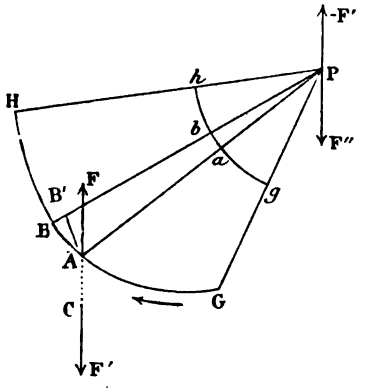
Soit en P un pôle magnétique dont la masse magnétique est égale à +1; soit, d'autre part, un courant électrique d'intensité i suivant un certain circuit. Désignons par ds un élément AB du circuit compté positivement dans le sens du courant; l'action du pôle P sur ds est une force F perpendiculaire au plan de P et de l'élément ds ayant pour intensité

$$F = \frac{ki}{r^2}\,ds\sin\varphi,$$

où r désigne la distance de P à ds, φ l'angle PAB de r avec ds, k un coefficient constant dont la valeur dépend du choix des unités. L'orien-

tation de cette force est telle qu'un observateur couché suivant AB, les pieds en A, la tête en B et regardant P, ait F à sa droite.

Fig. 296.



Inversement, l'action de l'élément de courant sur l'aimant est une force F' égale et directement opposée à F, comme il résulte du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. L'aimant est un corps solide dont le pôle P fait partie; la force F' doit être regardée comme appliquée à un point C invariablement lié à l'aimant.

Nous pouvons, sans changer l'état de l'aimant, appliquer au point P une force F'' égale et parallèle à F' et une force — F' égale et opposée : l'ensemble des forces F', — F' forme alors un couple, et l'on peut dire que l'action de l'élément *ds* sur l'aimant se compose de la force F'' égale et opposée à F appliquée en P et du couple F', — F'. L'*axe* ou *moment* de ce couple a une représentation géométrique simple. (*Voyez* LIPPMANN, *Leçons sur les unités électriques absolues*, p. 91). Considérons le cône ayant pour sommet P et pour directrice le courant et coupons ce cône par une sphère de centre P et de rayon 1 : nous obtenons ainsi une courbe *c*. Les deux génératrices PA et PB de ce cône rencontrent la sphère aux deux points *a* et *b* : nous allons montrer que l'axe du couple F', — F' est, en grandeur, direction et sens, égal au segment infiniment petit $\overline{ab}$ multiplié par *ki*. En effet, l'axe du couple F', — F' est un segment perpendiculaire au plan du couple et égal au moment μ du couple.

$$\mu = \mathrm{F}r = ki\frac{ds\sin\varphi}{r};$$

cet axe peut d'ailleurs être placé en tel point de l'espace que l'on veut.

Or l'axe infiniment petit $\overline{ab}$ est perpendiculaire au plan du couple : en outre, si l'on mène AB' perpendiculaire à PB, on a

$$\mathrm{AB}' = ds\sin\varphi, \qquad \overline{ab} = \frac{ds\sin\varphi}{r}.$$

Donc on a bien pour le moment

$$\mu = ki\overline{ab}.$$

Courant fini. — Si l'on prend une portion finie GH du courant, son action sur l'aimant est la résultante des actions élémentaires des divers éléments tels que AB. Les forces F″ provenant des divers éléments se composent en une seule, K, appliquée en P, et les couples se composent en un seul dont le moment s'obtient en portant bout à bout les moments tels que $ki\overline{ab}$ des couples composants et prenant la résultante du contour ainsi fermé. Or, en portant bout à bout les éléments $\overline{ab}$ on obtient la courbe sphérique $gabh$; la corde fermant ce contour est $\overline{gh}$: le moment résultant est donc

$$ki\overline{gh}$$

en grandeur, direction et sens.

Courant fermé. — Si le courant est fermé, les deux points G et H se confondent, les deux points g et h également, et le moment résultant est nul. Donc l'action d'un circuit fermé sur un point magnétique est *une force* K appliquée au point.

574. Action d'un courant fermé sur un point magnétique. Potentiel. — Soient, comme plus haut (*fig.* 296), AB = ds un élément de courant, F l'action du pôle magnétique P de masse + 1 sur cet élément et F′ l'action de l'élément sur l'aimant appliquée au point C de l'aimant. Le courant étant fermé, les forces F′ ont une résultante K appliquée en P et les forces F une résultante égale et directement opposée — K appliquée au circuit.

Nous allons montrer, comme application de la formule d'Ampère et de Stokes, que l'action K du courant sur le point P est identique à celle d'un feuillet magnétique ayant pour contour la courbe suivie par le courant.

Soient :

a, b, c les coordonnées du point A du circuit;
da, db, dc les projections de l'élément ds = AB sur les axes;
x, y, z les coordonnées du point P.

La force élémentaire F″ appliquée au point P est orientée de telle façon que le courant tourne autour d'elle dans le sens négatif des rotations; elle a pour intensité

$$\frac{ki}{r^2}\,ds\sin\varphi$$

Or le moment linéaire d'un vecteur AB = ds par rapport à P est perpendiculaire au plan de P et de ds, dirigé en sens contraire de F″ et égal à

$$r\,ds\sin\varphi.$$

Donc F″ est égale et opposée à ce moment linéaire multiplié par $\frac{ki}{r^3}$.

Le moment linéaire de ds par rapport à P a pour projection sur Ox

$$(b-y)\,dc-(c-z)\,db.$$

La force F′ a donc pour projection sur Ox

$$-\frac{ki}{r^3}[(b-y)\,dc-(c-z)\,db],$$

ce qu'on peut écrire aussi

$$-ki\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}db-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}dc\right),$$

comme il résulte de l'expression $r=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}$. La résultante K de ces forces a donc pour projection sur Ox

$$X=-ki\int_L\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}db-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}dc\right),$$

l'intégrale étant prise le long du circuit dans le sens du courant. Dans cette intégrale, x, y, z sont regardées comme des constantes; a, b, c sont les variables d'intégration. On obtient de même les composantes Y et Z de la force K par permutation circulaire.

Jetons sur le circuit L une cloison continue formant une surface S limitée par L : la formule de Stokes (n° 539) donne alors

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_L P\,da+Q\,db+R\,dc\\&=\iint_S\left[\left(\frac{\partial R}{\partial b}-\frac{\partial Q}{\partial c}\right)\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial c}-\frac{\partial R}{\partial a}\right)\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial a}-\frac{\partial P}{\partial b}\right)\gamma\right]d\sigma,\end{aligned}\right.$$

P, Q, R étant trois fonctions de a, b, c.

Pour transformer l'intégrale donnant X, prenons

$$P=0,\qquad Q=\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c},\qquad R=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b},$$

nous aurons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial R}{\partial b}-\frac{\partial Q}{\partial c}=-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial c^2}-\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial b^2}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial a^2},\\&\frac{\partial P}{\partial c}-\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial b\,\partial a},\\&\frac{\partial Q}{\partial a}-\frac{\partial P}{\partial b}=\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial c\,\partial a},\end{aligned}\right.$$

où la première relation résulte de ce que $\frac{1}{r}$ regardé comme fonction de a, b, c vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c^2} = 0.$$

Comme $\frac{1}{r}$ et toutes ses dérivées partielles par rapport à a, b, c ou x, y, z sont des fonctions des seules différences $a - x$, $b - y$, $c - z$, on voit qu'en appelant u l'une quelconque de ces dérivées, on a identiquement

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Les trois expressions (2) peuvent donc être écrites, en remplaçant successivement u par $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}$, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}$:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\right), \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\right), \qquad -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right),$$

et la formule (1) donne

$$X = ki \int\int_S \left[\alpha \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}\right) + \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\right) + \gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right)\right] d\sigma.$$

Si donc on pose

$$U = ki \int\int_S \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right) d\sigma,$$

on voit que X est la dérivée partielle de U par rapport à x. Un calcul analogue montre que Y et Z sont les dérivées partielles de U par rapport à y et z :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

La force K dérive donc de la fonction des forces U. On peut écrire

$$U = ki \int\int_S \frac{d \frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

la dérivée étant prise suivant la normale à S, dans le sens indiqué par le théorème de Stokes.

On voit que ce potentiel est identique à celui d'un feuillet magnétique

ayant pour contour le courant, la face positive du feuillet étant du côté de la direction α, β, γ de la normale adoptée dans le théorème de Stokes.

III. — VOLUMES.

575. Composantes de l'attraction. Potentiel. — Soit un volume fini V limité par une surface fermée S. Désignons par $d\tau$ un élément du volume placé au point (a, b, c) et par dm la masse de cet élément : le rapport $\frac{dm}{d\tau} = \rho$ s'appelle la densité de la masse attirante au point (a, b, c); cette densité est une fonction de a, b, c

$$\rho = \psi(a, b, c)$$

que nous supposons continue dans la masse. Si ρ est constant, la masse attirante est homogène.

Considérons un point P de masse 1 ayant pour coordonnées x, y, z; soit r la distance de P à l'élément dm. Les composantes X, Y, Z de l'attraction K du volume sur le point P sont données par les intégrales triples

$$(1)\qquad \begin{cases} X = f\iiint_V \frac{a-x}{r^3}\rho\, d\tau, \\ Y = f\iiint_V \frac{b-y}{r^3}\rho\, d\tau, \\ Z = f\iiint_V \frac{c-z}{r^3}\rho\, d\tau; \end{cases}$$

c'est ce qui résulte des formules générales données au n° 560, où $dm = \rho\, d\tau$. L'indice V signifie que les intégrales triples sont étendues au volume attirant V. Les variables d'intégration sont a, b, c, de sorte que

$$d\tau = da\, db\, dc.$$

Si l'on considère le potentiel

$$(2)\qquad U = \iiint_V \frac{\rho\, d\tau}{r},$$

r désignant la distance $\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$, on voit qu'on peut écrire

$$(3)\qquad X = f\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = f\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = f\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Ces formules résultent, sans difficulté, des règles de différentiation sous le signe $\int$, tant que le point P est extérieur à la masse attirante, car, dans ce cas, r ne s'annule pour aucun système de valeurs de a, b, c et tous les éléments des intégrales restent finis. Pour la même raison, les fonctions U, X, Y, Z admettent des dérivées de tous les ordres par rapport à x, y, z en dehors de la masse attirante. Mais, comme l'a montré Gauss, il faut examiner de plus près ce qui se passe à cet égard quand le point attiré P est dans la masse attirante.

576. Cas où le point P est dans la masse attirante. — Nous allons démontrer les propositions suivantes.

1° *Les fonctions* U, X, Y, Z *sont finies et déterminées quelle que soit la position du point attiré* P;

2° *La fonction* U *admet dans tout l'espace des dérivées premières et les relations* (3) *subsistent quelle que soit la position du point* P; *il en résulte que la fonction* U *est continue dans tout l'espace;*

3° *Les fonctions* X, Y, Z *admettent, dans tout l'espace des dérivées premières*, ou, ce qui revient au même, *la fonction* U *admet dans tout l'espace des dérivées secondes;* il en résulte que *les fonctions* X, Y, Z *sont continues dans tout l'espace;*

4° *Les dérivées secondes de* U *sont discontinues quand le point* P *traverse la surface du volume attirant.*

577. Les fonctions U, X, Y, Z **restent finies et bien déterminées dans la masse attirante.** — Supposons le point attiré P(x, y, z) dans la masse attirante. Prenons un système de coordonnées polaires dans l'espace ayant le point P comme origine. Imaginons, par P, trois axes Px', Py', Pz' parallèles à Ox, Oy, Oz, et définissons la position d'un point m de l'espace par la distance P$m = r$, l'angle θ de Pm avec Pz' et l'angle φ du plan z'Pm avec z'Px'. Les coordonnées a, b, c du point m s'expriment alors en fonction de r, θ, φ par les formules

$$a - x = r \sin\theta \cos\varphi,$$
$$b - y = r \sin\theta \sin\varphi,$$
$$c - z = r \cos\theta.$$

Dans ce système de coordonnées, un élément $d\tau$ de volume a pour expression

$$d\tau = r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

car cet élément de volume peut être assimilé à un parallélépipède rectangle ayant pour arêtes dr, $r\,d\theta$ et $r\sin\theta\,d\varphi$; il est, en effet, compris d'abord entre deux sphères décrites de l'origine comme centre, avec r et $r+dr$ pour rayons; ensuite entre deux plans passant par l'axe des z' et faisant entre eux un angle égal à $d\varphi$; enfin entre deux cônes de révolution autour de l'axe des z' ayant leur sommet à l'origine et dont les génératrices font avec l'axe les angles θ et $\theta+d\theta$.

Les expressions de X, Y, Z, U deviennent alors

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = f\iiint \rho\, dr \sin^2\theta \cos\varphi\, d\theta\, d\varphi, \\ \mathrm{Y} = f\iiint \rho\, dr \sin^2\theta \sin\varphi\, d\theta\, d\varphi, \\ \mathrm{Z} = f\iiint \rho\, dr \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, d\varphi, \\ \mathrm{U} = \iiint \rho r\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \end{cases}$$

Ces intégrales ont leurs éléments finis et, comme elles sont étendues à des valeurs finies de r, θ et φ, elles ont elles-mêmes des valeurs finies et bien déterminées.

578. Les relations $\mathrm{X} = f\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}$, ... subsistent dans le volume attirant. — Le point attiré P étant dans la masse attirante, considérons autour du point P un petit volume V_1; le volume attirant total V est ainsi décomposé en deux parties, l'une V_1 et l'autre $\mathrm{V}_2 = \mathrm{V} - \mathrm{V}_1$. Soient U_1 et U_2 les potentiels de ces deux volumes en P, X_1, Y_1, Z_1 les composantes de l'attraction du volume V_1 au point P et X_2, Y_2, Z_2 celles de l'attraction du volume V_2 au même point. On a évidemment

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2, \qquad \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2, \qquad \ldots.$$

Soient, dans le volume V_1, un deuxième point P′ de coordonnées $x+\Delta x, y, z$, obtenu en déplaçant P parallèlement à Ox, U′ la valeur du potentiel total au point P′, U'_1 et U'_2 les valeurs des

potentiels des volumes V_1 et V_2. On a

$$\frac{U' - U}{\Delta x} = \frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} + \frac{U'_2 - U_2}{\Delta x}. \tag{4}$$

Quand P′ tend vers P, le rapport $\frac{U'_2 - U_2}{\Delta x}$ tend vers $\frac{1}{f} X_2$, car le point P étant extérieur au volume V_2, on a

$$X_2 = f \frac{\partial U_2}{\partial x}.$$

Étudions le rapport $\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x}$. En désignant par r et r' les distances d'un point variable m du volume V_1 aux points P et P′, on a

$$U'_1 = \iiint_{V_1} \frac{\rho \, d\tau}{r'},$$

$$U_1 = \iiint_{V_1} \frac{\rho \, d\tau}{r},$$

$$\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} = \iiint_{V_1} \frac{\rho \, d\tau}{\Delta x} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right).$$

Or la valeur absolue de $\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$ est moindre que $\frac{1}{rr'}$, car, dans le triangle PmP′, la valeur absolue de Δx est supérieure à celle de $r' - r$; d'autre part, il est évident que $\frac{1}{rr'}$ est moindre que $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}\right)$. Si nous appelons enfin ρ_1 le maximum de ρ dans U_1, on a donc

$$\left| \frac{U'_1 - U_1}{\Delta x} \right| < \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \frac{\rho_1 \, d\tau}{r^2} + \frac{1}{2} \iiint_{V_1} \frac{\rho_1 \, d\tau}{r'^2},$$

où le premier membre signifie *valeur absolue de* $\frac{U'_1 - U_1}{\Delta x}$.

En prenant un système de coordonnées polaires ayant P comme origine, on a, pour la première intégrale ci-dessus,

$$\iiint_{V_1} \rho_1 \frac{d\tau}{r^2} = \iiint_{V_1} \rho_1 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Les angles θ et φ étant choisis, la direction correspondante rencontre la surface limitant V_1 en un point dont la distance à P est R; on a donc, en intégrant d'abord par rapport à r de o à R, puis par

rapport à θ de o à π et à φ de o à 2π

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \rho_1 R \sin\theta \, d\theta.$$

Appelons C la plus grande corde de la surface limitant V_1, on a

$$R < C;$$

l'intégrale ci-dessus est donc moindre que

$$\rho_1 C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta,$$

c'est-à-dire que $4\pi\rho_1 C$. De même, on voit que

$$\iiint_{V_1} \rho_1 \frac{d\tau}{r'^2} < 4\pi\rho_1 C.$$

On en conclut

$$\left| \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} \right| < 4\pi\rho_1 C.$$

Ainsi, dans la formule

$$\frac{U' - U}{\Delta x} = \frac{U_1' - U_1}{\Delta x} + \frac{U_2' - U_2}{\Delta x},$$

quand Δx tend vers zéro, le deuxième rapport du deuxième membre tend vers $\frac{1}{f} X_2$ et le premier reste en valeur absolue moindre que $4\pi\rho_1 C$. On peut prendre V_1 assez petit pour que C soit plus petit que tout nombre donné, et pour que X_2 diffère de X aussi peu qu'on le veut : donc $\frac{U' - U}{\Delta x}$ tend vers $\frac{1}{f} X$ et l'on peut encore écrire

$$X = f \frac{\partial U}{\partial x}.$$

On voit, de même, que les deux autres formules (3) subsistent. La fonction U ayant des dérivées premières en tous les points de l'espace est continue partout.

579. Dérivées secondes du potentiel : 1° *Point extérieur.* — Quand le point P est extérieur aux masses attirantes, on a immé-

diatement par la règle de différentiation sous le signe $\int$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \iiint_V \left[\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] \rho \, d\tau, \tag{5}$$

.....

Ces dérivées sont finies et continues tant que P est en dehors de la masse attirante. En les ajoutant, on trouve que la quantité sous le signe d'intégration est identiquement nulle et on obtient l'*équation de Laplace* (*point extérieur*)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0;$$

2° *Point intérieur.* — Quand le point P est intérieur au volume attirant, on ne peut plus calculer les dérivées secondes par la règle de la différentiation sous le signe $\int$. Cela tient à ce que les intégrales (5) auxquelles conduit l'application de cette règle *n'ont plus de sens* à cause du facteur $\frac{1}{r}$ qui devient infini; c'est ce qu'on vérifierait en prenant encore des coordonnées polaires d'origine P. Il ne faut pas conclure de là que les dérivées secondes n'existent plus dans ce cas, mais seulement qu'elles ne sont plus exprimées par les formules (5). Nous allons voir que ces dérivées continuent à exister, nous en donnerons l'expression, puis nous montrerons qu'elles ne vérifient plus l'équation de Laplace, mais une autre équation appelée *équation de Poisson*.

D'après ce que nous avons vu plus haut, on a toujours

$$\frac{X}{f} = \frac{\partial U}{\partial x} = \iiint_V \frac{a-x}{r^3} \rho \, d\tau,$$

ρ et r sont des fonctions de a, b, c; on peut écrire

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a} d\tau + \iiint_V \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a} d\tau;$$

car

$$\frac{a-x}{r^3} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a},$$

$$\frac{a-x}{r^3}\rho = -\rho\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial a} = -\frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a} + \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a}.$$

Appliquons à la première de ces intégrales la formule de Green (n° 534). Pour cela remarquons que la fonction $\frac{\rho}{r}$ de a, b, c devient infinie dans le volume V quand le point a, b, c coïncide avec P. Entourons alors le point P d'une sphère s de rayon très petit ε; nous pouvons appliquer la formule de Green au volume $V - s$ compris entre la surface S et la surface s de la sphère : nous aurons

$$\int\int\int_{V-s} \frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a}\, da\, db\, dc = \int\int_S \frac{\rho}{r}\alpha\, d\sigma + \int\int_s \frac{\rho}{r}\alpha\, d\sigma,$$

où nous désignons par a, b, c les variables d'intégration. Quand le rayon ε de la sphère s tend vers zéro, l'intégrale double étendue à l'aire s tend vers zéro, car dans cette intégrale $r = \varepsilon$, $d\sigma = \varepsilon^2\, d\omega$ en appelant $d\omega$ l'ouverture du cône ayant pour sommet P et pour base un élément $d\sigma$ de s; ce qui montre que ε se met en facteur. La formule de Green donne donc, en faisant tendre ε vers zéro,

$$\int\int\int_V \frac{\partial\left(\frac{\rho}{r}\right)}{\partial a}\, d\tau = \int\int_S \frac{\rho}{r}\alpha\, d\sigma;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{X}{f} = \frac{\partial U}{\partial x} = -\int\int_S \frac{\rho}{r}\alpha\, d\sigma + \int\int\int_V \frac{1}{r}\frac{\partial\rho}{\partial a}\, d\tau,$$

la première intégrale étant étendue à la surface limite et α désignant le cosinus de la normale extérieure avec Ox. Cette première intégrale peut être interprétée comme étant le potentiel d'une simple couche de densité superficielle $\rho\alpha$ répandue sur la surface S limitant le volume attirant V. La deuxième peut également être interprétée comme le potentiel du même volume, dans lequel la densité de l'élément $d\tau$ au lieu d'être ρ serait $\frac{\partial\rho}{\partial a}$.

D'après ce qui précède, ces deux intégrales ont chacune une dérivée partielle par rapport à x, dérivée que l'on peut obtenir par la règle de différentiation sous le signe $\int$. On a ainsi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\int\int_S \frac{a-x}{r^3}\rho\alpha\, d\sigma + \int\int\int_V \frac{a-x}{r^3}\frac{\partial\rho}{\partial a}\, d\tau.$$

On trouverait de même $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$.

Ces dérivées sccondes sont continues dans le volume : mais elles subissent une variation brusque quand le point P franchit la surface S, comme nous le verrons plus loin.

580. Flux de force. Théorème de Gauss. - Nous venons de voir que l'attraction K d'une masse continue sur un point de masse 1 placé au point $P(x, y, z)$ est finie et déterminée quel que soit P, et qu'elle dérive d'une fonction de forces fU.

On peut alors étendre au champ de forces ainsi défini toutes les définitions antérieures relatives au flux de force. Le flux de force total à travers une surface Σ est

$$f\int\int_{\Sigma} K_n \, d\sigma = f\int\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} \, d\sigma,$$

la dérivée $\frac{dU}{dn}$ étant prise suivant la normale menée dans le sens dans lequel on estime positivement le flux.

On peut également étendre au cas actuel le théorème de Gauss démontré au n° 556 pour l'attraction de points isolés.

Soit Σ une surface fermée quelconque, M' la portion de masse attirante située dans cette surface; le flux de force à travers cette surface de l'intérieur vers l'extérieur est

$$-4\pi f M'.$$

En d'autres termes, on a

$$\int\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} \, d\sigma = -4\pi M',$$

la dérivée étant prise suivant la normale EXTÉRIEURE.

Décomposons le volume attirant en volumes élémentaires, par exemple en petits cubes, au moyen de plans parallèles aux plans de coordonnées. Remplaçons ensuite chacun de ces cubes par un point de même masse que lui placé en son centre de gravité. Soit K' le champ de forces dû à ces masses isolées. D'après le théorème de Gauss (n° 556), le flux à travers une surface fermée

quelconque Σ est donné par la formule

$$\int\int_{\Sigma} K'_n \, d\sigma = -4\pi f M',$$

M′ étant la masse totale des points attirants situés dans Σ. Si maintenant on fait croître indéfiniment le nombre des cubes élémentaires, de façon que le volume de chacun d'eux tende vers zéro, K′ tend vers l'attraction K due aux masses continues et la formule devient

$$\int\int_{\Sigma} K_n \, d\sigma = -4\pi f M',$$

M′ étant la masse attirante totale contenue dans Σ.

Le même raisonnement étend la formule du flux de force à l'attraction d'une ligne ou d'une surface.

De ce théorème résulte, comme au n° 557, le théorème de la *conservation du flux* dans un tube de force.

581. **Équation de Poisson.** — Le théorème de Gauss sur le flux de force conduit immédiatement à l'équation de Poisson. Soit *dans la masse attirante* une surface fermée *quelconque* Σ, on a

$$\int\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} \, d\sigma = -4\pi M', \tag{6}$$

M′ désignant la masse contenue dans Σ et $\frac{dU}{dn}$ la dérivée du potentiel suivant la normale extérieure. Soit V′ le volume limité par Σ, on a évidemment

$$M' = \int\int\int_{V'} \rho \, d\tau,$$

où

$$\rho = \psi(x, y\ z), \qquad d\tau = dx\, dy\, dz,$$

l'intégration étant étendue au volume V′. D'autre part, la formule de Green donne

$$\int\int_{\Sigma} \frac{dU}{dn} \, d\sigma = \int\int\int_{V'} \Delta U \, d\tau.$$

L'équation (6) s'écrit donc

$$\int\int\int_{V'} \Delta U \, d\tau = -4\pi \int\int\int_{V'} \rho \, d\tau,$$

ou

$$\iiint_{V'} (\Delta U + 4\pi\rho)\, d\tau = 0.$$

Cette intégrale est nulle *quel que soit le volume* V′ considéré dans l'intérieur de la masse attirante : donc l'élément différentiel est identiquement nul et l'on a

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

(*équation de Poisson, point intérieur*),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho,$$

ρ étant la densité au point x, y, z.

C'est là l'équation de Poisson. On peut dire qu'elle comprend comme cas particulier l'équation de Laplace, car si le point x, y, z est extérieur à la masse attirante, ρ est nul en ce point, et l'on a

$$\Delta U = 0.$$

582. **Discontinuité des dérivées secondes de** U. — On voit que les dérivées secondes de U sont nécessairement discontinues quand le point P traverse la surface qui limite le volume attirant. Car la quantité ΔU, qui est nulle tant que P est extérieur, devient brusquement égale à $-4\pi\rho$ quand P pénètre dans le volume.

583. **Équilibre électrique d'un corps conducteur.** — Soit un corps conducteur isolé, chargé d'une certaine quantité d'électricité et mis en présence d'autres corps électrisés. Si l'électricité est en équilibre, une molécule de fluide positif à l'intérieur du corps ne doit être sollicitée par aucune force, car, par hypothèse, cette molécule peut se mouvoir dans tous les sens. Appelons U le potentiel dû à l'attraction des masses électriques considérées : à l'intérieur du conducteur, la force est nulle, donc

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

il en résulte que U est constant dans l'intérieur du conducteur : l'équation de Poisson,

$$\Delta U = -4\pi\rho$$

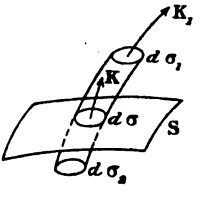
montre alors que la densité électrique ρ est *nulle* dans l'intérieur du conducteur, car ΔU est nul.

L'électricité se porte donc à la surface du conducteur.

En dehors du conducteur, le potentiel U devient variable, mais, à cause de la continuité du potentiel, U est constant sur la surface du conducteur : cette surface est donc une *surface de niveau* et la force en chacun de ses points lui est *normale*. Les tubes de force partent donc de la surface du conducteur, normalement à cette surface.

Densité électrique superficielle. Formule de Coulomb. — Appelons μ la densité superficielle de la couche électrique en équilibre sur la surface S du conducteur. Prenons sur S un élément superficiel $d\sigma$ et menons le tube de force ayant pour section $d\sigma$: ce tube est orthogonal à S, puisque S est une surface de niveau. Menons une section droite $d\sigma_1$ de ce tube infiniment voisine de $d\sigma$ et appelons K_1 la valeur de la force en $d\sigma_1$, force qui est normale à $d\sigma_1$ et égale à $-k\frac{dU}{dn_1}$, la dérivée $\frac{dU}{dn_1}$ étant prise suivant la normale à $d\sigma_1$, et k désignant le coefficient d'attraction électrique (n° 551). Puis prolongeons ce tube à l'intérieur du conducteur et fermons-le par une section $d\sigma_2$. Appliquons ensuite le

Fig. 297.



théorème du flux de force au volume ainsi limité. Le flux à travers les parois latérales du tube est nul ; à travers $d\sigma_2$, il est nul également, car la force est nulle dans le conducteur ; enfin, à travers $d\sigma_1$, il est $K_1 d\sigma_1$.

D'autre part, la masse contenue dans le petit volume considéré est $\mu d\sigma$. On a donc

$$K_1 d\sigma_1 = 4\pi k \mu d\sigma,$$

car, en passant de l'attraction de Newton à l'attraction électrique, il faut remplacer f par $-k$ (n° 551).

Si la section $d\sigma_1$ se rapproche indéfiniment de $d\sigma$, K_1 tend vers la force K en $d\sigma$, $\frac{d\sigma_1}{d\sigma}$ tend vers 1 et l'on a

$$K = 4\pi k\mu.$$

C'est la formule de Coulomb.

En appelant $\frac{dU}{dn}$ la dérivée de U prise suivant la normale extérieure à $d\sigma$, cette formule équivaut à

$$\frac{dU}{dn} = -4\pi\mu.$$

584. Calcul de l'attraction d'un corps sur un point très éloigné. — Soit P (*fig.* 298) le point attiré que nous supposons très éloigné, m un point de la masse attirante de coordonnées a, b, c

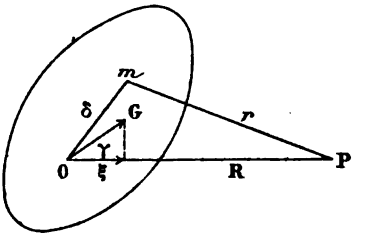
$$mP = r.$$

La fonction potentielle a pour expression

$$U = \iiint \frac{\rho\, d\tau}{r},$$

l'intégration étant étendue à tout le volume.

Fig. 298.



Prenons, dans la masse attirante, un point quelconque O comme origine des coordonnées; dans le triangle mOP on a, en posant

$$mO = \delta, \qquad \widehat{mOP} = \gamma, \qquad OP = R,$$
$$r^2 = R^2 - 2R\delta\cos\gamma + \delta^2.$$

Quand le point m occupe successivement toutes les positions dans la masse attirante, δ reste inférieur à un certain maximum; R est supposé supérieur à ce maximum.

On peut écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{\delta}{R}\cos\gamma + \frac{\delta^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développons la parenthèse par la formule du binome

$$(1-k)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k + \frac{1.3}{2.4}k^2 + \dots,$$

où

$$k = \frac{2\delta}{R}\cos\gamma - \frac{\delta^2}{R^2};$$

nous aurons, en ordonnant par rapport à $\frac{1}{R}$,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2}\cos\gamma + \frac{\delta^2}{R^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1) + \dots.$$

Dans ce développement, le coefficient de $\frac{\delta^n}{R^{n+1}}$ est un polynome en $\cos\gamma$, $P_n(\cos\gamma)$, qui se nomme *polynome de Legendre*. En nous bornant, dans ce développement, aux trois premiers termes, nous aurons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2}\cos\gamma + \frac{\delta^2}{R^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\gamma - 1) + \frac{\varepsilon}{R^4},$$

où ε reste fini quand R augmente indéfiniment. En remplaçant $\frac{1}{r}$ par cette expression dans la valeur du potentiel U, on obtient les premiers termes du développement de U suivant les puissances de $\frac{1}{R}$. Pour écrire ces premiers termes, nous imaginerons qu'on prenne OP pour axe des x : les coordonnées de m sont alors a, b, c et l'on a

$$a = \delta\cos\gamma.$$

Donc

$$U = \iiint\frac{\rho\,d\tau}{r} = \frac{1}{R}\iiint\rho\,d\tau + \frac{1}{R^2}\iiint a\rho\,d\tau + \frac{1}{2R^3}\iiint\rho(3a^2 - \delta^2)\,d\tau + \frac{h}{R^4},$$

h restant fini quand R augmente indéfiniment.

Toutes ces intégrales triples sont étendues à la masse attirante; elles ont des significations simples. La première est évidemment

la masse totale

$$\iiint \rho \, d\tau = M.$$

La deuxième a pour valeur $M\xi$, en appelant ξ l'abscisse du centre de gravité G de la masse attirante

$$\iiint a\rho \, d\tau = M\xi;$$

en effet a est l'abscisse de la masse élémentaire $\rho \, d\tau$.

Pour évaluer la troisième intégrale, remarquons que

$$\delta^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

cette intégrale est donc

$$\iiint (2a^2 - b^2 - c^2)\rho \, d\tau.$$

Or les moments d'inertie de la masse attirante par rapport au point O et à l'axe OP sont

$$\mathfrak{M}_0 = \iiint (a^2 + b^2 + c^2)\rho \, d\tau, \qquad I = \iiint (b^2 + c^2)\rho \, d\tau;$$

l'intégrale considérée est donc

$$2\mathfrak{M}_0 - 3I.$$

Le développement de U est ainsi

$$U = \frac{M}{R} + \frac{M\xi}{R^2} + \frac{2\mathfrak{M}_0 - 3I}{2R^3} + \frac{h}{R^4}, \tag{7}$$

formule fréquemment employée en Mécanique céleste.

Dans cette formule, ξ est la projection du vecteur OG sur OP. Quant à $\mathfrak{M}_0$, en appelant A, B, C les moments d'inertie de la masse attirante par rapport à trois axes rectangulaires quelconques menés par O, on a pour le moment d'inertie par rapport au point O (n° 314)

$$2\mathfrak{M}_0 = A + B + C.$$

Si l'on prend le point O au centre de gravité G, R désigne la distance GP, on a $\xi = 0$ et la formule devient

$$U = \frac{M}{R} + \frac{2\mathfrak{M}_G - 3I}{2R^3} + \frac{h}{R^4}, \tag{8}$$

où $\mathfrak{M}_G$ est le moment d'inertie de la masse par rapport au centre de gravité.

Ces formules montrent que, quand R augmente indéfiniment, le potentiel U tend vers zéro et que le produit RU tend vers M. On dit aussi que le potentiel devient nul à l'infini comme $\frac{M}{R}$.

Quand le point attiré P est très loin, on peut prendre approximativement

$$U = \frac{M}{R},$$

R désignant la distance du point P *au centre de gravité;* d'après la formule (8) l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$.

585. **Sphère pleine homogène.** — Soit une sphère pleine homogène de rayon R et de densité ρ ; sa masse totale est

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho.$$

Cherchons l'action de cette sphère sur un point P, de masse 1.

1° *Le point* P *est extérieur.* OP > R. — Si l'on décompose le volume de la sphère en couches concentriques homogènes, l'attraction de chacune de ces couches sur le point P est la même que si la masse totale de cette couche était concentrée au centre O.

L'attraction de la sphère entière, somme des attractions des diverses couches, est donc la même que si la masse totale de la sphère était concentrée au centre : elle a pour intensité

$$\frac{fM}{\overline{OP}^2} = \frac{4}{3}\pi\rho f \frac{R^3}{\overline{OP}^2}.$$

La valeur du potentiel de la sphère au point P étant la somme des potentiels des diverses couches est égale à

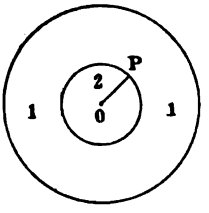
$$U = \frac{M}{OP} = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R^3}{OP}.$$

Sur la surface OP = R et le potentiel devient $\frac{4}{3}\pi\rho R^2$.

2° *Le point* P *est intérieur.* OP < R. — Divisons le volume attirant en deux parties 1 et 2 par une surface sphérique de centre O

et de rayon OP. L'action de la partie externe 1 est nulle; l'attraction de la sphère interne 2 est la même que si la masse totale

Fig. 299.



de cette sphère $\frac{4}{3}\pi\rho\,\overline{OP}^3$ était concentrée au centre : elle est donc

$$\frac{4}{3}\pi\rho f\frac{\overline{OP}^3}{\overline{OP}^2} = \frac{4}{3}\pi\rho f\overline{OP}.$$

Cette attraction varie proportionnellement à la distance.

Soit U la valeur du potentiel de la sphère en P; quand le point P subit un déplacement infiniment petit, U varie de dU et le travail de l'attraction F est $f\,dU$; d'autre part, ce travail est

$$-F\,d\overline{OP} = -\frac{4}{3}\pi\rho f\overline{OP}\,d\overline{OP};$$

Égalant ces deux valeurs, on a

$$dU = -\frac{4}{3}\pi\rho\,\overline{OP}\,d\overline{OP}.$$

$$U = -\frac{2}{3}\pi\rho\,\overline{OP}^2 + C,$$

où C est une constante indépendante de la position du point. Sur la surface, OP = R et le potentiel devient

$$-\frac{2}{3}\pi\rho R^2 + C.$$

Égalant cette valeur à la valeur $\frac{4}{3}\pi\rho R^2$ que nous avons trouvée plus haut pour le potentiel sur la surface, il vient

$$C = 2\pi\rho R^2,$$

d'où

$$U = 2\pi\rho R^2 - \frac{2}{3}\pi\rho\,\overline{OP}^2.$$

On vérifiera aisément sur cet exemple les théorèmes généraux établis précédemment. *Si le point* $P(x, y, z)$ *est extérieur à la sphère, on a*

$$\Delta U = 0;$$

s'il est intérieur,

$$\Delta U = -4\pi\rho.$$

IV. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS VÉRIFIANT L'ÉQUATION DE LAPLACE.

586. Objet de ce paragraphe. — L'équation de Laplace

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

joue un rôle très important en Physique où elle se rencontre dans les questions suivantes : l'attraction, l'électricité statique et dynamique, le magnétisme, la propagation de la chaleur, l'hydrodynamique.

Nous venons de voir, en effet, que le potentiel dû à l'attraction newtonienne, ou à l'attraction de masses électriques ou magnétiques vérifie l'équation de Laplace en dehors des masses attirantes ; en outre ce potentiel est nul à l'infini. Le flux de force se dirige dans le sens du potentiel croissant s'il s'agit de l'attraction de Newton, et dans le sens du potentiel décroissant s'il s'agit des attractions électriques ou magnétiques.

Dans la théorie de la propagation de la chaleur, d'après Fourier, on rencontre également l'équation de Laplace. Imaginons en effet un milieu conducteur de la chaleur, homogène et *isotrope*, c'est-à-dire jouissant des mêmes propriétés dans toutes les directions. Supposons ce milieu limité par des surfaces maintenues à des températures, constantes en chaque point, mais pouvant varier d'une manière continue d'un point à l'autre des surfaces limites. Il s'établit alors un équilibre de température dans ce milieu : une fois cet équilibre atteint, la température U en chaque point du milieu est une fonction des coordonnées x, y, z vérifiant l'équation $\Delta U = 0$. Les surfaces $U = \text{const.}$ s'appellent alors surfaces *isothermes*. Le flux de chaleur à travers un élément $d\sigma$ du milieu marche dans le sens des températures décroissantes et son

expression est $-k\frac{dU}{dn}d\sigma$, k étant le *coefficient de conductibilité* du milieu et $\frac{dU}{dn}$ la dérivée de U prise normalement à l'élément. Si le milieu conducteur est illimité, l'action des sources de chaleur ne se fait pas sentir à l'infini.

Enfin, en Hydrodynamique, on rencontre la même équation dans les conditions suivantes : Imaginons un liquide animé d'un mouvement permanent dans une certaine région de l'espace. Alors les molécules liquides qui passent successivement en un point géométrique déterminé x, y, z y passent avec une vitesse constamment la même : soient u, v, w les projections de cette vitesse; ces quantités sont des fonctions de x, y, z vérifiant la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{1}$$

que nous établirons plus tard. Supposons que ces vitesses dérivent d'un potentiel U, c'est-à-dire que l'on ait

$$u=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial U}{\partial z};$$

alors la fonction U est, d'après (1), assujettie à vérifier l'équation de Laplace $\Delta U=0$, dans toute la masse liquide. Les lignes de force sont ici remplacées par les trajectoires des molécules. Le flux de force à travers un élément $d\sigma$ est remplacé par le volume du liquide traversant cet élément pendant l'unité de temps

$$\frac{dU}{dn}d\sigma.$$

Chaque propriété des fonctions vérifiant l'équation $\Delta U=0$ pourra être interprétée dans ces trois ordres de phénomènes. Inversement, certaines propriétés des fonctions vérifiant cette équation peuvent devenir intuitives, suivant qu'on les interprète de l'une ou l'autre façon.

Nous allons indiquer les propriétés les plus importantes des fonctions vérifiant l'équation $\Delta U=0$, fonctions que nous appelle-

rons, pour abréger, *fonctions harmoniques*. Nous nous bornerons, *sauf mention expresse du contraire, aux fonctions uniformes.*

587. Signification de ΔU. — D'après le théorème de Green (n° 538), où l'on fait $\varphi = 1$, $\psi = U$, on a pour un volume quelconque, dans lequel U est finie ainsi que ses dérivées premières et secondes

$$\iiint_V \Delta U \, d\tau = \iint_S \frac{dU}{dn} \, d\sigma. \tag{2}$$

En particulier, si le volume V est un volume infiniment petit $d\tau$ entourant un point (x, y, z) la première intégrale comprend un seul élément et l'on a

$$\Delta U = \frac{1}{d\tau} \iint_S \frac{dU}{dn} \, d\sigma,$$

ce qui donne une signification de ΔU indépendante du choix des axes. La quantité ΔU est donc une fonction invariante pour toutes les transformations de coordonnées orthogonales : c'est, d'après Lamé, un paramètre différentiel.

Si la fonction U est harmonique dans un volume donné V et reste finie ainsi que ses dérivées premières et secondes dans ce volume, on a, d'après (2),

$$\iint_S \frac{dU}{dn} \, d\sigma = 0. \tag{3}$$

Cette dernière équation signifie que le flux à travers la surface S est nul ; c'est ce que nous avons déjà vu (n° 545).

588. Absence de maximum et de minimum. — L'équation que nous venons d'écrire permet d'établir le théorème suivant :

Une fonction harmonique, finie ainsi que ses dérivées premières et secondes dans un volume, n'a, dans ce volume, ni maximum ni minimum.

Soit P un point quelconque du volume, nous allons montrer qu'il est absurde de supposer que U est *maximum en ce point.* En effet, décrivons de P comme centre une sphère de rayon R

assez petit pour que cette sphère soit tout entière dans le volume. Le théorème précédent, appliqué à cette sphère, donne

$$\int\int_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma = 0, \tag{4}$$

l'intégrale étant étendue à la surface de la sphère et la dérivée de U étant prise suivant la normale extérieure, c'est-à-dire suivant le rayon prolongé. Cette intégrale doit être nulle quelque petit que soit R : or, si la fonction U était maximum en P, elle devrait diminuer quand on s'éloigne de P dans une direction quelconque; toutes les valeurs de $\frac{dU}{dn}$ aux divers points de la surface sphérique seraient donc négatives et la somme des produits $\frac{dU}{dn}\, d\sigma$ serait *négative* et non nulle. Il n'y a donc pas de maximum de U en P. De même, il n'y a pas de minimum.

Si U désigne un potentiel dû à l'attraction newtonienne ou à des attractions électriques ou magnétiques, le résultat précédent s'énonce ainsi : *Le potentiel n'a ni maximum ni minimum en dehors des masses attirantes.* D'après la réciproque du théorème de Dirichlet (n° 454), on voit qu'il ne peut exister de position d'équilibre stable pour un point attiré, entièrement libre, *en dehors des masses attirantes.*

Au sujet de cette réciproque, il nous faut compléter et rectifier les citations faites dans le deuxième Volume, n° 454, p. 354. La démonstration de la réciproque du théorème de Dirichlet a été donnée pour un cas très étendu par M. Liapounoff (*Journal de Mathématiques*, 1896). Elle a été donnée également par M. Hadamard dans un Mémoire présenté à l'Académie en 1896 et publié depuis dans le même Recueil (1897).

589. **Une fonction harmonique ne peut pas avoir sur une surface, sur une ligne ou dans un volume, une valeur constante plus grande ou plus petite que toutes les valeurs voisines.** — Soit, comme précédemment U, une fonction harmonique uniforme finie ainsi que ses dérivées premières et secondes dans une certaine région de l'espace. Il est impossible que, dans cette région, il existe une surface S sur laquelle U prenne une valeur constante plus grande (ou plus petite) qu'en tous les points voisins situés de part et

d'autre. En effet, s'il en était ainsi, on pourrait, d'un point quelconque A de cette surface comme centre, décrire une sphère d'un rayon assez petit pour que, sur cette sphère, $\frac{dU}{dn}$ ait un signe constant, excepté peut-être le long de la ligne d'intersection de la sphère et de la surface où $\frac{dU}{dn}$ pourrait être nul. En effet, si U, est, sur la surface, plus grand que dans le voisinage, U décroît quand on s'éloigne de A dans une direction quelconque, sauf pour les directions situées sur la surface pour lesquelles U est constant. Mais alors l'intégrale

$$\iint \frac{dU}{dn}\, d\sigma \tag{5}$$

étendue à la surface de cette sphère serait différente de zéro, car tous les éléments auraient un signe constant; ce qui est en contradiction avec l'équation (4).

On voit de même qu'il est impossible que, le long d'une ligne, U ait une valeur constante plus grande (ou plus petite) que les valeurs aux points voisins.

Enfin, il est impossible que, dans la région considérée de l'espace, il y ait un volume v dans lequel U serait constant, de telle façon que dans le voisinage immédiat de v, U soit constamment plus grand (ou plus petit) que dans v. En effet, s'il en était ainsi, en prenant un point quelconque A sur la surface s limite de v, et décrivant de ce point comme centre une sphère d'un rayon suffisamment petit, on aurait :

1° Sur la portion de surface sphérique extérieure à v, pour $\frac{dU}{dn}$ un signe constant;

2° Sur la portion intérieure $\frac{dU}{dn} = 0$.

L'intégrale (5) étendue à l'aire de cette sphère ne serait donc pas nulle, ce qui est en contradiction avec l'équation (4).

590. Fonction harmonique nulle sur une surface fermée. — On conclut, de ce qui précède, le théorème suivant :

Si une fonction harmonique U *est uniforme, finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans un volume* V, *et*

prend la valeur zéro sur la surface limite S, *elle est nulle dans tout le volume.*

En effet, si la fonction n'était pas nulle en tous les points du volume, parmi les valeurs qu'elle prendrait dans le volume il y en aurait une C qui serait ou plus grande ou plus petite que toutes les autres. Le lieu des points pour lesquels on aurait

$$U = C$$

se composerait ou de points isolés, ou de lignes, ou de surfaces, ou de volumes. Dans le premier cas, la fonction serait maximum ou minimum en un point, ce qui est impossible. Dans les autres cas, la fonction aurait, sur une ligne, une surface ou, dans un volume, une valeur constante plus grande (ou plus petite) que toutes les valeurs voisines; ce qui est également impossible. Donc la fonction U est *nulle.*

Dans ce théorème, le volume considéré V a une forme quelconque : par exemple, la forme d'un tore, ou du volume compris entre une sphère et une sphère intérieure, etc.

Cas d'un volume indéfini. — Un théorème analogue a lieu pour les fonctions harmoniques à l'extérieur d'une surface fermée donnée :

Si une fonction harmonique U *reste finie ainsi que ses dérivées premières et secondes à l'extérieur d'une surface fermée donnée* Σ, *si de plus cette fonction prend la valeur zéro sur* Σ *et s'annule à l'infini, la fonction* U *est nulle dans tout l'espace considéré.*

En effet, si la fonction U n'était pas constante dans le volume indéfini considéré, il existerait dans ce volume soit des points, soit des lignes ou des surfaces, soit des volumes où la fonction prendrait une valeur constante plus grande (ou plus petite) que les valeurs voisines. Ce qui est impossible. Donc U = o dans tout le volume.

Conséquence :

Si deux fonctions harmoniques U_1 *et* U_2 *finies ainsi que leurs dérivées premières et secondes dans un volume donné* V

prennent sur la surface limite les mêmes valeurs, elles sont identiques dans l'intérieur du volume.

En effet, la différence $U_1 - U_2$ est une fonction harmonique finie ainsi que ses dérivées dans le volume V et s'annulant sur la surface. D'après le théorème précédent, cette différence est *nulle* dans tout le volume.

Un théorème analogue a lieu pour un volume indéfini situé à l'extérieur d'une surface fermée Σ, à condition que $U_1 - U_2$ s'annule sur la surface Σ et à l'infini.

591. Une fonction harmonique uniforme finie et déterminée ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes en tous les points de l'espace, à distance finie ou infinie, est une constante. — Imaginons une fonction harmonique U, finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans tout l'espace, et prenant une valeur finie déterminée quand le point x, y, z s'éloigne indéfiniment suivant une loi quelconque. Cette fonction $U(x, y, z)$, si elle n'est pas constante, a nécessairement un maximum et un minimum. Le maximum, par exemple, peut être atteint à l'infini; mais alors le minimum est à distance finie. Soit C la valeur minimum de U. Le lieu des points tels que $U(x, y, z) = C$ peut se composer de points isolés, ou de lignes, ou de surfaces, ou de volumes. Mais cela est impossible, d'après les théorèmes des n°s 588 et 589; la fonction est donc une constante.

592. Détermination d'une fonction harmonique par ses valeurs sur une surface; théorème d'existence. — Nous avons vu (n° 590) que si deux fonctions harmoniques dans un volume V, finies ainsi que leurs dérivées premières et secondes, prennent les mêmes valeurs sur la surface limite S, elles sont identiques. Cela revient à dire qu'il n'existe pas deux fonctions harmoniques prenant des valeurs données sur une surface fermée et remplissant à l'intérieur les conditions indiquées. Mais on est alors conduit à se demander s'il existe toujours une fonction harmonique prenant sur la surface des valeurs données à l'avance. La réponse est fournie par le théorème suivant :

Il existe une fonction harmonique uniforme finie ainsi que

ses dérivées premières et deuxièmes dans le volume V *et prenant, sur la surface* S, *des valeurs données à l'avance se succédant d'une manière continue.*

On peut se rendre compte de ce fait par des considérations physiques. En effet, regardons le volume V comme un milieu homogène et isotrope conducteur de la chaleur; maintenons les divers points de la surface S à une température constante pour chaque point, mais variant arbitrairement d'un point à l'autre. Il s'établit alors, dans l'intérieur du volume, une température stationnaire. Cette température est une fonction $U(x, y, z)$ qui prend les valeurs données sur la surface et qui, comme l'a montré Fourier, est harmonique dans le volume.

Cas d'un volume indéfini. — Supposons que le volume V s'étende à l'infini et comprenne toute la partie de l'espace extérieure à des surfaces fermées données dont l'ensemble constitue la surface limite S. *Il existe encore une et une seule fonction harmonique dans* V, *finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans* V, *prenant sur la surface limite* S *des valeurs données et s'annulant à l'infini.*

L'existence de cette fonction résulte des mêmes considérations physiques que pour le cas d'un volume fini.

593. **Principe de Dirichlet.** — Pour démontrer mathématiquement l'existence d'une fonction harmonique répondant aux conditions indiquées ci-dessus, Dirichlet emploie un raisonnement qui repose sur le principe suivant :

Soit une fonction quelconque $\varphi(x, y, z)$ (harmonique ou non) finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans le volume V et prenant sur la surface S les valeurs données : soit, d'autre part, l'intégrale triple essentiellement positive

$$I = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau,$$

étendue au volume. Dirichlet regarde comme évident que, *parmi les fonctions* φ *en nombre infini remplissant les conditions indiquées, il en est une* U *qui rend l'intégrale* I *minimum;* puis il fait voir que cette fonction U réalisant le minimum est *harmonique,* ce qui démontre le théorème. Mais Weierstrass a montré, dans une critique approfondie des principes du calcul des variations, qu'il n'est pas permis d'affirmer *a priori* l'existence d'une fonction U remplissant les conditions indiquées à l'inté-

rieur et sur la surface, et rendant l'intégrale I minimum : on peut seulement affirmer qu'il existe pour l'intégrale I une limite inférieure dont elle s'approche autant qu'on le veut par un choix convenable de la fonction φ, mais qui n'est pas nécessairement atteinte effectivement pour une détermination spéciale de φ remplissant toutes les conditions exigées.

Un théorème d'existence du même genre, fondé sur le même raisonnement et relatif à des fonctions de deux variables, a été employé par Riemann dans la théorie des fonctions d'une variable complexe qui se rattache à celle du potentiel logarithmique (*voir* la fin du Chapitre).

On possède actuellement des démonstrations mathématiques rigoureuses du théorème d'existence tant pour le cas de deux que de trois ou même de n variables. Citons entre autres les travaux de M. Schwarz (*Œuvres complètes*, t. II), de Christoffel (*Annali di Matematica*, 1870), de M. Harnack (*Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales*, Leipzig, 1887), de M. Painlevé (*Comptes rendus*, t. CXII, 1891).

Pour l'espace, C. Neumann a donné une méthode appelée *Methode des arithmetischen Mittels* (*Allgemeine Untersuchungen über das Newtonsche Princip der Fernewirkung*, Leipzig, 1877); cette méthode a été étendue par C. Neumann lui-même au cas de deux variables et par M. Riquier au cas de n variables (*Thèse de Doctorat*, Paris, 1886). Une méthode qu'il faut rapprocher de celle de C. Neumann, est la méthode donnée par Robin dans sa *Thèse de Doctorat*, insérée aux *Annales de l'École Normale* (1886). Enfin M. Poincaré a indiqué une méthode dite *méthode du balayage* (*American Journal*, t. XII, 1890).

Ces méthodes ne se bornent pas à prouver l'existence de la fonction harmonique, elles en donnent des expressions approchées.

Il nous est impossible d'entrer ici dans les développements mathématiques que comportent ces théories.

594. Cas où $\frac{dU}{dn}$ est nul sur une surface fermée. — Soient une surface fermée S, U *une fonction harmonique uniforme*, finie ainsi que ses dérivées premières et secondes dans le volume V limité par cette surface; *si* $\frac{dU}{dn}$ *est nul en tous les points de la surface* S, U *est constant dans le volume*. Appliquons, en effet, à ce volume la formule de Green (n° 536) en faisant

$$\psi = \varphi = U(x, y, z).$$

Nous aurons

$$(6)\qquad \begin{cases} \iiint_V U\,\Delta U\,d\tau \\ \quad + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = \iint_S U \frac{dU}{dn}\,d\sigma. \end{cases}$$

Or, actuellement, $\Delta U = 0$ dans le volume et $\frac{dU}{dn} = 0$ sur la surface. Donc on a

$$(7) \qquad \iiint_V \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

Si U n'était pas constant dans V, ses trois dérivées partielles ne seraient pas nulles, et cette dernière intégrale ayant tous ses éléments positifs ne serait pas nulle. Donc U est constant.

Par exemple, si dans un champ de force créé par des attractions newtoniennes, électriques ou magnétiques, il existait un tube de forces fermé, comme un tore, ne contenant aucune masse agissante et tel que le potentiel U soit *uniforme* dans son intérieur, le potentiel serait nécessairement *constant* dans tout le tube, car en tous les points de la surface du tube on a $\frac{dU}{dn} = 0$.

Conséquence. — Si dans un volume V deux fonctions harmoniques uniformes U_1 et U_2 sont finies ainsi que leurs dérivées premières et secondes, et si, sur la surface, $\frac{dU_1}{dn}$ est égal à $\frac{dU_2}{dn}$, la différence $U_1 - U_2$ est *constante* dans le volume, car cette différence est une fonction harmonique U remplissant les conditions précédentes.

Remarque. — L'équation (6) peut servir également à établir le théorème du n° 590, car si la fonction harmonique U est nulle sur S, on a encore l'équation (7) : donc U est constante dans V, et comme elle est nulle sur S, elle est nulle dans V.

595. Détermination d'une fonction harmonique U dans un volume, quand on connaît U et $\frac{dU}{dn}$ sur la surface. — Soient dans un volume limité V deux fonctions uniformes U et U′ de x, y, z finies ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres et vérifiant chacune l'équation de Laplace; la formule de Green (n° 536) où $\varphi = U$, $\psi = U'$, devient

$$(8) \qquad \iint_S \left(U' \frac{dU}{dn} - U \frac{dU'}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

l'intégration étant étendue à la surface qui limite le volume con-

sidéré, et $\frac{dU}{dn}$, $\frac{dU'}{dn}$ désignant les dérivées prises suivant la normale extérieure à cette surface.

Si l'une ou l'autre des fonctions cessait de remplir les conditions de continuité indiquées, la formule devrait être modifiée.

Supposons, par exemple, que $U(x, y, z)$ vérifie dans le volume V les conditions indiquées, mais prenons pour U′ la fonction

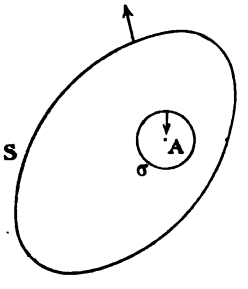
$$U' = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

a, b, c désignant les coordonnées d'un point fixe A situé dans le volume V. Cette fonction U′ de x, y, z vérifie l'équation

$$\Delta U' = 0,$$

mais elle cesse d'être continue au point A. Entourons le point A d'une sphère σ de centre A et de très petit rayon, et considérons

Fig. 300.



la portion du volume V extérieure à cette sphère. Dans ce nouveau volume, U′ est continue : les surfaces limitant ce nouveau volume se composent de la surface S limitant V et de la sphère σ.

On a donc, en appliquant la formule générale (8) au nouveau volume ainsi limité

$$(9) \qquad \int\int_S \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma + \int\int_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

la première intégrale étant étendue à la surface S limitant le volume primitif et la seconde à la sphère σ : les dérivées sont prises suivant les normales extérieures au volume, c'est-à-dire extérieures à la surface S et intérieures à la sphère σ.

La première intégrale étant évidemment indépendante du rayon de la sphère σ, il en est de même de la seconde. Dans cette seconde intégrale, le premier terme s'écrit

$$\frac{1}{r}\int\int_{\sigma}\frac{dU}{dn}\,d\sigma,$$

car r est constant sur la surface σ et égal au rayon de la sphère ; d'autre part

$$\int\int_{\sigma}\frac{dU}{dn}\,d\sigma = 0,$$

car U est continue dans la sphère. Quant au deuxième terme

$$-\int\int_{\sigma} U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma,$$

on le calcule comme il suit : La normale intérieure à la sphère σ coïncide avec le rayon; la longueur dn d'un élément de normale intérieure est $-dr$ et

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{d\frac{1}{r}}{dr} = \frac{1}{r^2}.$$

L'intégrale ci-dessus est donc, en appelant r le rayon de la sphère σ,

$$-\frac{1}{r^2}\int\int_{\sigma} U(x, y, z)\,d\sigma.$$

En prenant des coordonnées polaires d'origine A, on a, sur la sphère σ de centre A et de rayon r,

$$\begin{aligned} x &= a + r\sin\theta\cos\varphi,\\ y &= b + r\sin\theta\sin\varphi,\\ z &= c + r\cos\theta,\\ d\sigma &= r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi; \end{aligned}$$

l'intégrale est donc

$$-\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} U(a + r\sin\theta\cos\varphi,\ b + r\sin\theta\sin\varphi,\ c + r\cos\theta)\sin\theta\,d\theta.$$

Cette intégrale étant indépendante du rayon r de la sphère, nous aurons sa valeur en faisant tendre r vers *zéro* : on trouve

ainsi

$$-4\pi U(a, b, c).$$

La formule (9) devient donc

$$U(a,b,c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma. \tag{10}$$

Elle donne la valeur de la fonction harmonique U en un point (a, b, c) intérieur au volume quand on connaît les valeurs de U et $\frac{dU}{dn}$ sur la surface limite S.

Mais, comme il résulte du théorème d'existence, les valeurs de U et $\frac{dU}{dn}$ ne peuvent pas être prises, en même temps, arbitrairement.

Cas d'un volume indéfini. — Supposons que le volume V soit indéfini et se compose de la région de l'espace *extérieure* à une surface fermée Σ. La même formule s'applique pourvu que la fonction U et ses dérivées deviennent nulles à l'infini de telle façon que les produits RU, $R^2\frac{\partial U}{\partial x}$, $R^2\frac{\partial U}{\partial y}$, $R^2\frac{\partial U}{\partial z}$ restent finis quand x, y, z deviennent infinis, R ayant pour valeur $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; la dérivée $\frac{dU}{dn}$ figurant dans la formule doit toujours être prise vers l'extérieur du volume V.

En effet, décrivons de O comme centre, une sphère Σ′ avec un rayon R assez grand pour que la surface limite Σ soit dans cette sphère. Considérons le volume V′ extérieur à Σ et intérieur à Σ′ et appelons (a, b, c) un point de ce volume. La formule (10) s'applique à condition de regarder comme surface S limitant le volume V′ l'ensemble des surfaces Σ et Σ′. On peut donc écrire

$$\left\{\begin{aligned} U(a,b,c) = {} & \frac{1}{4\pi}\int\int_\Sigma \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma \\ & + \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma'} \left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

où la première intégrale est étendue à la surface Σ, la seconde à la sphère Σ′ : r est la distance du point a, b, c à l'élément $d\sigma$.

Si maintenant on fait croître R, rayon de Σ′, indéfiniment, la dernière intégrale tend vers zéro. En effet, en appelant α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à Σ′, on a

$$\frac{dU}{dn} = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma \frac{\partial U}{\partial z};$$

d'autre part, comme nous l'avons vu précédemment (n° 555), on a

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{1}{r^2}\cos\theta,$$

θ désignant l'angle de la normale extérieure à la surface en un point $d\sigma$ avec la droite $r = \mathrm{P}\,d\sigma$. Enfin

$$d\sigma = \mathrm{R}^2\,d\omega,$$

$d\omega$ étant l'ouverture du cône de sommet O et de base $d\sigma$. La deuxième intégrale est donc

$$\frac{1}{4\pi \mathrm{R}}\iint \frac{\mathrm{R}}{r}\left(\mathrm{R}^2\frac{dU}{dn} - \frac{\mathrm{R}}{r}\mathrm{RU}\cos\theta\right)d\omega.$$

Quand R augmente indéfiniment, $\mathrm{R}^2\frac{dU}{dn}$ et RU restent finis, le rapport $\frac{\mathrm{R}}{r}$ tend vers 1. La quantité sous le signe d'intégration reste donc finie; mais le premier facteur $\frac{1}{4\pi \mathrm{R}}$ tend vers zéro. Le produit tend donc bien vers zéro.

La formule (11) donne alors une formule identique à (10), avec cette différence que le point (a, b, c) est extérieur à Σ :

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{U}(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - \mathrm{U}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma,$$

les dérivées étant prises en suivant la normale *intérieure* à Σ. Si l'on prend les dérivées vers l'*extérieur* de Σ, il faut *changer le signe* du deuxième membre.

596. Première application. — *La valeur moyenne d'une fonction harmonique sur une sphère est égale à sa valeur au*

centre. — Supposons, dans la formule générale qui précède, que S soit une sphère ayant pour centre le point (a, b, c). Alors sur cette sphère r est constant; de plus $\frac{d\frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{r^2}$, car la normale extérieure dn est égale à l'accroissement infiniment petit dr du rayon. La formule devient alors

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi r}\int\int_S \frac{dU}{dn}\,d\sigma - \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_S U\,d\sigma.$$

Mais U étant, par hypothèse, finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans la sphère S, on a (n° 587)

$$\int\int_S \frac{dU}{dn}\,d\sigma = 0.$$

Donc

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi r^2}\int\int_S U\,d\sigma,$$

ce qui démontre le théorème, car le deuxième membre est ce qu'on appelle *valeur moyenne de* U sur la surface de la sphère.

597. Deuxième application. Couches de niveau. — Imaginons un système de masses attirantes dont le potentiel soit U. Puis considérons une *surface de niveau* fermée Σ comprenant toutes les masses attirantes à son intérieur. Soit $U = C$ l'équation de cette surface. Distribuons sur Σ une simple couche dont la densité en chaque point ait pour valeur

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{dU}{dn},$$

la dérivée étant prise normalement à Σ vers l'*extérieur*. On obtient ainsi ce qu'on appelle une *couche de niveau :* cette couche a les propriétés suivantes :

L'attraction de cette couche sur un point extérieur est la même que celle des masses attirantes données. Son attraction sur un point intérieur est nulle.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer que, si l'on appelle U′ le potentiel de cette couche Σ :

1° *A l'extérieur de* Σ, U′ *est égal à* U ;

2° *A l'intérieur de* Σ, U′ *est constant.*

En effet, prenons d'abord un point P(a, b, c) *extérieur* à la couche. Le potentiel U′ de Σ en ce point est

$$U'(a, b, c) = \int\int_{\Sigma} \frac{\mu}{r}\, d\sigma = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma} \frac{1}{r}\frac{dU}{dn}\, d\sigma.$$

r étant la distance de P à l'élément $d\sigma$. Mais d'après la formule (12) du n° 595, on a, puisque les dérivées sont prises vers l'*extérieur* de Σ,

$$U(a, b, c) = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{dU}{dn} - U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma.$$

On en déduit

$$U'(a, b, c) = U(a, b, c) - \frac{1}{4\pi}\int\int_{\Sigma} U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma.$$

La dernière intégrale est *nulle;* en effet, sur Σ, U = C; cette intégrale est donc

$$C\int\int_{\Sigma}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\, d\sigma,$$

c'est-à-dire zéro, car le point P(a, b, c) est en dehors de Σ (n° 555). On a donc bien

$$U'(a, b, c) = U(a, b, c);$$

ce qu'il fallait démontrer.

Il est facile de voir maintenant que, dans Σ, U′ est constant. En effet, le potentiel U′ de la couche Σ est continu dans tout l'espace et vérifie partout l'équation $\Delta U' = 0$, excepté sur la couche. Comme à l'extérieur U′ est identique à U, on a, sur la couche, U′ = C.

La fonction U′ — C est alors, dans l'intérieur de Σ, une fonction harmonique finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes, de plus cette fonction s'annule sur Σ : elle est donc nulle dans Σ.

Ce théorème et d'autres du même genre, mais plus généraux, ont été découverts par Green et retrouvés d'une autre façon par

Chasles. Il constitue une sorte de réciproque du théorème du n° 583.

598. Fonction de Green. — Si l'on connaît la valeur de la fonction harmonique U sur une surface fermée S, cette fonction est, d'après le théorème d'existence, entièrement déterminée à l'intérieur, en admettant qu'elle y soit finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes. La formule précédente ne permet pas de la calculer en un point intérieur, car cette formule exige la connaissance de U et $\frac{dU}{dn}$ sur la surface. Elle ne permet donc pas de résoudre le problème de Dirichlet. Mais Green a fait la remarque que cette formule permettrait de résoudre le problème de Dirichlet si l'on connaissait, pour la surface S, une fonction harmonique spéciale qu'on a appelée *fonction de Green*. Cette fonction $G(x, y, z; a, b, c)$ est assujettie aux conditions suivantes :

1° Elle est harmonique dans le volume V limité par S;

2° Elle est, dans ce volume, finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes;

3° Elle prend sur la surface S les mêmes valeurs que la fonction $\frac{1}{r}$, r désignant la distance d'un point de la surface au point intérieur a, b, c.

D'après le théorème d'existence, cette fonction existe et est unique. Supposons qu'on la connaisse. On a alors, comme U et G sont finies dans V ainsi que leurs dérivées,

$$\int\int_S \left(G\frac{dU}{dn} - U\frac{dG}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

Retranchons cette formule du deuxième membre de la relation (10), en nous rappelant que, sur la surface S, la fonction G est égale à $\frac{1}{r}$; les termes en $\frac{dU}{dn}$ disparaissent, et il vient

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S U\left(\frac{dG}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma, \tag{13}$$

formule qui permet de calculer U dans le volume quand cette fonction est connue sur la surface.

Cas d'un volume indéfini. — On peut de même résoudre le

problème de Dirichlet pour un volume indéfini extérieur à une surface fermée Σ quand on connaît la fonction de Green pour un point (a, b, c) extérieur à Σ. Cette fonction G est alors assujettie à être harmonique dans le volume extérieur à Σ, à rester finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans ce volume, à devenir à l'infini nulle comme $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, enfin à prendre sur Σ les mêmes valeurs numériques que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

599. **Fonction de Green dans le cas de la sphère.** — Supposons que S soit une sphère de rayon R; soient P un point intérieur de coordonnées a, b, c et P′ le conjugué harmonique de P par rapport aux deux extrémités du diamètre OP; désignons par r et r' les distances d'un point quelconque de l'espace aux points P et P′; on a, comme on l'a vu au n° 566,

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{OP}\frac{1}{r'}, \tag{14}$$

sur toute la sphère. La fonction de Green pour l'intérieur de la sphère est alors

$$G(x, y, z; a, b, c) = \frac{R}{OP}\frac{1}{r'}.$$

En effet, cette fonction est harmonique; elle est continue ainsi que ses dérivées dans la sphère, car le point P′ est extérieur; enfin, sur la sphère, elle prend les mêmes valeurs que $\frac{1}{r}$ d'après la relation (14).

On a donc, en remplaçant G par son expression actuelle et faisant $OP = l$, $OP' = l'$:

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int_S U\left(\frac{R}{l}\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)d\sigma.$$

Soient A un point de la surface sphérique, θ et θ′ les angles de la normale extérieure, prolongement de OA, avec les droites AP et

AP′, on a (n° 555)

$$\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} = \frac{1}{r'^2}\cos\theta', \qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dn} = \frac{1}{r^2}\cos\theta;$$

en outre les deux triangles OAP et OAP′ donnent

$$l^2 = R^2 + r^2 + 2Rr\cos\theta,$$
$$l'^2 = R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos\theta';$$

comme on a

$$l' = \frac{R^2}{l}, \qquad r' = \frac{R}{l}r,$$

la deuxième relation devient

$$R^2 = l^2 + r^2 + 2rl\cos\theta';$$

donc, en retranchant,

$$l^2 - R^2 = r(R\cos\theta - l\cos\theta')$$

et enfin

$$\frac{R^2 - l^2}{Rr^3} = \frac{R}{l}\frac{\cos\theta'}{r'^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}.$$

La formule trouvée peut donc s'écrire

$$U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R}\int\int_S \frac{(R^2 - l^2)U}{r^3}\,d\sigma. \tag{14}$$

Le problème de Dirichlet est ainsi résolu pour une sphère.

600. Application. — *Si une fonction harmonique uniforme* $U(x, y, z)$ *est finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes en tous les points de l'espace, et si sa valeur absolue reste en tous les points de l'espace inférieure à une limite fixe* L, *cette fonction se réduit à une constante* (1).

De l'origine comme centre, avec un rayon R, décrivons une sphère : puis appliquons la formule (14) d'abord en supposant le point (a, b, c) dans une position quelconque dans la sphère; puis en supposant ce point à l'origine, ce qui donne pour la valeur U_0 de U à l'origine

$$U_0 = \frac{1}{4\pi R}\int\int_S \frac{U}{R}\,d\sigma, \tag{15}$$

(1) Voyez *Traité d'Analyse* de M. PICARD, t. I, p. 152.

car P étant en O, $r = R$, $l = 0$. On a donc, en retranchant,

$$U_0 - U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi R}\int\int_S \left(\frac{1}{R} - \frac{R^2 - l^2}{r^3}\right) U\, d\sigma.$$

Or l'élément superficiel $d\sigma$ de la sphère de rayon R est égal à $R^2\, d\omega$, $d\omega$ désignant l'ouverture du cône de sommet O et de base $d\sigma$ et l'on a

$$U_0 - U(a, b, c) = \frac{1}{4\pi}\int\int \left[1 - \frac{(R^2 - l^2)R}{r^3}\right] U\, d\omega.$$

L'intégrale du deuxième membre a, d'après cela, une valeur fixe indépendante de R. Nous allons montrer que cette valeur est *nulle*.

En effet, faisons croître R indéfiniment, le rapport $\frac{R}{r}$ tend vers 1 pour tous les points de la sphère, car le point P reste fixe; donc le facteur

$$1 - \frac{(R^2 - l^2)R}{r^3}$$

tend vers zéro; d'ailleurs U reste, en valeur absolue, moindre qu'un nombre fixe L. L'intégrale tend donc vers zéro, et comme elle est constante elle est rigoureusement nulle. On a ainsi

$$U(x, y, z) = U_0;$$

la fonction U, en un point quelconque, a la même valeur qu'à l'origine: elle est constante.

601. Propriétés caractéristiques du potentiel d'un système de masses continues. — Soient des masses continues occupant un volume formé d'un ou de plusieurs morceaux distincts limités par des surfaces fermées. Le potentiel de ces masses est une fonction U qui remplit les conditions suivantes :

1° La fonction U est finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans tout l'espace;

2° Elle s'annule à l'infini;

3° Elle vérifie l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ en dehors des masses attirantes et l'équation de Poisson $\Delta U = -4\pi\rho$ dans les masses attirantes.

Ces propriétés caractérisent le potentiel. — Si par un procédé quelconque on a trouvé une fonction $U_1(x, y, z)$ possédant les trois propriétés indiquées, on peut affirmer qu'elle est identique au potentiel U.

En effet, la différence $U_1 - U$ est finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans tout l'espace, et *elle vérifie partout l'équation de Laplace,* car, dans les masses attirantes, on a $\Delta U_1 = -4\pi\rho$, $\Delta U = -4\pi\rho$, donc $\Delta(U_1 - U) = 0$.

D'après le théorème du n° 591, la fonction $U_1 - U$ est *constante,* et, comme elle est nulle à l'infini, elle est *nulle partout.* Donc $U_1 = U$.

602. Application au calcul du potentiel d'un ellipsoïde homogène. — Comme application, nous exposerons la méthode donnée par Dirichlet dans le Tome 32 du *Journal de Crelle,* pour obtenir le potentiel d'un ellipsoïde homogène de densité ρ.

Soit l'ellipsoïde homogène dont la surface a pour équation

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

1° Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point donné P de l'espace *extérieur* à l'ellipsoïde, c'est-à-dire tel que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 > 0.$$

Dans ces conditions, l'équation suivante en u

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0, \tag{16}$$

admet *une et une seule racine positive;* en effet, si dans le premier membre de cette équation on fait croître u de 0 à ∞, ce premier membre part d'une valeur positive et décroît constamment pour arriver finalement à la valeur -1 : il s'annule donc une et une seule fois. Nous désignerons par u la racine positive unique de l'équation (16). Cette racine est une fonction de x, y, z qui s'annule quand le point P vient sur la surface de l'ellipsoïde et devient infinie quand le point P s'éloigne indéfiniment dans une direction quelconque.

Cela posé, le potentiel U au point extérieur P est donné par

$$U = \pi abc\rho \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \tag{17}$$

où l'on pose pour abréger

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda).$$

2° Supposons maintenant le point P intérieur à l'ellipsoïde; le potentiel U au point P est donné par

$$(18) \qquad U = \pi abc\rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

3° Si le point P est sur l'ellipsoïde, les deux formules se raccordent, car $u = 0$.

Démonstration. — Nous allons montrer que la fonction U ainsi définie possède les propriétés caractéristiques du potentiel.

Différentions U par rapport à x, nous aurons :

1° Si le point est extérieur (formule 17)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi abc\rho x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} - \pi abc\rho \left(1 - \frac{x^2}{a^2+u} - \frac{y^2}{b^2+u} - \frac{z^2}{c^2+u}\right) \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x}$$

où le second terme provient de ce que la limite inférieure u est fonction de x. Mais ce second terme est *nul* puisque u vérifie, par hypothèse, l'équation (16). On a donc

$$(19) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi abc\rho x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

2° Si le point est intérieur (formule 18) on a de même

$$(20) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = -2\pi abc\rho x \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

On calculerait de même $\frac{\partial U}{\partial y}$ et $\frac{\partial U}{\partial z}$. On voit, d'après ces formules, que la fonction U et ses dérivées sont continues dans tout l'espace.

Calculons, de même, les dérivées deuxièmes :

1° Si le point est extérieur, on a, en différentiant la formule (19) et se rappelant que u est fonction de x,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2\pi abc\rho \left[-\int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}} + \frac{x}{a^2+u} \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

Calculant de même $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ et ajoutant, on a

$$\Delta U = 2\pi abc\rho\left[-\int_u^\infty \left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} + \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\left(\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right].$$

On a, pour l'intégrale indéfinie,

$$\int\left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = -\frac{2}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}; \tag{21}$$

donc l'intégrale définie de u à ∞ est $\frac{2}{\sqrt{\varphi(u)}}$ et l'on a

$$\Delta U = 2\pi abc\rho\left(\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z}-2\right)\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}.$$

Cette quantité est nulle; en effet, dérivons successivement l'équation (16) par rapport à x, y, z, nous aurons

$$\frac{2x}{a^2+u}-\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\frac{2y}{b^2+u}-\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\frac{2z}{c^2+u}-\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

Ajoutons ces équations après avoir multiplié la première par $\frac{x}{a^2+u}$, la deuxième par $\frac{y}{b^2+u}$, la troisième par $\frac{z}{c^2+u}$, nous pourrons diviser le résultat par $\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}$ et nous verrons que

$$\Delta U = 0.$$

2° Si le point est intérieur, on a, en différentiant la formule (20),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2\pi abc\rho\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}};$$

calculant de même $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ et ajoutant, on a

$$\Delta U = -2\pi abc\rho\int_0^\infty \left(\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

L'intégrale indéfinie est $-\frac{2}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$ et l'intégrale définie $\frac{2}{abc}$: donc, à l'intérieur

$$\Delta U = -4\pi\rho.$$

Enfin la fonction U, donnée par (17), s'annule à l'infini, car u est infini à l'infini.

La fonction U définie par les formules (17) et (18) est donc le potentiel de l'ellipsoïde.

603. **Ellipsoïde de révolution aplati.** — Supposons, en particulier, que l'ellipsoïde soit engendré par la révolution d'une ellipse d'axes a et b, $a > b$ autour du petit axe. Alors, en prenant l'axe de révolution pour axe Oz, il faut dans les formules précédentes remplacer b par a et c par b. Donc :

Point extérieur,

$$U = \pi a^2 b \rho \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{b^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}$$

où

$$\varphi(\lambda) = (a^2+\lambda)^2(b^2+\lambda),$$

u étant la racine positive de

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{b^2+u} = 1.$$

Point intérieur ou sur la surface,

$$U = \pi a^2 b \rho \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda} - \frac{z^2}{b^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Calculons cette dernière intégrale. On a

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{b^2+\lambda}} = \frac{2}{c}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{c}\right] = \frac{2}{c}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}} = -\frac{1}{c^2}\frac{b}{c^2+b^2} + \frac{1}{c^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b},$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{c^2 b} - \frac{2}{c^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{b},$$

comme on le voit facilement en faisant

$$b^2 - \lambda = t^2$$

et posant

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

D'après cela, si l'on pose $\frac{c}{b} = k$, d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2(1 + k^2)$$

on a, pour un point intérieur à l'ellipsoïde ou situé sur sa surface,

$$U = \frac{2\pi\rho(1+k^2)}{k^3} \times \left[k^2 b^2 \operatorname{arc\,tang} k - \frac{1}{2}(x^2+y^2)\left(\operatorname{arc\,tang} k - \frac{k}{1+k^2}\right) - z^2(k - \operatorname{arc\,tang} k)\right].$$

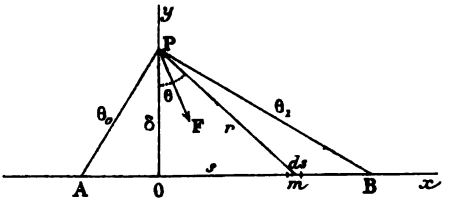
Les composantes de l'attraction sur un point de masse 1 placé soit à l'intérieur, soit sur la surface sont alors données par les trois dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ multipliées par f.

V. — MASSES ATTIRANTES ILLIMITÉES. — POTENTIEL LOGARITHMIQUE.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les masses attirantes limitées. Si nous les supposons illimitées, le mot *attraction* peut ne plus avoir de sens. Nous allons passer d'abord en revue quelques cas particuliers où l'attraction a encore un sens.

604. Attraction d'une droite homogène indéfinie sur un point P. — Considérons une droite matérielle homogène AB (*fig.* 301); soit h la masse de l'unité de longueur, soit P un point attiré par les différents éléments de cette droite. Nous allons démontrer que l'attraction de la droite sur le point P tend vers une limite lorsque A et B

Fig. 301.



s'éloignent indéfiniment et que cette limite est indépendante de la façon dont les points A et B s'éloignent à l'infini.

De P abaissons une perpendiculaire PO sur la droite AB.

Soient $PO = \delta$; s la longueur Om comptée à partir de O pris pour origine; ds un élément de la droite placé en m; μ la masse de P; $r = Pm$; ds a pour masse $h\,ds$. L'attraction de ds sur P a pour expression

$$\frac{f\mu h\,ds}{r^2},$$

Soit $\theta = \widehat{OPm}$. Nous avons

$$s = \delta \tang\theta, \qquad r = \frac{\delta}{\cos\theta}.$$

En différentiant,

$$ds = \frac{\delta}{\cos^2\theta}\,d\theta, \qquad \frac{ds}{r^2} = \frac{d\theta}{\delta};$$

l'attraction élémentaire a donc pour expression

$$\frac{f\mu h\,d\theta}{\delta}.$$

Les projections de cette attraction sur Ox et Oy sont

$$\frac{f\mu h}{\delta}\sin\theta\,d\theta, \qquad -\frac{f\mu h}{\delta}\cos\theta\,d\theta.$$

Soient θ_0 et θ_1 les angles correspondant aux points A et B. Nous aurons pour expressions des projections sur les deux axes de l'attraction de la droite limitée AB

$$X = \frac{f\mu h}{\delta}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\sin\theta\,d\theta,$$

$$Y = \frac{f\mu h}{\delta}\int_{\theta_0}^{\theta_1}(-\cos\theta\,d\theta),$$

ou

$$X = -\frac{f\mu h}{\delta}(\cos\theta_1 - \cos\theta_0),$$

$$Y = -\frac{f\mu h}{\delta}(\sin\theta_1 - \sin\theta_0).$$

On vérifie facilement que cette attraction est égale à celle qu'exer-

cerait, sur le même point P, un arc de cercle homogène ayant pour centre P, pour rayon δ, pour densité linéaire h, et limité aux deux droites PA et PB. Si A s'éloigne à l'infini à gauche, B à l'infini à droite, θ_0 tend vers $-\frac{\pi}{2}$, θ_1 vers $+\frac{\pi}{2}$, et nous avons

$$X = 0, \qquad Y = -\frac{2f\mu h}{\delta}$$

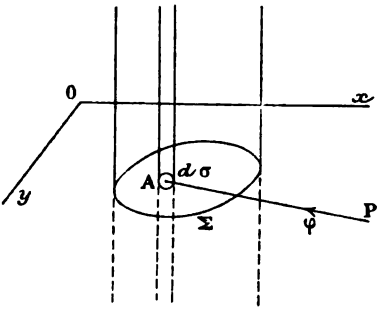
L'attraction devient perpendiculaire à la droite : elle varie en raison inverse de la distance du point à la droite.

605. Attraction d'un cylindre indéfini à base finie sur un point. — L'attraction d'un cylindre indéfini sur un point a un sens, si l'on suppose la densité ρ constante tout le long d'une parallèle aux génératrices du cylindre.

Soit P (*fig.* 302) le point attiré de masse 1. Menons par ce point la section droite Σ du cylindre.

Soit $d\sigma$ un élément de cette section droite placé en A : le cylindre droit élémentaire indéfini ayant pour base $d\sigma$ peut être regardé

Fig. 302.



comme une droite homogène, dont la densité linéaire, masse de l'unité de longueur, est $h = \rho\, d\sigma$. D'après ce que nous avons vu plus haut, l'attraction φ de ce cylindre élémentaire sur P est dirigée suivant PA et égale à $\frac{2f\rho\, d\sigma}{PA}$.

Pour connaître l'attraction du cylindre en tous les points de l'espace, il suffit évidemment de calculer l'attraction sur un point P qui occupe successivement toutes les positions possibles dans le

plan d'une section droite Σ. Prenons dans le plan de la section droite Σ deux axes rectangulaires Ox et Oy.

Soient x et y les coordonnées de P; a et b celles de A; et r la distance PA

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Les projections de l'attraction élémentaire φ sur les axes Ox et Oy sont

$$-2f\rho\frac{x-a}{r^2}d\sigma, \qquad -2f\rho\frac{y-b}{r^2}d\sigma;$$

l'attraction résultante F est donc dans le plan de la section droite et a pour projections

$$X = -2f\int\int_{\Sigma}\frac{\rho(x-a)}{r^2}d\sigma, \qquad Y = -2f\int\int_{\Sigma}\frac{\rho(y-b)}{r^2}d\sigma.$$

Dans ces intégrales, ρ est une fonction donnée de a et b, et l'intégration est étendue à l'aire de la section droite Σ. En posant

$$u = \int\int_{\Sigma}\rho\log r\,d\sigma,$$

u est une fonction de x et y; et l'on peut écrire

$$X = -2f\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y = -2f\frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'attraction, dans le plan xOy, dérive donc du potentiel u.

On vérifie, sans peine, que l'on a

$$\frac{\partial^2\log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\log r}{\partial y^2} = 0;$$

le potentiel u vérifie donc, en dehors des masses attirantes, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

analogue à l'équation de Laplace.

Le potentiel u ainsi défini se nomme *potentiel logarithmique*.

L'étude des fonctions de x et y vérifiant l'équation (1) est intimement liée à l'étude des fonctions d'une variable complexe $x+yi$. Nous renverrons, pour cette question, au *Traité d'Analyse* de M. Picard (premier Volume).

A l'intérieur de la masse attirante, le potentiel logarithmique vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2\pi\rho,$$

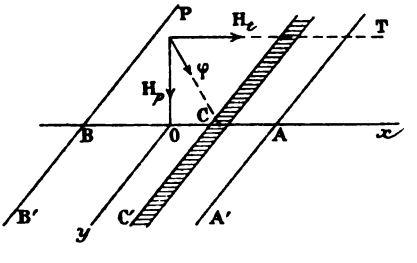
analogue à l'équation de Poisson.

606. Attraction d'un plan indéfini. Indétermination du problème. — L'expression *attraction d'un plan indéfini homogène sur un point* n'a pas de sens précis. Soit, dans un plan donné, une aire homogène S de densité superficielle ρ. L'attraction H de S sur un point P de masse 1 peut être décomposée en deux forces : 1° une force normale au plan H_p égale à $f\rho\Omega$, où Ω est l'angle solide du cône de sommet P et de base S (n° 567); 2° une force parallèle au plan H_t. Supposons maintenant que l'on fasse grandir indéfiniment l'aire S dans tous les sens, de façon qu'elle recouvre progressivement tout le plan : dans ces conditions, la composante H_p tend vers la limite $2\pi f\rho$, car Ω tend vers 2π, mais la composante H_t tend vers une limite *qui dépend de la façon dont l'aire* S *grandit indéfiniment.*

Si l'aire S, en grandissant, reste constamment symétrique par rapport à la projection O du point P sur le plan, la composante H_t est nulle. Mais si cette symétrie n'existe pas, la composante H_t n'est pas nulle.

Exemple. — Supposons que l'aire S soit une bande indéfinie du plan comprise entre deux parallèles AA′ et BB′ (*fig.* 303). Pre-

Fig. 303.



nons comme origine la projection O du point P sur le plan, comme axe Ox la perpendiculaire commune AB aux deux droites. Le point O est supposé entre les deux droites : soient $OA = a$, $OB = b$,

$OP = p$. Menons une parallèle CC′ à Oy ayant pour abscisse x et une parallèle infiniment voisine d'abscisse $x + dx$; nous avons ainsi une bande infiniment mince qui peut être assimilée à une droite de densité linéaire $h = \rho\, dx$ (masse de l'unité de longueur de la bande). L'attraction φ de cette bande élémentaire sur le point P de masse 1 est dirigée suivant PC et égale à $\frac{2f\rho\, dx}{PC}$ (n° 604); sa composante suivant la droite PT parallèle à Ox est

$$\varphi_t = \frac{2f\rho\, dx}{PC}\,\frac{x}{PC} = \frac{2f\rho\, x\, dx}{x^2 + p^2}.$$

La composante H_t de l'attraction de la bande totale suivant PT est la somme de ces composantes élémentaires

$$H_t = 2f\rho \int_{-b}^{a} \frac{x\, dx}{x^2 + p^2} = f\rho \operatorname{Log} \frac{a^2 + p^2}{b^2 + p^2},$$

les limites étant les abscisses des points B et A.

Élargissons maintenant la bande AA′BB′ de façon à lui faire recouvrir tout le plan; pour cela, il suffit de faire croître indéfiniment a et b suivant une loi quelconque. Nous voyons que H_t tend vers une limite qui dépend de la façon dont a et b augmentent indéfiniment. Ainsi, en supposant constamment $a = b$, on a

$$H_t = 0.$$

En supposant constamment $a = 2b$, on a, pour $b = \infty$,

$$\lim H_t = 2f\rho \operatorname{Log} 2.$$

En supposant $a = kb$

$$\lim H_t = 2f\rho \operatorname{Log} k.$$

607. Indications historiques et bibliographiques. — Nous avons donné dans le cours de ce Chapitre quelques indications historiques et bibliographiques. On trouvera des indications très détaillées dans une excellente publication intitulée *Potential Theorie,* insérée dans l'*Encyclopœdie der mathematischen Wissenschaften, herausgegeben von Heinr. Burckhardt und Franz Meyer* (Leipzig, Teubner, 1896). Nous avons, dans ce qui précède, emprunté plusieurs renseignements à cette publication.

Il convient d'ajouter à la liste des Ouvrages qui y sont cités, au point de vue historique :

La Thèse d'Olinde Rodrigues, *De l'attraction des sphéroïdes,* soutenue à Paris le 28 juin 1815, qui contient l'expression des polynomes de Legendre par les dérivées de $(1 - x^2)^n$.

Et, au point de vue de l'Enseignement :

Le *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. Boussinesq, t. II, *Calcul intégral, Compléments* (Gauthier-Villars, 1890);

Les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* par Mascart et Joubert (Masson, 1882);

Les *Leçons sur l'Électricité,* par Éric Gérard (Gauthier-Villars, 1897);

Les *Leçons sur le potentiel newtonien,* par M. Poincaré (Carré et Naud, 1899).

EXERCICES.

1. On considère l'espace compris entre une sphère S et une sphère plus petite S' placée à l'intérieur de S; cet espace est supposé rempli d'une matière homogène de densité ρ. Calculer l'attraction du corps ainsi constitué sur un point.

Réponse. — Cette attraction est la différence géométrique des attractions des sphères S et S' supposées pleines toutes deux.

2. L'attraction d'une couche homogène limitée par deux ellipsoïdes homothétiques et concentriques, sur un point intérieur, est *nulle*.

3. *Théorème d'Ivory et de Mac-Laurin.* — Les valeurs des potentiels de deux ellipsoïdes homofocaux en un point quelconque, extérieur à la fois aux deux ellipsoïdes, sont entre elles comme les masses des deux ellipsoïdes.

4. *Solide de plus grande attraction.* — Étant donnée une masse de matière homogène, de densité ρ, quelle forme et quelle position faut-il lui donner pour que son attraction sur un point P soit la plus grande possible?

Réponse. — En prenant comme origine le point P, la surface limitant le solide est une surface de révolution autour d'un axe passant par P. La méridienne a pour équation en coordonnées polaires

$$r^2 = k^2 \cos\theta,$$

où k est une constante (BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 430).

5. *Équation de Laplace en coordonnées polaires.* — En appelant r, θ, φ les coordonnées polaires du point potentié x, y, z, l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ prend la forme

$$r\frac{\partial^2(Ur)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0.$$

6. *Polynomes harmoniques.* — Former le polynome le plus général V_n homogène et de degré n en x, y, z vérifiant l'équation de Laplace $\Delta V_n = 0$.

Réponse. — Dans l'expression de ce polynome figurent $2n+1$ constantes arbitraires. Ainsi

$$V_2(x, y, z) = \lambda_1(x^2 - z^2) + \lambda_2(y^2 - z^2) + \lambda_3 yz + \lambda_4 zx + \lambda_5 xy,$$

avec cinq constantes.

7. *Fonctions* Y_n *de Laplace.* — Si l'on substitue aux coordonnées rectilignes rectangulaires x, y, z les coordonnées polaires dans l'espace

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta,$$

le polynome homogène $V_n(x, y, z)$ de l'exercice précédent prend la forme $r^n Y_n(\theta, \varphi)$.

Démontrer que la fonction Y_n ainsi obtenue vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0.$$

L'intégrale double

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} Y_n(\theta, \varphi)\, Y_{n'}(\theta, \varphi)\, d\varphi$$

est nulle tant que les entiers n et n' sont différents.

Pour démontrer ce fait, il suffit de considérer le volume compris entre deux sphères concentriques de centre O et de rayons r et R, et de remarquer que, les polynomes $V_n(x, y, z)$ et $V_{n'}(x, y, z)$ étant finis et continus dans ce volume, on a (n° 595)

$$\iint\left(V_n\frac{dV_{n'}}{dn} - V_{n'}\frac{dV_n}{dn}\right)d\sigma = 0,$$

l'intégration étant étendue aux surfaces des deux sphères. En calculant cette intégrale en coordonnées polaires, on trouve précisément l'équation à établir.

8. *Théorème de W. Thomson. — Si une fonction* $F(x, y, z)$ *vérifie l'équation de Laplace, la fonction*

$$\frac{1}{r}F\left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2}\right), \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$$

la vérifie également (*Journal de Liouville*, t. XII, Extraits de lettres adressées à M. Liouville par M. W. Thomson).

9. La fonction de Green $G(x, y, z; a, b, c)$ dépend des coordonnées courantes x, y, z et des coordonnées a, b, c du point fixe à partir duquel on compte la distance r. Démontrer que cette fonction est symétrique en a, b, c et x, y, z. Cela est facile à vérifier pour la fonction de Green dans le cas d'une sphère (n° 599).

10. *Attraction d'une couche sphérique homogène sur un point. Application de l'équation de Laplace.* — La disposition de la matière attirante étant symétrique autour du centre O de la couche, la valeur du potentiel $U(x, y, z)$ de la couche en un point P est évidemment une fonction de la seule distance r du

point P au centre. On peut dire aussi que U est fonction de $\frac{1}{r}$

$$U = \varphi\left(\frac{1}{r}\right), \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Dans la partie extérieure de la couche, comme dans la partie creuse, on a $\Delta U = 0$. Exprimant ce fait, on trouve

$$\varphi''\left(\frac{1}{r}\right) = 0, \qquad U = \varphi\left(\frac{1}{r}\right) = A\frac{1}{r} + B,$$

A et B étant des constantes :

1° Dans la partie extérieure $B = 0$, $A = M$ (n° 584);

2° Dans la partie creuse, $A = 0$, car U doit rester fini au centre.

11. Étant donné un ellipsoïde homogène, on peut recouvrir la surface de l'ellipse focale d'une simple couche de densité convenablement choisie en chaque point, de telle façon que le potentiel de cette couche coïncide *à l'extérieur de l'ellipsoïde* avec celui de l'ellipsoïde. A l'intérieur de l'ellipsoïde, le potentiel de la couche peut être regardé comme le prolongement analytique de la fonction harmonique donnant à l'extérieur le potentiel de l'ellipsoïde (LIPSCHITZ, *Journal de Crelle*, t. 61; 1863).

12. *Fonctions harmoniques uniformes à trois groupes de périodes.* — Soient (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'') les coordonnées de trois points non situés dans un même plan avec l'origine. Imaginons une fonction harmonique $F(x, y, z)$ uniforme dans tout l'espace et telle que

$$\begin{aligned} F(x+a, y+b, z+c) &= F(x+a', y+b', z+c') \\ &= F(x+a'', y+b'', z+c'') = F(x, y, z); \end{aligned}$$

on dit que cette fonction admet les trois groupes de périodes (a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'').

Géométriquement, si l'on construit le réseau des parallélépipèdes ayant pour sommets les points de coordonnées $ma + m'a' + m''a''$, $mb + m'b' + m''b''$, $mc + m'c' + m''c''$ où m, m', m'' sont des entiers quelconques positifs, négatifs ou nuls, la fonction F reprend les mêmes valeurs aux points homologues dans ce réseau. On voit qu'elle est analogue à la partie réelle d'une fonction doublement périodique d'une variable complexe.

Parmi ces fonctions F considérons celles qui deviennent infinies en des points isolés, comme $\frac{1}{r}$ ou comme les dérivées de $\frac{1}{r}$. On peut toutes les exprimer à l'aide de la fonction suivante :

Posons

$$\begin{gathered} a_\nu = ma + m'a' + m''a'', \\ b_\nu = mb + m'b' + m''b'', \\ c_\nu = mc + m'c' + m''c'', \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \rho = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}, \\ \cos\varphi = \frac{x a_\nu + y b_\nu + z c_\nu}{r\rho}, \\ R = \sqrt{(x-a_\nu)^2 + (y-b_\nu)^2 + (z-c_\nu)^2} = \sqrt{r^2 - 2r\rho\cos\varphi + \rho^2}; \end{gathered}$$

puis considérons la série

$$Z(x, y, z) = \frac{1}{r} + \sum{}' \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\rho} - \frac{r}{\rho^2} \cos\varphi - \frac{r^2}{\rho^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2\varphi - \frac{1}{2} \right) \right],$$

où la somme $\sum'$ est étendue à toutes les combinaisons de valeurs des entiers m, m', m'', la combinaison $m = m' = m'' = 0$ étant exceptée.

Pour toutes les positions du point (x, y, z) distinctes des points (a_ν, b_ν, c_ν) la série est convergente : elle définit une fonction harmonique Z qui existe dans tout l'espace excepté aux points (a_ν, b_ν, c_ν) en chacun desquels elle devient infinie de telle façon que la différence

$$Z(x, y, z) - \frac{1}{R},$$

reste finie en ce point.

Cette fonction est analogue à la fonction Z de M. Hermite ou à la fonction $\zeta = \frac{\sigma'}{\sigma}$ de Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques (*Voyez* APPELL et LACOUR, *Fonctions elliptiques*). A l'aide de cette fonction Z on peut construire les fonctions harmoniques $F(x, y, z)$ à trois groupes de périodes, de même qu'avec la fonction $\frac{\sigma'}{\sigma}$, on construit les fonctions elliptiques (Voyez *Acta Mathematica*, t. IV et VIII, et *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. III).

13. *Fonction de Green pour l'intérieur d'un parallélépipède rectangle.* — Ce problème a été traité par Riemann (*Schwere, Electricität und Magnetismus*, p. 84). La fonction en question peut être exprimée d'une façon simple à l'aide de la fonction Z de l'exercice précédent (*Acta Mathematica*, t. VIII, p. 275).

14. *Exemple de onction harmonique non uniforme.* — Soient $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ des constantes réelles, x, y, z des variables réelles; considérons la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a-i\alpha)^2 + (y-b-i\beta)^2 + (z-c-i\gamma)^2}},$$

où i est l'unité complexe. Cette fonction peut se mettre sous la forme

$$\varphi(x, y, z) + i\psi(x, y, z).$$

Dans ces conditions, les deux fonctions φ et ψ sont harmoniques; elles deviennent infinies sur le cercle d'intersection de la sphère

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0,$$

avec le plan

$$(x-a)\alpha + (y-b)\beta + (z-c)\gamma = 0.$$

En un point $P(x, y, z)$ de l'espace chacune de ces fonctions a deux déterminations qui s'échangent quand le point P décrit un contour fermé traversant l'aire du cercle (*Mathematische Annalen*, t. XXX, p. 155; 1887).

On trouvera d'autres exemples dans un Mémoire de M. Sommerfeld paru dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. XXVIII.

15. Soit une fonction harmonique U uniforme finie ainsi que ses dérivées premières et deuxièmes dans un volume V limité par une surface S. Si, *sur la sur-*

face, cette fonction U reste comprise entre deux limites h et g, on a, pour tous les points du volume,

$$h \leqq U \leqq g.$$

(Cela résulte des nos 588, 589.)

16. Démontrer que le potentiel logarithmique d'une circonférence homogène est :

1° A l'intérieur de la circonférence, égal à une constante;

2° A l'extérieur, égal à la valeur qu'il prendrait si toute la couche attirante était concentrée au centre.

17. *Potentiel Newtonien d'une circonférence homogène.* — Soient P le point potentié, O le centre de la circonférence, A et B les extrémités du diamètre dirigé suivant la projection de PO sur le plan de la circonférence, M la masse totale attirante, on a

$$\frac{U}{M} = \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2\pi\sqrt{\overline{PA}^2 \cos^2\psi + \overline{PB}^2 \sin^2\psi}}.$$

La valeur de cette intégrale est, comme l'a montré Gauss, *la moyenne arithmético-géométrique de* PA et PB. (*Voir* GAUSS, *Œuvres complètes*, t. III, et POINCARÉ, *Théorie du potentiel Newtonien*, p. 34.)

18. *Recherches de M. Tullio Levi-Civita.* — Nous ne pouvons que signaler ici un Mémoire de M. Tullio Levi-Civita intitulé : *Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate* (*Académie royale des Sciences de Turin*, 1898-1899.)

CHAPITRE XXX.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT INTÉRIEUR D'UNE MASSE CONTINUE.

608. Objet du Chapitre et exposé de la méthode. — Nous allons indiquer quelques formules et lois générales s'appliquant à l'équilibre ou au mouvement intérieur d'un milieu continu quelconque solide, liquide ou gazeux. Les formules de l'Hydrostatique, de l'Hydrodynamique et de l'Élasticité seront des applications de ces formules générales.

Le mot de *corps solide* ne doit plus être entendu ici dans le sens absolu que nous lui avons donné dans les premiers Volumes, d'un corps entièrement rigide : il n'existe pas dans la nature de solides de ce genre; tous les solides subissent des déformations quand on leur applique des forces suffisamment grandes.

La méthode et les résultats qui suivent ont été indiqués par Cauchy dans un Mémoire intitulé *De la pression ou tension dans un corps solide* (*Exercices de Mathématiques,* année 1827, *Œuvres complètes,* 2e série, t. VII, p. 60).

La méthode employée repose uniquement sur l'application du théorème suivant, établi dans le deuxième Volume :

Dans un système quelconque, en équilibre ou en mouvement, les forces extérieures et les forces d'inertie vérifient, à chaque instant, les six équations d'équilibre d'un système de forces appliquées à un solide rigide.

Ce théorème est, sous une autre forme, le résumé des théorèmes des projections et des moments des quantités de mouvement. Nous l'appliquerons d'abord au système entier, puis à une portion quelconque du système, regardée comme détachée de l'ensemble.

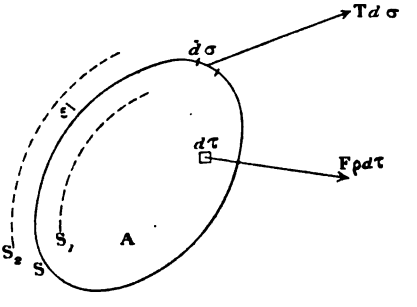
Imaginons un système matériel quelconque, solide, liquide ou

gazeux, en équilibre ou en mouvement. Nous regarderons ce système comme *continu :* il occupe alors un certain volume V limité par une surface S. Tels seraient, par exemple, un gaz dans une enveloppe, un liquide, une cloche vibrante, etc.

Les forces *extérieures* agissant sur le système, à un instant t, peuvent être partagées en deux catégories :

1° Il existe des forces extérieures agissant sur les éléments de volume. Soient $d\tau$ un de ces éléments de volume, dm sa masse, $\rho = \frac{dm}{d\tau}$ la densité du milieu dans l'élément $d\tau$; la force qui agit

Fig. 304.



sur l'élément dm est de l'ordre de cet élément; nous désignerons son intensité par $F\,dm$ ou $F\rho\,d\tau$; nous dirons alors que le coefficient F est la force qui agit sur l'élément dm *rapportée à l'unité de masse.*

2° Il existe également des forces extérieures agissant sur les éléments superficiels du corps. Soit $d\sigma$ un élément de surface : nous admettrons que, sur cet élément, agit une force de l'ordre de $d\sigma$; nous la désignerons par $T\,d\sigma$, et nous appellerons T l'*effort* s'exerçant sur l'élément superficiel $d\sigma$ *rapporté à l'unité de surface;* la force $T\,d\sigma$ est l'*effort élémentaire* s'exerçant sur l'élément $d\sigma$; cette force $T\,d\sigma$ est en général oblique sur l'élément $d\sigma$; quand elle est dirigée vers l'*intérieur* de la surface limitant le corps, on l'appelle plus spécialement *pression;* quand elle est dirigée vers l'*extérieur* on l'appelle *traction* ou *tension.* (Cauchy, *loc. cit.*)

Le mot *effort,* que nous employons, pour désigner d'une manière générale la force T, est employée couramment par les ingé-

nieurs; il a été adopté par MM. Cosserat dans leurs intéressants Mémoires sur l'*Élasticité* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. X); il répond à l'expression anglaise *stress,* introduite par Rankine dans la théorie de l'Élasticité.

En résumé, à l'instant t, les forces extérieures appliquées au corps sont des forces $F\rho\, d\tau$ appliquées aux éléments de volume et des forces $T\, d\sigma$ appliquées aux éléments superficiels. Par exemple, si une masse gazeuse pesante est enfermée dans un vase dans lequel elle se meut, les forces extérieures appliquées à cette masse peuvent se diviser comme il suit :

1° Sur chaque élément de volume $d\tau$ du gaz agit son poids $g\rho\, d\tau$, ρ désignant la densité de l'élément considéré; le coefficient g est la force due à la pesanteur rapportée à l'unité de masse;

2° Sur chaque élément $d\sigma$ de la surface du gaz est appliquée une pression $T\, d\sigma$ représentant l'action du vase sur cet élément; cette action est normale si l'on néglige le frottement du gaz sur les parois du vase qui le contient; sinon elle est oblique. On peut remarquer que, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les pressions du gaz sur le vase sont égales et opposées aux pressions $T\, d\sigma$ du vase sur le gaz.

De même, si nous considérons un prisme droit chargé debout, par exemple, une colonne supportant une charge, sur les éléments de volume $d\tau$ agissent les poids $g\rho\, d\tau$; sur les éléments superficiels des bases supérieures et inférieures agissent des pressions provenant de la charge supportée et des réactions du sol; sur les éléments superficiels des parois latérales de la colonne n'agit que la pression atmosphérique, qui est négligeable.

609. **Discussion des hypothèses précédentes.** — Nous venons de dire que l'on peut se représenter certaines des forces extérieures comme appliquées aux éléments superficiels $d\sigma$ du système. C'est là une façon de parler qu'il est indispensable d'approfondir.

Le milieu continu considéré A (*fig.* 304) est terminé par une surface S par laquelle il est en contact avec un autre milieu B. Les forces appliquées sur les éléments superficiels de S représentent les actions de contact du milieu B sur le milieu A. En réalité, ce sont les éléments du milieu B très voisins de S qui agissent sur les éléments du milieu A également très voisin de la surface de séparation S : de sorte que, si l'on imagine deux surfaces S_1 et S_2 parallèles à S, situées à une distance très petite ε de S, l'action de contact du milieu B sur A se réduit à l'action des éléments de B

compris entre S et S_2, sur les éléments de A compris entre S et S_1. Alors, puisque ε est très petit, on peut, dans la plupart des cas, le négliger et raisonner comme si ε était nul, c'est-à-dire comme si les actions de contact de B sur A étaient uniquement appliquées aux éléments superficiels de S : c'est ce que nous ferons dans tout ce qui suit.

L'ordre de grandeur de ε est indiqué, dans certains cas, par les expériences de Quincke sur la capillarité. Si l'on étudie les phénomènes de la capillarité, dans l'eau, avec un tube de verre recouvert intérieurement d'une couche d'argent très mince, on reconnaît que ces phénomènes sont identiques à ceux qu'on obtient avec un tube d'argent de même diamètre, dès que la couche d'argent atteint une épaisseur de $0^{mm},00054$. C'est donc là l'épaisseur de la couche d'argent qui agit sur l'eau en contact avec le métal (1).

610. Équations d'équilibre. — Supposons d'abord que le système soit en équilibre. Dans ce cas, il faut que les forces extérieures agissant sur le système satisfassent aux six conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide.

Écrivons ces six équations. La force extérieure agissant sur un élément de volume $d\tau$ a été désignée par $F\rho\, d\tau$; désignons par X, Y, Z les projections de la force F rapportée à l'unité de masse sur les axes : les projections de $F\rho\, d\tau$ sont alors $\rho X\, d\tau$, $\rho Y\, d\tau$, $\rho Z\, d\tau$. Nous avons également désigné par $T\, d\sigma$ la force extérieure ou effort élémentaire agissant sur l'élément superficiel $d\sigma$ de la surface limite : appelons T_x, T_y, T_z les projections de T sur les trois axes : celles de $T\, d\sigma$ sont alors $T_x d\sigma$, $T_y d\sigma$, $T_z d\sigma$. Les moments de $F\rho\, d\tau$, par rapport aux trois axes, sont

$$\rho(yZ - zY)d\tau, \quad \rho(zX - xZ)d\tau, \quad \rho(xY - yX)d\tau,$$

x, y, z étant les coordonnées de l'élément de volume $d\tau$; les moments de $T\, d\sigma$ sont de même

$$(yT_z - zT_y)d\sigma, \quad (zT_x - xT_z)d\sigma, \quad (xT_y - yT_x)d\sigma,$$

x, y, z étant les coordonnées de l'élément de surface $d\sigma$.

En écrivant que la somme des projections des forces extérieures sur chacun des axes et que la somme des moments de ces forces

(1) *Voir* les *Leçons sur l'Élasticité et l'Acoustique*, de M. Marcel Brillouin. Librairie Labouche, Toulouse, 1884-1885. — *Voir* également les *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, de M. Poincaré. Librairie Carré et Naud.

par rapport à chacun des axes est nulle, on a les six équations

$$(1)\quad \begin{cases} \iiint_V \rho X\, d\tau + \iint_S T_x\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho Y\, d\tau + \iint_S T_y\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho Z\, d\tau + \iint_S T_z\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(yZ - zY)\, d\tau + \iint_S (yT_z - zT_y)\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(zX - xZ)\, d\tau + \iint_S (zT_x - xT_z)\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(xY - yX)\, d\tau + \iint_S (xT_y - yT_x)\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, les intégrales triples sont étendues au volume V et les intégrales doubles à la surface limite S.

611. Équations du mouvement. — D'après le principe de d'Alembert, on doit écrire qu'il y a équilibre entre les forces réellement appliquées et les forces d'inertie. L'élément matériel dm de coordonnées x, y, z a une certaine accélération J de projections J_x, J_y, J_z : la force d'inertie de cet élément $-J\,dm$ ou $-J\rho\,d\tau$ a donc pour projections

$$-\rho J_x\, d\tau, \quad -\rho J_y\, d\tau, \quad -\rho J_z\, d\tau.$$

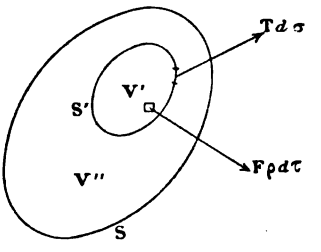
Écrivant qu'il y a équilibre entre les forces extérieures et les forces d'inertie, on a les six équations nécessaires

$$(2)\quad \begin{cases} \iiint_V \rho(X - J_x)\, d\tau + \iint_S T_x\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(Y - J_y)\, d\tau + \iint_S T_y\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(Z - J_z)\, d\tau + \iint_S T_z\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(yZ - zY - yJ_z + zJ_y)\, d\tau + \iint_S (yT_z - zT_y)\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(zX - xZ - zJ_x + xJ_z)\, d\tau + \iint_S (zT_x - xT_z)\, d\sigma = 0, \\ \iiint_V \rho(xY - yX - xJ_y + yJ_x)\, d\tau + \iint_S (xT_y - yT_x)\, d\sigma = 0, \end{cases}$$

Ces équations se réduisent évidemment à celles trouvées pour le cas de l'équilibre, quand on y fait $J = 0$.

612. Équations de l'équilibre ou du mouvement intérieur. — Dans le système matériel continu que nous venons d'étudier, imaginons une *surface fermée quelconque* S′ (*fig.* 305). Cette surface fermée divise le volume total V en deux parties, une partie V′ intérieure à S′, une partie V″ comprise entre S′ et la surface limite S du système. On peut appliquer au volume V′ tout ce que nous avons dit du volume total V. Les forces extérieures appliquées au système matériel continu V′ sont de deux sortes.

Fig. 305.



D'abord, sur chaque élément $d\tau$ du volume V′, agit une force extérieure $F\rho\, d\tau$ ayant pour projections $\rho X\, d\tau$, $\rho Y\, d\tau$, $\rho Z\, d\tau$. Ensuite, sur chaque élément superficiel $d\sigma$ de S′, agit un *effort élémentaire* $T\, d\sigma$ qui représente l'action des points de V″ contigus à $d\sigma$ sur les points de V′ contigus à $d\sigma$. Cela revient à dire que, sans rien changer à l'état du système matériel V′, on pourrait supprimer le système extérieur V″, en conservant les forces $F\rho\, d\tau$ appliquées aux éléments de masse de V′ et en appliquant sur les éléments superficiels $d\sigma$ de S′ des forces $T\, d\sigma$. Ces forces $T\, d\sigma$ proviennent de l'action des points de V″ en contact avec la surface limite S′ sur les points de V′ en contact avec cette même surface. D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les points de V′ en contact avec S′ exercent, sur les points de V″ en contact avec cette même surface, des actions donnant naissance à des forces égales et opposées à $T\, d\sigma$ appliquées aux éléments superficiels $d\sigma$.

D'après cela on pourra appliquer au volume V′ les six équations

du mouvement, écrites plus haut, pour le volume V :

$$(3)\quad \begin{cases} \iiint_{V'} \rho(X - J_x)\,d\tau + \iint_{S'} T_x\,d\sigma = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \iiint_{V'} \rho(yZ - zY - yJ_z + zJ_y)\,d\tau + \iint_{S'} (yT_z - zT_y)\,d\sigma = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

les intégrales triples étant étendues au volume V′ et les intégrales doubles à la surface limite S′. *Ces équations auront lieu quelle que soit la surface* S′ *tracée par la pensée dans l'intérieur du système continu.*

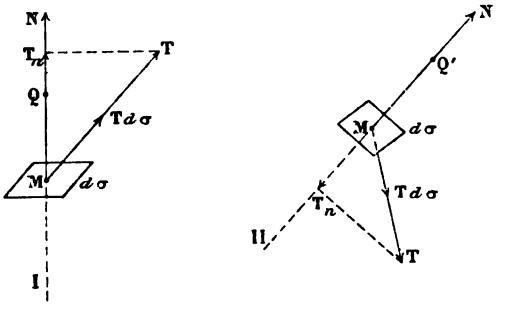
Remarque. — Il est bon de remarquer que les forces extérieures $F\rho\,d\tau$ appliquées aux éléments du volume V′ peuvent varier avec la forme de la surface S′. Cela arriverait, par exemple, si les éléments du système total V s'attiraient suivant la loi de Newton : alors, la surface séparatrice S′ étant tracée, parmi les forces extérieures agissant sur un élément matériel $\rho\,d\tau$ de V′, figurerait l'attraction de la partie extérieure V″ sur cet élément, attraction qui varie évidemment quand la surface S′ change de forme.

613. **Effort s'exerçant sur un élément** $d\sigma$. — Nous venons de voir que, si l'on trace dans le milieu une surface S′, sur laquelle on prend un élément $d\sigma$ de coordonnées x, y, z, l'effort élémentaire s'exerçant sur cet élément est une certaine force $T\,d\sigma$. Cet effort provient de l'action des éléments du milieu contigus à $d\sigma$, extérieurement à S′, sur les éléments contigus à $d\sigma$ intérieurement : il en résulte que cet effort ne dépend que de la position de l'élément particulier $d\sigma$ dans le milieu et non du reste de la surface S′ à laquelle il est censé appartenir : en d'autres termes, cet effort reste le même si l'on considère $d\sigma$ comme appartenant à toute autre surface tangente à S′ au point x, y, z. Nous pouvons donc maintenant parler de l'effort s'exerçant sur un élément isolé $d\sigma$.

Soit un élément superficiel $d\sigma$ placé dans le milieu continu, en un point M de coordonnées x, y, z (*fig.* 306) ; choisissons, sur la normale à cet élément, un sens positif MN ayant pour cosinus directeurs α, β, γ. L'élément $d\sigma$ a ainsi deux faces : l'une positive,

l'autre négative, la face positive étant du côté de MN. Les éléments matériels du milieu contigus à $d\sigma$ du côté négatif exercent, sur les éléments matériels contigus à $d\sigma$ du côté positif, des actions que

Fig. 306.



l'on peut remplacer par une force $T d\sigma$ appliquée à l'élément $d\sigma$; nous dirons que cette force est *l'effort élémentaire s'exerçant sur la face négative de l'élément* $d\sigma$. La force T est l'effort, s'exerçant sur la face négative, rapporté à l'unité de surface.

Les projections T_x, T_y, T_z de T sont, à l'instant t, des fonctions de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$; ce sont donc des fonctions de $t, x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$. Si le système est en équilibre, ces fonctions ne contiennent pas t.

Cet effort T est une *pression* quand il fait un angle *aigu* avec la normale MN (*fig.* 306, I); il est une *traction* quand il fait avec MN un angle *obtus* (*fig.* 306, II).

D'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, les éléments matériels contigus à $d\sigma$ sur la face positive exercent, sur les éléments matériels contigus à $d\sigma$ sur la face négative, des actions que l'on peut remplacer par une force $T d\sigma$ égale et opposée à la précédente : cette force est l'effort élémentaire s'exerçant *sur la face positive de l'élément* $d\sigma$.

614. Expressions des composantes de l'effort en fonction de α, β, γ. — Nous venons de voir qu'à chaque instant t, les projections T_x, T_y, T_z de l'effort agissant sur la face négative d'un élément $d\sigma$ sont des fonctions de x, y, z et de α, β, γ. Nous allons montrer que ce sont des *fonctions linéaires et homogènes* de α, β, γ.

Prenons dans le milieu continu un point M de coordonnées x, y, z : soit $d\sigma$ un élément superficiel mené par ce point.

Parmi toutes les positions possibles de l'élément $d\sigma$ autour du point M, supposons d'abord que cet élément prenne une position $d\sigma_1$ perpendiculaire à Ox, de telle façon que la normale MN coïncide avec Ox ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$) : appelons X_1, Y_1, Z_1 les composantes de l'effort qui s'exerce sur la face négative de $d\sigma_1$, rapporté à l'unité de surface. Appelons de même

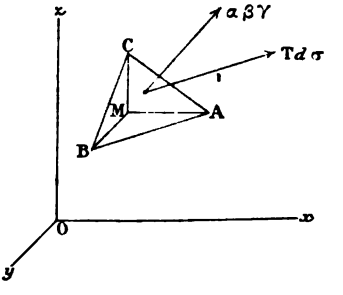
$$X_2,\quad Y_2,\quad Z_2,$$
$$X_3,\quad Y_3,\quad Z_3,$$

les composantes de l'effort, rapporté à l'unité de surface, qui s'exerce sur la face négative de l'élément quand il est successivement perpendiculaire aux axes Oy et Oz. Nous allons démontrer que l'on a

$$(4)\qquad \begin{cases} T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3, \\ T_y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3, \\ T_z = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3. \end{cases}$$

Pour cela, menons par le point M trois parallèles aux trois axes de coordonnées et prenons sur ces parallèles des segments infiniment petits MA, MB, MC. Dans la *fig.* 307 nous supposons ces segments dirigés dans le sens positif des axes. Si nous menons le

Fig. 307.



plan ABC, nous formons un tétraèdre élémentaire MABC : appelons $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ les faces BMC, CMA, AMB respectivement perpendiculaires aux axes Ox, Oy, Oz, et $d\sigma$ la face hypoténuse; désignons en outre par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à cette face estimée positivement vers l'extérieur du tétraèdre. En

projetant la face $d\sigma$ sur chacune des trois autres, on a

$$(5) \qquad d\sigma_1 = \alpha\, d\sigma, \qquad d\sigma_2 = \beta\, d\sigma, \qquad d\sigma_3 = \gamma\, d\sigma.$$

Le tétraèdre étant infiniment petit, la face ABC est un élément plan dont la position limite passe par le point M.

Soient T_x, T_y, T_z les projections de l'effort, rapporté à l'unité de surface, s'exerçant sur la face négative de l'élément $d\sigma$; les projections de l'effort s'exerçant sur la face positive seront $-T_x$, $-T_y$, $-T_z$.

Cela posé, on peut regarder le tétraèdre élémentaire comme libre, à condition d'appliquer :

1° A son volume $d\tau$, la force extérieure de projections

$$\rho X\, d\tau, \quad \rho Y\, d\tau, \quad \rho Z\, d\tau,$$

ρ désignant la densité en M, et la force d'inertie, de projections

$$-\rho J_x\, d\tau, \quad -\rho J_y\, d\tau, \quad -\rho J_z\, d\tau;$$

2° Sur les éléments superficiels $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma$ les efforts élémentaires de projections

$$\begin{array}{ccc} X_1\, d\sigma_1, & Y_1\, d\sigma_1, & Z_1\, d\sigma_1, \\ X_2\, d\sigma_2, & Y_2\, d\sigma_2, & Z_2\, d\sigma_2, \\ X_3\, d\sigma_3, & Y_3\, d\sigma_3, & Z_3\, d\sigma_3, \\ -T_x\, d\sigma, & -T_y\, d\sigma, & -T_z\, d\sigma. \end{array}$$

La somme des projections de ces forces sur un axe quelconque devant être nulle, on a, sur Ox,

$$\rho(X - J_x)\, d\tau + X_1\, d\sigma_1 + X_2\, d\sigma_2 + X_3\, d\sigma_3 - T_x\, d\sigma = 0.$$

D'après les relations (5) cette relation s'écrit

$$T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 + \rho(X - J_x)\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Mais $\frac{d\tau}{d\sigma}$ est nul, car c'est le tiers de la hauteur du tétraèdre issue de M, hauteur qui est infiniment petite. On a donc

$$T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3.$$

On établirait de même les deux autres formules (4).

Nous avons supposé, pour simplifier, les arêtes OA, OB, OC

dirigées dans le sens des axes positifs, c'est-à-dire α, β, γ positifs; mais les formules obtenues sont générales.

Dans ces formules, les quantités

$$X_1,\quad X_2,\quad X_3,\qquad Y_1,\quad Y_2.\quad Y_3,\qquad Z_1,\quad Z_2,\quad Z_3$$

sont des fonctions de x, y, z et t : car en chaque point du milieu, à chaque instant, ces neuf quantités sont déterminées.

615. Équations générales. — Prenons dans le milieu une surface fermée S' : appelons $d\sigma$ un élément superficiel de S', α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à $d\sigma$ *extérieure* à S'. La matière contenue dans S' peut être regardée comme isolée à condition que l'on fasse agir sur chaque élément $d\sigma$ l'effort élémentaire s'exerçant sur la face *extérieure*, c'est-à-dire sur la face *positive* de cet élément. Les formules (4) donnent l'effort, rapporté à l'unité de surface, s'exerçant sur la face négative d'un élément : sur la face positive, on a donc

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} T_x = -(\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Cela posé, en écrivant que les forces extérieures appliquées aux éléments de volume $d\tau$ et aux éléments superficiels $d\sigma$ de S' et les forces d'inertie se font équilibre, on a les six équations (3). Écrivons ces équations en tenant compte des valeurs (6) de T_x, T_y, T_z : nous avons

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \iiint_{V'} \rho(X - J_x)\,d\tau - \iint_{S'} (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3)\,d\sigma = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \iiint_{V'} \rho(yZ - zY - yJ_z + zJ_y)\,d\tau \\ \quad - \iint_{S'} [\alpha(yZ_1 - zY_1) + \beta(yZ_2 - zY_2) + \gamma(yZ_3 - zY_3)]\,d\sigma = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Ces intégrales se transforment par l'application de la formule de Green (n° 534). On a d'abord

$$\iint_{S'} (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3)\,d\sigma = \iiint_{V'} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}\right) d\tau,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La première équation (7) s'écrit donc

$$\iiint_{V'}\left[\rho(X-J_x)-\frac{\partial X_1}{\partial x}-\frac{\partial X_2}{\partial y}-\frac{\partial X_3}{\partial z}\right]d\tau=0.$$

Comme cette équation doit avoir lieu *quel que soit le volume* V′ considéré dans le milieu continu, *l'élément différentiel est nul.* En appliquant ce même calcul aux projections sur les deux autres axes, on a ainsi les équations

$$(9)\qquad\begin{cases}\rho(X-J_x)=\dfrac{\partial X_1}{\partial x}+\dfrac{\partial X_2}{\partial y}+\dfrac{\partial X_3}{\partial z},\\ \rho(Y-J_y)=\dfrac{\partial Y_1}{\partial x}+\dfrac{\partial Y_2}{\partial y}+\dfrac{\partial Y_3}{\partial z},\\ \rho(Z-J_z)=\dfrac{\partial Z_1}{\partial x}+\dfrac{\partial Z_2}{\partial y}+\dfrac{\partial Z_3}{\partial z}.\end{cases}$$

Transformons de même les équations (8). On a, d'après le théorème de Green,

$$\iint_{S'}[\alpha(yZ_1-zY_1)+\beta(yZ_2-zY_2)+\gamma(yZ_3-zY_3)]\,d\sigma$$
$$=\iiint_{V'}\left[\frac{\partial(yZ_1-zY_1)}{\partial x}+\frac{\partial(yZ_2-zY_2)}{\partial y}+\frac{\partial(yZ_3-zY_3)}{\partial z}\right]d\tau,$$

ou, en développant les dérivées

$$=\iiint_{V'}\left[y\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x}+\frac{\partial Z_2}{\partial y}+\frac{\partial Z_3}{\partial z}\right)-z\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x}+\frac{\partial Y_2}{\partial y}+\frac{\partial Y_3}{\partial z}\right)+Z_3-Y_3\right]d\tau.$$

L'équation (8) s'écrit alors

$$\iiint_{V'}\left[y\left(\rho Z-\rho J_z-\frac{\partial Z_1}{\partial x}-\frac{\partial Z_2}{\partial y}-\frac{\partial Z_3}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.-z\left(\rho Y-\rho J_y-\frac{\partial Y_1}{\partial x}-\frac{\partial Y_2}{\partial y}-\frac{\partial Y_3}{\partial z}\right)-Z_2+Y_3\right]d\tau=0.$$

Mais les coefficients de y et z sont identiquement nuls d'après les équations (9) : on a donc

$$\iiint_{V'}(Y_3-Z_2)\,d\tau=0.$$

Cette relation devant avoir lieu quel que soit le volume V′, l'élé-

ment différentiel est nul. On a donc

$$Y_3 = Z_2;$$

on trouve de même

$$Z_1 = X_3,$$
$$X_2 = Y_1.$$

On peut énoncer ce résultat en disant que le déterminant

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

est *symétrique*.

Notations. — Nous appellerons, d'après Lamé, N_1, N_2, N_3 les éléments diagonaux de ce déterminant

$$X_1 = N_1, \qquad Y_2 = N_2, \qquad Z_3 = N_3;$$

T_1, T_2, T_3 les éléments symétriques

$$Y_3 = Z_2 = T_1,$$
$$Z_1 = X_3 = T_2,$$
$$X_2 = Y_1 = T_3.$$

La raison de ces notations est la suivante :

Sur un élément $d\sigma_1$, perpendiculaire à Ox, s'exerce un effort que l'on peut décomposer en une force *normale* à l'élément

$$X_1 = N_1$$

et en deux forces *tangentielles* situées dans le plan de l'élément

$$Y_1 = T_3,$$

parallèle à Oy, et

$$Z_1 = T_2,$$

parallèle à Oz. De même pour les efforts s'exerçant sur des éléments $d\sigma_2$ et $d\sigma_3$ perpendiculaires à Oy et Oz. La symétrie du déterminant (10) exprime ce fait que la projection, sur Ox, de l'effort appliqué à un élément $d\sigma_2$ mené par M perpendiculairement à Oy, est égale à la projection, sur Oy, de l'effort appliqué à un élément $d\sigma_1$ mené par M perpendiculairement à Ox.

616. Résumé. — Avec la notation que nous venons d'introduire, les formules (4) donnant l'effort sur la face négative d'un élément $d\sigma$ deviennent

$$(11)\qquad \begin{cases} T_x = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ T_y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ T_z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma, \end{cases}$$

ce qu'on peut écrire

$$(12)\qquad T_x = \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \qquad T_y = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \qquad T_z = \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma},$$

en désignant par φ la forme quadratique

$$(13)\quad \varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}(N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2T_1\beta\gamma + 2T_2\gamma\alpha + 2T_3\alpha\beta).$$

Quant aux équations du mouvement (9) elles deviennent

$$(14)\qquad \begin{cases} \rho(X - J_x) = \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z}, \\ \rho(Y - J_y) = \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z}, \\ \rho(Z - J_z) = \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Si le système est en équilibre J_x, J_y, J_z sont nuls.

617. Quadrique directrice. — Si, en un point M, à l'instant t, les valeurs numériques des six fonctions N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont déterminées, la loi des efforts sur les divers éléments superficiels $d\sigma$ menés par M est déterminée par les formules (11). On peut interpréter ces formules géométriquement et en déduire des images simples pour représenter les directions, les sens et les grandeurs des efforts sur les divers éléments $d\sigma$ passant par M.

Tout d'abord, on peut définir les directions, les sens et les grandeurs des efforts sur les éléments passant par M, à l'aide d'une quadrique de centre M appelée *quadrique directrice*. Cette quadrique peut être obtenue de la façon suivante :

Soient $d\sigma$ un élément passant par M, MN la normale (α, β, γ) à cet élément, T l'effort, rapporté à l'unité de surface, s'exerçant sur la face négative et T_n sa projection sur MN : si T_n est positive,

l'effort T est une *pression*, si T_n est négative, c'est une *traction* (*fig.* 306, I et II). Or, T ayant pour composantes suivant les axes T_x, T_y, T_z, sa projection T_n est

$$T_n = \alpha T_x + \beta T_y + \gamma T_z = \alpha \varphi'_\alpha + \beta \varphi'_\beta + \gamma \varphi'_\gamma$$

ou

$$(15)\quad T_n = 2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = N_1\alpha^2 + N_2\beta^2 + N_3\gamma^2 + 2T_1\beta\gamma + 2T_2\gamma\alpha + 2T_3\alpha\beta.$$

Le signe de cette fonction montrera si l'effort est une *pression* ou une *traction*.

Pour représenter graphiquement la variation de cette fonction T_n quand α, β, γ varient de toutes les manières possibles, Cauchy emploie une méthode analogue à celle qu'on suit dans la théorie des moments d'inertie pour définir l'ellipsoïde d'inertie, et dans la théorie de la courbure des surfaces pour définir l'indicatrice.

Supposons d'abord que α, β, γ aient des valeurs rendant T_n *positive* (pression). Prenons alors, sur la normale MN à l'élément $d\sigma$ (*fig.* 306, I), une longueur MQ définie par

$$MQ = \frac{1}{\sqrt{T_n}}.$$

Les coordonnées x', y', z' de Q par rapport à des axes Mx', My', Mz' menés par M parallèlement aux axes coordonnés sont

$$(16)\qquad x' = \frac{\alpha}{\sqrt{T_n}}, \qquad y' = \frac{\beta}{\sqrt{T_n}}, \qquad z' = \frac{\gamma}{\sqrt{T_n}}.$$

Le lieu du point Q, quand l'élément $d\sigma$ tourne autour de M, s'obtient en éliminant α, β, γ entre les relations (15) et (16). Ce lieu a pour équation

$$(17)\quad N_1x'^2 + N_2y'^2 + N_3z'^2 + 2T_1y'z' + 2T_2z'x' + 2T_3x'y' = +1,$$

c'est-à-dire, sous forme abrégée,

$$(Q)\qquad 2\varphi(x', y', z') = +1;$$

c'est une première quadrique (Q) ayant son centre en M.

Supposons, au contraire, que α, β, γ aient des valeurs rendant T_n *négative* (traction). Nous prendrons alors, sur la normale MN

à l'élément (*fig.* 306, II), une longueur

$$MQ' = \frac{1}{\sqrt{-T_n}}.$$

Le lieu du point Q', quand on fait varier α, β, γ, est une deuxième quadrique (Q') dont l'équation est

$$2\varphi(x', y', z') = -1; \qquad (Q')$$

cette quadrique est conjuguée de la précédente. L'ensemble des deux quadriques (Q) et (Q') s'appelle *quadrique directrice*.

Les formules (12),

$$T_x = \varphi'_\alpha, \qquad T_y = \varphi'_\beta, \qquad T_z = \varphi'_\gamma$$

montrent que *l'effort qui s'exerce sur la face négative d'un élément $d\sigma$ est perpendiculaire au plan diamétral conjugué de la normale à cet élément dans la quadrique directrice.* En effet, la normale MN à l'élément ayant pour cosinus directeurs α, β, γ, le plan diamétral conjugué de MN a pour équation

$$x'\varphi'_\alpha + y'\varphi'_\beta + z'\varphi'_\gamma = 0.$$

On a donc la *direction* de l'effort. On obtient le *sens* de l'effort en regardant si la normale MN à l'élément considéré rencontre la quadrique (Q) ou sa conjuguée (Q'). Lorsque la normale MN rencontre la quadrique (Q) en un point Q, l'effort sur l'élément $d\sigma$ est une *pression,* et l'on a

$$T_n = \frac{1}{\overline{MQ}^2}.$$

Lorsque la normale MN rencontre (Q') en un point Q', l'effort sur l'élément $d\sigma$ est une *traction,* et l'on a

$$T_n = -\frac{1}{\overline{MQ'}^2}.$$

Quant à la *grandeur* de T, elle résulte évidemment de ce que l'on connaît la direction et le sens de T ainsi que sa projection T_n sur la normale à $d\sigma$.

D'après cela, trois cas sont possibles pour un point M :

1° La quadrique (Q) est un ellipsoïde réel de centre M; alors

la quadrique (Q') n'existe pas (ellipsoïde imaginaire). Les efforts sur tous les éléments $d\sigma$ passant par M sont des *pressions*.

2° La quadrique (Q') est un ellipsoïde réel de centre M; alors la quadrique (Q) n'existe pas. Les efforts sur tous les éléments $d\sigma$ passant par M sont des *tractions*.

3° La quadrique (Q) est un *hyperboloïde;* alors (Q') est l'*hyperboloïde conjugué*. L'effort sur un élément $d\sigma$ passant par M est une *pression* ou une *traction* suivant que la normale à cet élément rencontre (Q) ou (Q'). Les deux hyperboloïdes ont même cône asymptote : ce cône, de sommet M, a pour équation

$$\varphi(x', y', z') = 0.$$

Si l'on considère un élément $d\sigma$ *perpendiculaire à une génératrice du cône asymptote,* les cosinus directeurs α, β, γ de la normale à cet élément annulent la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$: on a donc

$$T_n = 0.$$

L'effort qui s'exerce sur cet élément particulier $d\sigma$ n'a donc pas de composante *normale* à l'élément; il est situé dans le plan même de l'élément. Pour ces éléments particuliers, le point Q où la normale MN rencontre la quadrique directrice est rejeté à l'infini.

Plans principaux; efforts principaux au point M. — Si l'élément $d\sigma$ coïncide avec un des plans principaux de la quadrique directrice, sa normale MN coïncide avec un axe principal, le plan diamétral conjugué de MN coïncide avec $d\sigma$, et l'effort est perpendiculaire à $d\sigma$. Donc, *à l'instant t, en tout point* M *du système, il y a trois éléments plans sur lesquels les efforts sont normaux :* ces trois plans sont les *plans principaux* en M, et les trois efforts correspondants sont les *efforts principaux*. Si l'on prenait au point M ces plans principaux pour plans coordonnés, les valeurs des coefficients N et T changeraient : l'équation (Q) ne devant contenir que des carrés, les nouvelles valeurs de T_1, T_2, T_3 seraient nulles; si nous appelons n_1, n_2, n_3 les nouvelles valeurs de N_1, N_2, N_3, les quadriques (Q) et (Q') ont pour équations

$$n_1 x^2 + n_2 y^2 + n_3 z^2 = \pm 1,$$

les coefficients n_1, n_2, n_3 étant *positifs* ou *négatifs,* suivant que

les efforts principaux correspondants sont des *pressions* ou des *tractions*.

618. **Ellipsoïde des efforts**. — La quadrique précédente donne la direction, le sens et la grandeur des efforts autour du point M. Pour déterminer uniquement la grandeur des efforts, on peut employer une deuxième quadrique qui est toujours un ellipsoïde et qu'on appelle *ellipsoïde des efforts* ou *ellipsoïde d'élasticité*.

Considérons un élément $d\sigma$ mené par M : soit MT le vecteur représentant la tension, rapportée à l'unité de surface, qui s'exerce sur la face négative de cet élément. Cherchons le lieu de l'extrémité T de ce vecteur, quand l'élément $d\sigma$ prend toutes les positions possibles autour de M. Nous allons voir que ce lieu est un ellipsoïde de centre M, ayant mêmes plans principaux que la quadrique directrice.

En effet, par rapport aux axes Mx', My', Mz' menés par M parallèlement aux axes coordonnés, le point T a pour coordonnées les projections mêmes de la tension T_x, T_y, T_z, données par les équations (12),

$$(T) \qquad T_x = \varphi'_\alpha, \qquad T_y = \varphi'_\beta, \qquad T_z = \varphi'_\gamma.$$

Résolvons ces équations par rapport à α, β, γ : elles donnent, pour ces quantités, des expressions linéaires et homogènes en T_x, T_y, T_z, de la forme

$$(18) \qquad \begin{cases} \alpha = A\ T_x + B''T_y + B'\ T_z, \\ \beta = B''\ T_x + A'T_y + B\ T_z, \\ \gamma = B'\ T_x + B\ T_y + A''T_z, \end{cases}$$

où A, A', A'', B, B', B'' s'expriment aisément en fonction de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.

Écrivant ensuite

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

on a l'équation du lieu du point T : cette équation du deuxième degré en T_x, T_y, T_z a pour premier membre une somme de carrés; elle représente un ellipsoïde qui est l'*ellipsoïde des efforts*.

Les directions des axes de cet ellipsoïde se confondent avec celles des efforts principaux, et les longueurs de ces axes sont

égales aux grandeurs des efforts principaux. En effet, prenons les directions des efforts principaux en M pour directions des axes coordonnés; les quantités T_1, T_2, T_3 deviennent *nulles,* les quantités N_1, N_2, N_3 prennent des valeurs particulières n_1, n_2, n_3 (efforts principaux). Les équations (T) deviennent alors

$$T_x = n_1\alpha, \qquad T_y = n_2\beta, \qquad T_z = n_3\gamma;$$

et l'ellipsoïde des efforts devient

$$\frac{T_x^2}{n_1^2} + \frac{T_y^2}{n_2^2} + \frac{T_z^2}{n_3^2} = 1;$$

il est rapporté à ses axes.

L'ellipsoïde des efforts relatif au point M étant tracé, si l'on prend un élément quelconque $d\sigma$ passant par M, la quadrique directrice donne la direction et le sens de l'effort MT qui s'exerce sur la face négative de $d\sigma$; la grandeur de MT résulte de ce fait que le point T est sur l'ellipsoïde.

619. **Réciprocité des composantes normales.** — Soient $d\sigma$ un élément passant par un point M, MN(α, β, γ) la normale à cet élément, T l'effort sur la face négative de l'élément; soient de même $d\sigma'$ un deuxième élément mené par le même point, MN′ la normale $(\alpha', \beta', \gamma')$ et T′ l'effort qui s'exerce sur la face négative de $d\sigma'$.

La projection $T_{n'}$, *de* T *sur la normale à* $d\sigma'$, *est égale à la projection* T'_n *de* T′ *sur la normale à* $d\sigma$.

En effet, en appelant comme plus haut T_x, T_y, T_z les projections de T sur les axes, on a, pour la projection de T sur la direction MN′ :

$$T_{n'} = \alpha' T_x + \beta' T_y + \gamma' T_z,$$

ou, d'après les formules (12),

$$T_{n'} = \alpha' \varphi'_\alpha + \beta' \varphi'_\beta + \gamma' \varphi'_\gamma.$$

De même, on trouve

$$T'_n = \alpha \varphi'_{\alpha'} + \beta \varphi'_{\beta'} + \gamma \varphi'_{\gamma'}.$$

Ces expressions sont identiques, comme on le vérifie immédiatement. Donc

$$T_{n'} = T'_n.$$

Les formules $Y_3 = Z_2$, $Z_1 = X_3$, $X_2 = Y_1$ établies au n° 615 apparaissent maintenant comme des cas particuliers de ce théorème : pour les obtenir, il suffit de supposer que les éléments $d\sigma$ et $d\sigma'$ sont respectivement perpendiculaires à deux des axes coordonnés.

620. Autre quadrique pouvant jouer le rôle de directrice. — On peut remplacer la quadrique directrice par une autre quadrique obtenue en introduisant la forme quadratique adjointe de la forme φ. On démontrera sans peine les résultats suivants à titre d'exercice :

Considérons la quadrique ayant pour équation, par rapport aux axes Mx', My', Mz' *menés par* M *parallèlement aux axes coordonnés,*

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = h, \tag{19}$$

où A, A', A'', B, B', B'' *sont les coefficients introduits au n° 618, et h une constante.*

L'effort s'exerçant sur un élément $d\sigma$ *mené par* M *est dirigé suivant le diamètre conjugué du plan de* $d\sigma$ *par rapport à cette quadrique.*

Cette quadrique (19) *a mêmes plans principaux que la quadrique directrice; elle est de même nature (ellipsoïde ou hyperboloïde).*

Son cône asymptote est supplémentaire de celui de la quadrique directrice. Il est l'enveloppe des plans des éléments spéciaux $d\sigma$ *passant par* M *sur lesquels s'exerce un effort sans composante normale. Il est aussi le lieu des efforts s'exerçant sur ces éléments spéciaux.*

Ce dernier point résulte de ce que le diamètre conjugué d'un plan tangent au cône asymptote est la génératrice de contact.

621. Changement de coordonnées. — Dans ce qui précède, nous avons rapporté le milieu continu à un système d'axes $Oxyz$. Les valeurs de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, en chaque point M, dépendent évidemment de l'orientation des axes. Si l'on prenait de nouveaux axes $Ox_1y_1z_1$ faisant avec les premiers $Oxyz$ des angles connus, les valeurs des six coefficients deviendraient N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3. Pour calculer ces nouvelles valeurs il suffit de remarquer que, par l'effet du changement de coordonnées, l'équation de la quadrique directrice, relative à un point quelconque M,

$$N_1x'^2 + N_2y'^2 + N_3z'^2 + 2T_1y'z' + 2T_2z'x' + 2T_3x'y' = \pm 1,$$

devient

$$N'_1x'^2_1 + N'_2y'^2_1 + N'_3z'^2_1 + 2T'_1y'_1z'_1 + 2T'_2z'_1x'_1 + 2T'_3x'_1y'_1 = \pm 1.$$

On est donc ramené au problème bien connu de calculer les nouveaux coefficients de l'équation d'une quadrique ayant son centre à l'origine, quand on change la direction des axes de coordonnées.

EXERCICES.

1. Soient, en un point M d'un milieu continu, à un instant t, trois éléments $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ normaux aux axes coordonnés et MF_1, MF_2, MF_3 les trois vecteurs représentant les efforts rapportés à l'unité de surface qui s'exercent sur les faces négatives de ces trois éléments. Démontrer que si l'on prend pour système d'axes

de coordonnées obliques les trois droites MF_1, MF_2, MF_3, l'ellipsoïde des efforts a pour équation

$$\frac{X^2}{F_1^2} + \frac{Y^2}{F_2^2} + \frac{Z^2}{F_3^2} = 1.$$

Démonstration. — L'effort T qui s'exerce sur l'élément $d\sigma$ perpendiculaire à la droite (α, β, γ) est, par hypothèse, la résultante de trois composantes X, Y, Z dirigées suivant MF_1, MF_2, MF_3. Écrivons que les projections de T sur les axes sont les sommes des projections de ces composantes. Nous aurons, en remarquant que les cosinus directeurs de F_1 sont $\frac{N_1}{F_1}, \frac{T_3}{F_1}, \frac{T_2}{F_1}, \ldots$

$$T_x = \frac{N_1}{F_1} X + \frac{T_3}{F_2} Y + \frac{T_2}{F_3} Z,$$

$$T_y = \frac{T_3}{F_1} X + \frac{N_2}{F_2} Y + \frac{T_1}{F_3} Z,$$

$$T_z = \frac{T_2}{F_1} X + \frac{T_1}{F_2} Y + \frac{N_3}{F_3} Z.$$

Comparant avec les formules (11), on a

$$\alpha = \frac{X}{F_1}, \qquad \beta = \frac{Y}{F_2}, \qquad \gamma = \frac{Z}{F_3}.$$

D'où, en écrivant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, l'équation demandée.

2. Considérons une surface fermée S et supposons que sur chaque élément $d\sigma$ de cette surface agisse une force définie comme il suit : Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à $d\sigma$; soient, d'autre part, x, y, z les coordonnées de l'élément par rapport à trois axes rectangulaires. La force appliquée à l'élément $d\sigma$ est une certaine force $T\,d\sigma$ ayant pour projections $T_x\,d\sigma$, $T_y\,d\sigma$, $T_z\,d\sigma$, où T_x, T_y, T_z sont des fonctions de x, y, z, α, β, γ.

On demande quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir ces fonctions pour que l'ensemble des forces $T\,d\sigma$ appliquées à tous les éléments d'une surface fermée S supposée rigide se fassent équilibre, *quelle que soit la forme de cette surface* (Maurice Lévy).

Réponse. — Il faut et il suffit que l'on ait les équations (11) et (14) dans lesquelles on suppose X, Y, Z et J *nuls*. Pour le démontrer, il suffit de reprendre les raisonnements des nos 614 et 615, en supposant X, Y, Z et J nuls.

Ces conditions sont remplies dans le cas très particulier où chaque élément $d\sigma$ de la surface S est soumis à une pression normale proportionnelle à $d\sigma$.

3. Soit $d\sigma$ un élément superficiel de coordonnées x, y, z, dont la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ. Faisons correspondre, à cet élément, le vecteur T ayant cet élément pour point d'application et pour projections

$$T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3,$$
$$T_y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3,$$
$$T_z = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3,$$

où X_1, X_2, X_3, ..., Z_3 sont des fonctions des coordonnées.

Démontrer que le vecteur Q ayant pour point d'application le point x, y, z et pour projections

$$Q_x = Y_3 - Z_2,$$
$$Q_y = Z_1 - X_3,$$
$$Q_z = X_2 - Y_1$$

est indépendant du choix des axes. Démontrer de même que le vecteur R ayant pour projections

$$R_x = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z},$$
$$R_y = \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z},$$
$$R_z = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z},$$

est indépendant du choix des axes. Il faut entendre par là que, si l'on prend de nouveaux axes Ox', y', z' et si l'on met les nouvelles projections du vecteur T sous la forme

$$T_{x'} = \alpha' X'_1 + \beta' X'_2 + \gamma' X'_3,$$
$$T_{y'} = \alpha' Y'_1 + \beta' Y'_1 + \gamma' Y'_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

α', β', γ' étant les nouveaux cosinus des angles que fait la normale à $d\sigma$ avec les nouveaux axes, les vecteurs Q' et R' formés avec les nouvelles fonctions $X'_1, \ldots, Z'_3$ et les nouvelles coordonnées x', y', z' sont identiques à Q et R.

Réponse. — On peut établir ces résultats en calculant le moment résultant et la résultante générale des forces $T\,d\sigma$ appliquées à tous les éléments $d\sigma$ d'une surface fermée arbitraire S. Les vecteurs obtenus sont indépendants du choix des axes.

4. *Si par un point donné d'un corps solide on fait passer trois plans rectangulaires entre eux,* la somme des carrés des pressions ou des tensions supportées par ces mêmes plans sera une quantité constante égale à la somme des carrés des pressions ou tensions principales (Cauchy, *De la pression ou tension dans un corps solide, Œuvres complètes,* 2e série, t. VII, p. 75).

5. Les valeurs de T_x, T_y, T_z données par les formules (11) du n° 616, sont entièrement semblables aux valeurs des composantes rectangulaires de la force qui solliciterait un point matériel placé en présence de plusieurs centres fixes d'attraction ou de répulsion, et très peu écarté d'une position dans laquelle il restait en équilibre au milieu des centres dont il s'agit.

Les formules que l'on obtient de cette façon, ainsi que plusieurs propositions qui s'en déduisent et qui sont analogues aux théorèmes des nos 617 et 618, sont dues à Fresnel qui les a données dans ses *Recherches sur la double réfraction* (Cauchy, *Œuvres complètes,* 2e série, t. VII, p. 79).

CHAPITRE XXXI.

HYDROSTATIQUE.

I. — CONDITIONS GÉNÉRALES D'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

622. Fluides. — A première vue, les corps peuvent être divisés en trois catégories : *solides, liquides* et *gaz*.

Solides. — Comme nous l'avons déjà dit, il n'existe pas de corps absolument rigides; tous les corps appelés *solides* subissent des déformations quand on leur applique des forces *dépassant une certaine limite*. Si, lorsqu'on supprime ces forces, le corps revient exactement à sa forme et à son état primitifs, il est dit parfaitement *élastique*. Si, au contraire, lorsque les forces déformantes sont supprimées, le corps reste dans l'état déformé, il est dit parfaitement *mou* ou *plastique*. Ce sont là deux états extrêmes qui ne sont réalisés rigoureusement par aucun corps : les solides naturels sont plus ou moins élastiques, plus ou moins plastiques.

Les actions mutuelles entre les molécules d'un corps solide sont de telle nature qu'elles s'opposent aussi bien à l'écartement qu'au rapprochement des molécules; de telle sorte que, suivant les cas, les efforts qui s'exercent sur les éléments de surface $d\sigma$ pris dans l'intérieur d'un solide sont des tractions ou des pressions.

Fluides. — Les liquides et les gaz portent le nom général de *fluides*.

Les liquides sont sensiblement *incompressibles :* ils occupent, par conséquent, un volume constant à température constante. Il en résulte que les actions mutuelles des molécules s'opposent à leur rapprochement; mais elles s'opposent très faiblement à leur écartement. Si l'on considère le système formé par deux molécules d'un liquide en contact l'une avec l'autre, lorsque les résultantes

des forces extérieures au système agissant sur les deux molécules tendent à les séparer, la séparation se produit effectivement, dès que ces résultantes dépassent des limites très petites que l'on peut regarder ordinairement comme *nulles;* cela revient à dire que la *cohésion* des liquides peut être regardée comme nulle dans les phénomènes habituels. Cette cohésion très faible se manifeste par des effets à la surface du liquide dans certains phénomènes particuliers, tels que la formation des gouttes, la constitution des bulles, les phénomènes capillaires, etc.

Dans un liquide, les efforts intérieurs sont donc des *pressions.*

Les gaz sont, au contraire, compressibles et dilatables à volonté ; ils n'ont pas de volume déterminé et remplissent constamment les enveloppes fermées qui les contiennent. Comme il faut exercer une pression sur un gaz et dépenser un travail pour le comprimer, les actions mutuelles des molécules des gaz s'opposent à leur rapprochement; mais elles n'opposent aucune résistance à leur écartement, puisque les molécules des gaz tendent à s'écarter naturellement. Dans un gaz, les efforts intérieurs sont donc toujours des *pressions.*

Une première propriété, commune à tous les fluides, est donc que *les efforts intérieurs sont des pressions.*

Une deuxième propriété est la suivante : si un fluide est immobile et si une force, si petite soit-elle, vient à agir en tendant à faire glisser deux molécules en contact l'une sur l'autre, le glissement se produit effectivement, quelle que soit la pression entre ces deux molécules. Il résulte de là que, *dans un fluide en équilibre, tous les efforts sont des pressions* NORMALES *aux éléments plans sur lesquels ils s'exercent.*

Viscosité. — L'observation montre que les fluides sont plus ou moins *mobiles.* Ainsi, quand on écarte un liquide pesant de sa position d'équilibre, il se met en mouvement plus ou moins facilement pour reprendre cette position; l'eau se comporte, à cet égard, d'une tout autre manière que certains liquides comme des huiles épaisses. Ce fait met en évidence une qualité qu'on appelle *viscosité.* Quand un fluide est immobile, si l'on fait agir sur lui des forces tendant à faire glisser les molécules les unes sur les autres, le glissement se produit *quelque petites que soient ces forces,* mais le mouvement se fait d'autant plus lentement que le

fluide est plus visqueux. La viscosité est donc une résistance au glissement mutuel des molécules. On peut assimiler cette résistance soit à un frottement intérieur, soit à une résistance de milieu : elle présente, avec le frottement, cette différence que, pour vaincre un frottement de glissement, il faut faire agir une force tangentielle *dépassant une certaine limite,* tandis que la moindre force tangentielle suffit pour faire glisser deux molécules fluides en contact.

On voit maintenant avec netteté ce qui distingue un *solide plastique* d'un *fluide visqueux*. Pour déformer un solide plastique, il faut un effort *dépassant une certaine limite,* tandis que *le moindre effort tangentiel suffit pour mettre en mouvement un fluide visqueux* (1), *pourvu qu'il agisse pendant un temps suffisamment long.*

623. Conditions d'équilibre d'un fluide. Pression en un point. — D'après ce qui précède, pour qu'un fluide soit en équilibre, *il faut que tous les efforts intérieurs soient des pressions normales aux éléments plans sur lesquels ils s'exercent.*

Si donc nous appliquons à un fluide en équilibre les considérations générales du Chapitre précédent, nous voyons que, en chaque point M du fluide, les composantes tangentielles T_1, T_2, T_3 des efforts sur les éléments perpendiculaires aux axes doivent être *nulles :* les projections T_x, T_y, T_z de l'effort, rapporté à l'unité de surface, s'exerçant sur la face négative d'un élément quelconque $d\sigma$, sont alors

$$T_x = N_1\alpha, \qquad T_y = N_2\beta, \qquad T_z = N_3\gamma.$$

Cet effort devant être normal à l'élément $d\sigma$, on doit avoir

$$\frac{T_x}{\alpha} = \frac{T_y}{\beta} = \frac{T_z}{\gamma},$$

ce qui exige

$$N_1 = N_2 = N_3.$$

En outre, l'effort devant toujours être une *pression,* les projections T_x, T_y, T_z doivent être de mêmes signes que α, β, γ; la

(1) PEARSON (*The Elastical Researches of Barré de Saint-Venant,* p. 253); GREENHILL (*Treatise on Hydrostatics,* p. 6-7; 1894).

valeur commune de N_1, N_2, N_3 est donc une quantité *positive* p, que l'on appelle *pression au point* M.

Cette quantité p est une fonction uniforme des coordonnées x, y, z du point M. Sur tout élément $d\sigma$ passant par M s'exerce un effort qui est une pression normale $p\,d\sigma$.

D'après cela, dans un fluide en équilibre, la quadrique directrice et l'ellipsoïde des efforts sont, en chaque point, des sphères : toutes les directions, autour de chaque point, sont principales.

Si l'on prend comme unité de force le kilogramme-force et comme unité de longueur le mètre, p est la pression rapportée au mètre carré évaluée en kilogrammes : on peut dire aussi que, dans ce système, la valeur numérique de p est la hauteur en millimètres d'une colonne d'eau ayant pour base 1^{mq} et pour poids p kilogrammes; cela tient à ce qu'une colonne d'eau d'une hauteur de 1^{mm}, ayant pour base 1^{mq}, pèse 1^{kg}.

624. Équations d'équilibre d'un fluide. — Soient, comme dans le Chapitre précédent, X, Y, Z les projections des forces, rapportées à l'unité de masse, agissant sur les éléments de volume du fluide; ρ la densité du fluide : les équations générales du n° **616**, dans lesquelles on fait

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0. \qquad N_1 = N_2 = N_3 = p, \qquad J = 0,$$

deviennent

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \tag{1}$$

Telles sont les équations d'équilibre des fluides. Dans ces équations X, Y, Z, p et ρ sont des fonctions uniformes et finies de x, y, z dans toute l'étendue du fluide en équilibre. La fonction p est assujettie à être *continue* en tous les points du fluide, puisque ses dérivées partielles sont finies, d'après les équations (1); en outre, cette fonction doit rester *positive* ou *nulle* dans le fluide. La densité ρ est également positive, mais peut être discontinue.

Les équations d'équilibre (1) s'appliquent à tous les fluides quelque visqueux qu'ils soient : c'est seulement en Hydrodynamique que la viscosité modifie les phénomènes.

Équation unique d'équilibre. Interprétation géométrique. — Soient M un point (x, y, z) de la masse fluide et

$$M'(x + dx, y + dy, z + dz)$$

un point quelconque infiniment voisin. Ajoutons les équations (1) après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz; nous aurons, en désignant par dp la différentielle totale de p,

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{2}$$

Cette équation ayant lieu, quels que soient dx, dy, dz, résume les trois équations (1). Elle a une signification simple. Soit F la force, rapportée à l'unité de masse, agissant en M, l'équation (2) signifie que la différence, dp, des pressions aux points infiniment voisins M et M′, est égale au produit de la densité ρ au point M par la quantité

$$F.\overline{MM'}\cos\widehat{F.MM'},$$

analogue à un travail. On peut dire aussi que la dérivée de la pression dans une direction donnée MM′, $\frac{dp}{MM'}$, est égale à la densité en M multipliée par la projection de la force F sur MM′

$$\frac{dp}{MM'} = \rho F\cos\widehat{F.MM'}. \tag{3}$$

Cette équation donne la condition d'équilibre indépendamment de tout système de coordonnées. On en déduit les équations d'équilibre des fluides dans un système quelconque de coordonnées : il suffit, pour cela, de traduire la condition (3) dans le système adopté.

Cas d'une fonction de forces. — Dans le cas particulier où les forces X, Y, Z dérivent d'une fonction $U(x, y, z)$, on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU.$$

et l'équation d'équilibre s'écrit

$$dp = \rho\,dU.$$

La variation infiniment petite de la pression quand on passe de M en M′, est égale à la densité multipliée par la variation infiniment petite de la fonction des forces.

625. **Application du principe du travail virtuel.** — Lagrange a montré, dans la *Mécanique analytique*, que le principe du travail virtuel permet d'établir les équations de l'Hydrostatique. Nous renverrons pour la discussion de cette démonstration à un Mémoire de M. Duhem (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. IV).

626. Lois de forces capables de tenir un fluide en équilibre. — Lorsqu'un fluide est en équilibre, les quantités p, ρ, X, Y, Z sont déterminées en chaque point du fluide; ce sont donc des fonctions uniformes de x, y, z; mais il est important de remarquer que *l'équilibre n'est possible que si les forces* X, Y, Z *remplissent une condition particulière*. En effet, l'équation (2) exprime que l'expression différentielle

$$\text{X}\,dx + \text{Y}\,dy + \text{Z}\,dz \tag{4}$$

devient une différentielle totale dp, quand on la multiplie par la fonction ρ de x, y, z. En d'autres termes, la densité ρ est un facteur intégrant de l'expression (4). Or, pour qu'une expression, telle que (4), admette un facteur intégrant, c'est-à-dire puisse être identifiée avec une expression de la forme $\psi\,d\varphi$, où ψ et φ sont fonctions de x, y, z, il faut et il suffit (n° 542) que l'on ait

$$\text{X}\left(\frac{\partial \text{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \text{Y}}{\partial z}\right) + \text{Y}\left(\frac{\partial \text{X}}{\partial z} - \frac{\partial \text{Z}}{\partial x}\right) + \text{Z}\left(\frac{\partial \text{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \text{X}}{\partial y}\right) = 0. \tag{5}$$

Les forces (X, Y, Z) appliquées au fluide doivent donc remplir cette condition pour que l'équilibre soit possible.

En employant la terminologie définie dans le premier Chapitre de ce Volume (n° 541), on voit que l'équilibre d'un fluide n'est possible que si le tourbillon de la force X, Y, Z est nul ou est *perpendiculaire* à la force en chaque point du fluide.

La condition (5) est remplie en particulier quand le tourbillon de la force est *nul,* c'est-à-dire quand la force X, Y, Z dérive d'une fonction de forces U, car, dans ce cas, les différences telles que $\frac{\partial \text{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \text{Y}}{\partial z}$, ... sont nulles identiquement. C'est ce qui a lieu le plus fréquemment.

Dans le cas le plus simple qui puisse se présenter, les quantités X, Y, Z sont des fonctions uniformes *données* de x, y, z, indépendantes dans leur forme de la disposition qu'affecte la masse fluide; c'est ce qui arrive lorsqu'on envisage un fluide soumis uniquement à l'action de forces extérieures, telles que la pesanteur ou l'attraction de corps fixes; pour que l'équilibre soit possible, il faut que ces fonctions données vérifient l'identité (5).

Dans d'autres cas, les quantités X, Y, Z sont, pour chaque ar-

rangement de la masse fluide, des fonctions de x, y, z; mais ces fonctions changent avec l'arrangement de la masse : c'est ce qui arrive, par exemple, pour un fluide dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton, ce fluide pouvant d'ailleurs être soumis à d'autres forces extérieures; il est bon de remarquer que, dans cet exemple, la force provenant de l'attraction newtonienne du fluide sur un point de masse 1, pris dans son intérieur, dérive d'une fonction de forces quel que soit l'arrangement du fluide; seulement, cette fonction varie avec l'arrangement du fluide.

627. Équation caractéristique d'un fluide. — Si l'on considère un fluide déterminé, il existe, entre la densité ρ, la pression p et la température τ d'un élément de volume du fluide, une relation caractéristique

$$\mathcal{F}(p, \rho, \tau) = 0. \tag{6}$$

Par exemple, pour un gaz parfait, suivant les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, on a

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha\tau)} = \text{const.},$$

α désignant le coefficient de dilatation du gaz, égal à $\frac{1}{273}$, quand τ est évalué en degrés centigrades.

Pour un liquide, la relation caractéristique ne contient pas p; on sait, en effet, qu'un liquide est sensiblement incompressible; sa densité ne dépend donc pas de sa pression, mais seulement de sa température, et l'on a, dans des limites convenables de la température,

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - k\tau},$$

k étant le coefficient de dilatation du liquide par la chaleur et ρ_0 la densité pour $\tau = 0$.

L'étude de la relation caractéristique d'un corps fait l'objet de la Thermodynamique; pour l'emploi de cette relation dans l'équilibre et le mouvement des fluides, nous renverrons à un important article de Bjerknes dans le tome IV des *Acta Mathematica*.

628. Surfaces de niveau. — Imaginons une masse fluide en

équilibre : en chaque point $M(x, y, z)$ de cette masse, la pression, la densité, la température ont des valeurs déterminées; donc p, ρ et τ sont des fonctions uniformes de x, y, z.

Les surfaces sur lesquelles la pression est constante, $p = \text{const.}$, s'appellent *surfaces de niveau.*

Les surfaces $\rho = \text{const.}$ sont les *surfaces d'égale densité.*

Les surfaces $\tau = \text{const.}$ sont les *surfaces isothermes.*

Comme p, ρ et τ sont liés par la relation caractéristique du fluide, on voit que, si le long d'une certaine ligne, deux de ces quantités restent constantes, la troisième reste également constante. Ainsi, la courbe d'intersection de deux surfaces $p = \text{const.}$ et $\tau = \text{const.}$ se trouve sur une surface $\rho = \text{const.}$

Les équations d'équilibre

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z$$

montrent qu'en chaque point M du fluide, la force (X, Y, Z) est dirigée *normalement* à celle des surfaces de niveau passant par ce point, du côté où p augmente : en effet, les projections X, Y, Z de cette force sont égales aux dérivées partielles de la fonction p par rapport à x, y, z, divisées par le facteur *positif* ρ.

629. Application aux fluides pesants. — Imaginons une portion de fluide pesant de hauteur quelconque, mais de section assez petite pour que la direction de la verticale ne change pas sensiblement d'un point à l'autre du fluide.

Alors, en prenant un axe vertical Oz dirigé vers le haut, on a, pour les projections de la force agissant sur l'unité de masse,

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -g'.$$

Si la hauteur du fluide considéré est faible, on peut regarder g' comme constant dans l'étendue du fluide et égal à sa valeur g au point O; sinon g' décroît quand z augmente.

L'équation d'équilibre (2) est

$$dp = -\rho g' dz. \tag{7}$$

On en conclut que *p est fonction de z seul.* En effet, si l'on se déplace dans le fluide de telle façon que z reste constant, dz est nul et l'équation montre que dp est nul aussi, c'est-à-dire p constant.

La pression a donc la même valeur en tous les points d'un plan horizontal et p est une fonction de z seul,

$$p = \varphi(z).$$

Les surfaces de niveau sont donc des plans horizontaux.

L'équation (7) donne alors

$$\rho g' = -\varphi'(z),$$

φ' désignant la dérivée de φ. Comme g' est une fonction de z, ρ est une fonction de z seul : *les surfaces d'égale densité sont donc également des plans horizontaux;* elles se confondent ici avec les surfaces de niveau.

Enfin, la relation caractéristique (6) du fluide montre que τ est aussi une fonction de z seul : *les surfaces isothermes sont encore des plans horizontaux.*

Ces considérations s'appliquent, en particulier, à l'équilibre de l'eau et de l'air sous l'action de la pesanteur. On en conclut qu'une colonne d'air atmosphérique ne peut être en équilibre que si la température et la densité sont constantes dans chaque plan horizontal.

Différence de pression en deux points. — Soient M_0 et M deux points d'altitudes z_0 et $z (z_0 < z)$, p_0 et p les pressions en ces points. En intégrant l'équation (7), on a

$$p_0 - p = \int_{z_0}^{z} \rho g' dz.$$

La différence des pressions aux deux points est égale au poids d'un cylindre vertical du fluide, ayant pour section droite l'unité de surface et limité aux plans horizontaux passant par les deux points. En effet, si, dans ce cylindre, on mène deux sections droites infiniment voisines à des hauteurs z et $z + dz$, le volume de la tranche ainsi découpée dans le cylindre est dz, sa masse est $\rho\, dz$ et son poids $\rho g' dz$; le poids total du cylindre est donc bien $\int_{z_0}^{z} \rho g' dz$.

Fluides pesants, de densités différentes, superposés. — Soient deux liquides pesants, en équilibre, superposés, ou un gaz superposé à un liquide. Cherchons la surface de séparation.

Le long de cette surface, la pression doit être la même dans les deux fluides, pour que chaque élément de la surface de séparation subisse des pressions égales sur ses deux faces. Or, dans l'un des fluides, on a

$$dp = -\rho g' dz$$

et dans l'autre, en appelant p_1 la pression et ρ_1 la densité,

$$dp_1 = -\rho_1 g' dz.$$

Pour un déplacement quelconque effectué le long de la surface de séparation, on a

$$dp - dp_1 = 0,$$

puisque $p = p_1$ sur cette surface. On a donc, le long de cette surface,

$$(\rho_1 - \rho) g' dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$dz = 0, \qquad z = \text{const.}$$

La surface de séparation est donc un plan horizontal.

C'est ce qui se présente, par exemple, pour la surface libre de l'eau en contact avec l'air au repos.

630. **Formule barométrique.** — Les équations précédentes permettent d'établir la formule de Laplace (*Mécanique céleste,* 2e Partie, Livre X, Chap. IV) pour la mesure des altitudes à l'aide du baromètre. Si, en un lieu déterminé, on considère l'atmosphère comme un fluide pesant en équilibre, les quantités p, ρ, τ sont des fonctions de l'altitude z. En traitant l'air comme un gaz parfait, on a, entre ces quantités, la relation

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha\tau)} = \frac{1}{k},$$

où k est une constante. Appelons g l'intensité de la pesanteur *au niveau de la mer* au lieu considéré et comptons les altitudes à partir de ce niveau. Soit g' l'intensité de la pesanteur à l'altitude z : si l'on désigne par R le rayon terrestre, les points de hauteur o et z sont à des distances du centre de la Terre égales à R et R$+z$; les intensités de la pesanteur en ces deux points sont sensiblement en raison inverse des carrés des distances au centre : donc

$$\frac{g'}{g} = \frac{R^2}{(R+z)^2}.$$

L'équation d'équilibre

$$dp = -\rho g' dz$$

est alors, en y remplaçant ρ et g' par les valeurs tirées des équations précédentes,

$$\frac{dp}{p} = -\frac{kg\mathrm{R}^2}{1+\alpha\tau}\frac{dz}{(\mathrm{R}+z)^2}. \tag{8}$$

Dans cette équation, τ est une fonction inconnue de z : d'après Laplace, on donne à τ une valeur constante égale à la moyenne $\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_2)$ des températures aux deux stations dont on veut mesurer la différence d'altitude. La valeur du coefficient de dilatation α est un peu augmentée par la présence de la vapeur d'eau; Laplace prend $\alpha = 0.004$, de sorte que

$$1+\alpha\tau = 1+\frac{2(\tau_1+\tau_2)}{1000}.$$

Ceci posé, appelons z_1 et z_2 les altitudes des deux stations inférieure et supérieure, p_1 et p_2 les valeurs de la pression atmosphérique p aux deux stations; l'équation (8) donne, en intégrant de z_1 à z_2,

$$\mathrm{Log}\frac{p_2}{p_1} = \frac{kg\mathrm{R}^2}{1+\alpha\tau}\left(\frac{1}{\mathrm{R}+z_2}-\frac{1}{\mathrm{R}+z_1}\right);$$

d'où, en réduisant au même dénominateur et résolvant par rapport à la différence d'altitude

$$\mathrm{Z} = z_2 - z_1,$$

$$\mathrm{Z} = \frac{1+\alpha\tau}{kg}\left(1+\frac{z_1}{\mathrm{R}}\right)\left(1+\frac{z_1+\mathrm{Z}}{\mathrm{R}}\right)\mathrm{Log}\frac{p_1}{p_2}. \tag{9}$$

Dans cette formule, g désigne l'intensité de la pesanteur au niveau de la mer à la latitude L du lieu de l'observation; en appelant g_{45} l'intensité de la pesanteur au niveau de la mer à la latitude de 45°, on a

$$g = g_{45}(1 - 0{,}00265\cos 2\mathrm{L}),$$

d'où, en prenant les inverses et négligeant le carré du terme en $\cos 2\mathrm{L}$ qui est très petit,

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{g_{45}}(1+0{,}00265\cos 2\mathrm{L}).$$

Voyons comment on pourra pratiquement calculer le terme $\mathrm{Log}\frac{p_1}{p_2}$. Appelons h_1 et h_2 les hauteurs barométriques lues aux deux stations, T_1 et T_2 les températures des deux baromètres : ces températures ne sont pas toujours exactement celles de l'air ambiant; on fait usage, pour les déterminer, d'un thermomètre enchâssé dans la monture même du baromètre. Soit h'_2 la hauteur qu'aurait le baromètre à la station supérieure, si sa température était T_1 comme à la station inférieure; la dilatation du mercure est 0,000 180 02 pour un degré centigrade et celle du laiton de

l'échelle barométrique 0,00001878; la différence de ces deux dilatations est $\frac{1}{6200}$ et l'on a

$$h'_2 = h_2\left(1 + \frac{T_1 - T_2}{6200}\right).$$

Mais il faut, de plus, tenir compte de la différence des intensités de la pesanteur aux deux stations z_1 et z_2. Soient g_1 et g_2 ces intensités, ρ_1 la densité du mercure à T_1 degrés. Les pressions p_1 et p_2 étant respectivement égales aux poids de deux colonnes de mercure à la température T_1, ayant pour base 1 et pour hauteurs h_1 et h'_2, on a

$$p_1 = h_1\rho_1 g_1, \qquad p_2 = h'_2\rho_1 g_2;$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h'_2}\frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1}{h'_2}\frac{\left(1 + \frac{z_2}{R}\right)^2}{\left(1 + \frac{z_1}{R}\right)^2},$$

$$\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_2} = \operatorname{Log}\frac{h_1}{h'_2} + 2\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z_2}{R}\right) - 2\operatorname{Log}\left(1 + \frac{z_1}{R}\right).$$

Comme $\frac{z_2}{R}$ et $\frac{z_1}{R}$ sont très petits, on peut, en négligeant les carrés de ces quantités, remplacer les logarithmes népériens de $1 + \frac{z_2}{R}$ et $1 + \frac{z_1}{R}$ par $\frac{z_2}{R}$ et $\frac{z_1}{R}$; on a donc

$$\operatorname{Log}\frac{p_1}{p_2} = \operatorname{Log}\frac{h_1}{h'_2} + \frac{2Z}{R}.$$

En appelant $M = 0{,}4342945$ le module des logarithmes vulgaires, on a

$$\operatorname{Log}\frac{h_1}{h'_2} = \frac{1}{M}\log\frac{h_1}{h'_2}.$$

La formule (9) peut donc s'écrire

$$(10)\quad \begin{cases} Z = \dfrac{1}{M k g_{45}}(1 + \alpha\tau)(1 + 0{,}00265\cos 2L)\left(1 + \dfrac{z_1}{R}\right)\left(1 + \dfrac{z_1 + Z}{R}\right) \\ \qquad \times\left(\log\dfrac{h_1}{h'_2} + 2M\dfrac{Z}{R}\right). \end{cases}$$

Dans cette formule, le facteur $\frac{1}{M k g_{45}}$ a pour valeur numérique 18336^m, et le rayon R, 6366198^m.

On pourra calculer Z par approximations successives, en remplaçant d'abord, dans le deuxième membre, $\frac{Z}{R}$ par 0, puis remettant, dans le deuxième membre, pour Z, la première approximation.

On trouvera, dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1890, p. 184, et dans les *Annuaires* des années suivantes, des Tables pour l'ap-

plication de la formule de Laplace, dressées par M. Mathieu. Dans ces Tables, la formule (10) est écrite d'une façon un peu différente qu'on peut obtenir comme il suit :

On peut remplacer d'abord le produit $\left(1+\frac{z_1}{R}\right)\left(1+\frac{z_1}{R}+\frac{Z}{R}\right)$ par $\left(1+\frac{2z_1}{R}\right)\left(1+\frac{Z}{R}\right)$, en négligeant des termes de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$; puis le produit $(1+0{,}00265\cos 2L)\left(1+\frac{Z}{R}\right)$ par $\left(1+0{,}00265\cos 2L+\frac{Z}{R}\right)$ en négligeant le produit de $\frac{Z}{R}$ par le terme en $\cos 2L$. Nous aurons alors, en écrivant la formule (10) après ces changements et tenant compte séparément des deux termes du dernier facteur,

$$Z = 18336^m \log\frac{h_1}{h_2'}(1+\alpha\tau)\left(1+0{,}00265\cos 2L+\frac{Z}{R}\right)\left(1+\frac{2z_1}{R}\right)$$
$$+ 15926^m\frac{Z}{R}(1+\alpha\tau)\ldots.$$

En négligeant, dans la deuxième ligne, les termes contenant $\frac{1}{R^2}$ ou le produit de $\frac{1}{R}$ par $\alpha\tau$ ou par $0{,}00265\cos 2L$, on voit qu'elle se réduit au terme $15926\frac{Z}{R}$. Faisant passer ce terme dans le premier membre, on a la valeur de $Z\left(1-\frac{15926}{R}\right)$; pour résoudre par rapport à Z, il faut diviser le deuxième membre par $1-\frac{15926}{R}$ ou le multiplier par l'inverse de ce nombre, qui est approximativement $1+\frac{15926}{R}$.

Finalement, on peut écrire, en faisant encore une fois l'approximation qui consiste à remplacer $(1+\varepsilon)(1-\varepsilon')$ par $1+\varepsilon+\varepsilon'$,

$$Z = 1836^m \log\frac{h_1}{h_2'}\left[1+2\frac{(\tau_1+\tau_2)}{1000}\right]$$
$$\times\left(1+0{,}00265\cos 2L+\frac{Z+15926}{6366198}\right)\left(1+\frac{z_1}{3183099}\right),$$

qui est la formule pour laquelle sont construites les Tables de l'*Annuaire*.

Cette formule, étant basée sur l'hypothèse d'un équilibre statique de l'atmosphère, ne peut servir que quand l'air est calme; l'approximation sur une différence d'altitude peut alors être estimée à une dizaine de mètres; mais, dans les temps de bourrasques, les erreurs peuvent atteindre des valeurs invraisemblables.

631. Cas où les forces dérivent d'une fonction de forces. — Dans l'application que nous venons de faire à la pesanteur, la

force rapportée à l'unité de masse dérive d'une fonction de forces. Supposons, d'une manière générale, que cette circonstance se présente et appelons $U(x, y, z)$ la fonction de forces. L'équation d'équilibre est alors

$$dp = \rho\, dU.$$

Cette équation montre d'abord que p est fonction de U seulement; en effet, si l'on se déplace dans le fluide de telle façon que U reste constant, dU est nul, donc dp est nul et p reste constant. Ainsi

$$p = \varphi(U).$$

Les surfaces d'égale pression ou surfaces de niveau se confondent donc avec les surfaces $U = \text{const.}$

Remplaçons p par cette expression dans l'équation d'équilibre et désignons par φ' la dérivée de φ; nous aurons

$$\rho = \varphi'(U).$$

Les surfaces d'égale densité se confondent donc avec les surfaces de niveau.

Enfin, l'équation caractéristique entre p, ρ et τ montre que τ est également une fonction de U, c'est-à-dire que les surfaces d'égale température coïncident aussi avec les surfaces de niveau.

632. Application. Équilibre relatif d'un liquide pesant animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe. — Imaginons un liquide pesant de densité ρ animé d'un mouvement de rotation uniforme, de vitesse angulaire ω, autour d'un axe vertical fixe ascendant Oz. Cherchons si ce liquide peut prendre un état d'équilibre relatif par rapport à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz tournant autour de Oz avec cette même vitesse.

Pour cela, on peut regarder les axes mobiles comme fixes, à condition d'ajouter à la pesanteur la force centrifuge (*voyez* Chap. XXII). Soit dm un élément de masse de coordonnées relatives x, y, z : le poids de cet élément a pour projections sur les axes Ox, Oy, Oz les quantités o, o, $-g\,dm$; la force centrifuge est dirigée suivant la perpendiculaire abaissée de l'élément considéré sur l'axe Oz, elle tend à éloigner l'élément de l'axe et elle a

pour intensité $\omega^2 r\,dm$, r étant la distance de l'élément à l'axe; par suite, la force centrifuge a pour projections $\omega^2 x\,dm$, $\omega^2 y\,dm$, o. La résultante des forces qu'il faut appliquer à l'élément dm a donc pour projections $\omega^2 x\,dm$, $\omega^2 y\,dm$, $-g\,dm$, et la force X, Y, Z rapportée à l'unité de masse est

$$X = \omega^2 x. \qquad Y = \omega^2 y, \qquad Z = -g.$$

L'équation d'équilibre est alors

$$dp = \rho[\omega^2(x\,dx + y\,dy) - g\,dz].$$

Actuellement, la force X, Y, Z dérive d'une fonction de forces uniforme

$$U = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz,$$

et l'on peut écrire

$$dp = \rho\,dU;$$

on pourra donc appliquer à cet exemple toutes les conclusions du numéro précédent.

Les surfaces de niveau sont

$$U = \text{const.};$$

ce sont des paraboloïdes de révolution autour de Oz tous égaux, la parabole méridienne ayant pour paramètre $\frac{g}{\omega^2}$.

La surface libre du liquide supposée en contact avec l'air immobile est une surface de niveau, car, sur cette surface, la pression est constante et égale à la pression atmosphérique p_a. La constante arbitraire figurant dans l'équation de la surface libre se détermine par cette condition que la masse liquide limitée par les parois du vase et la surface libre a une grandeur donnée.

Si le liquide est à une température constante, ρ est constant; alors, en intégrant, on a

$$p = \rho\left[\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz + c\right],$$

où c est une constante, et la surface libre a pour équation

$$\frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) - gz = c',$$

où c' est une autre constante déterminée comme nous l'avons dit. On obtient ensuite c en écrivant que, sur la surface libre, $p = p_a$, ce qui donne

$$p_a = \rho(c' + c).$$

Exercice. — Supposons que le vase soit un cylindre de révolution autour de Oz de rayon R et que, le vase étant au repos, le liquide supposé homogène s'y élève à la hauteur h. On fait tourner le vase avec la vitesse ω; démontrer que, si l'origine O est au fond du vase, la surface libre a pour équation

$$\omega^2(x^2 + y^2) - 2gz = \omega^2 \frac{R^2}{2} - 2gh,$$

tant que

$$\omega^2 \leq \frac{4gh}{R^2}.$$

Si $\omega^2 > \frac{4gh}{R^2}$, le fond se découvre et la surface libre a pour équation

$$\omega^2(x^2 + y^2) - 2gz = \omega R(\omega R - 2\sqrt{gh}).$$

Tant que le fond ne se découvre pas, la section de la surface libre par le niveau primitif $z = h$ est une circonférence de rayon $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$ indépendant de ω. Ces résultats sont empruntés au Cours de M. Léauté à l'École Polytechnique en 1898.

On a construit un appareil fondé sur la théorie exposée dans ce numéro, permettant de mesurer les vitesses angulaires (*voyez* GREENHILL, *A Treatise on Hydrostatics*, p. 448; 1894).

633. Fluides superposés. — Soient deux fluides superposés : appelons p la pression, ρ la densité dans le premier fluide, et F la force, de projections X, Y, Z, agissant en chaque point du fluide rapportée à l'unité de masse; soient p_1, ρ_1, F_1 les quantités analogues pour le deuxième fluide.

Les deux fluides étant en équilibre, on a, dans le premier,

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = F\rho\,ds\cos\widehat{F, ds},$$

et, dans le deuxième,

$$dp_1 = \rho_1(X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz) = F_1\rho_1\,ds\cos\widehat{F_1, ds}.$$

Le long de la surface de séparation S, la différence $p - p_1$ est *nulle*, car chaque élément de cette surface doit subir la même pression sur ses deux faces, pour que l'équilibre subsiste. *On a*

donc, pour un déplacement quelconque ds effectué sur la surface de séparation, $dp = dp_1$, c'est-à-dire

$$(S) \qquad \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \rho_1(X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz),$$

ou encore

$$(S) \qquad F\rho\cos\widehat{F, ds} = F_1\rho_1\cos\widehat{F_1, ds}.$$

C'est là l'équation différentielle de la surface de séparation.

Cas particuliers. — 1° *Les forces* F *et* F_1 *appliquées aux deux fluides, dérivent de fonctions de forces* U *et* U_1; l'équation différentielle de la surface de séparation est alors

$$(S) \qquad \rho\,dU - \rho_1\,dU_1 = 0.$$

2° *La fonction de forces est la même pour les deux fluides.* Alors U_1 est identique à U; l'équation (S) devient

$$(\rho - \rho_1)\,dU = 0.$$

Comme $\rho - \rho_1$ est différent de zéro, on a, le long de la surface de séparation

$$dU = 0, \qquad U = \text{const.};$$

la surface S est une *surface de niveau.* C'est la généralisation de ce qui a lieu pour deux fluides pesants supposés (n° **629**).

3° *Les deux fluides superposés sont des liquides à température constante.* Alors ρ et ρ_1 sont constants; le long de la surface de séparation, on a

$$\rho\,dU - \rho_1\,dU_1 = 0, \qquad \rho U - \rho_1 U_1 = \text{const.},$$

ce qui donne l'équation de la surface S *sous forme finie.*

634. Principe d'Archimède. — Imaginons un fluide en équilibre sous l'action d'un certain système de forces; soit, comme plus haut, F la force qui agit sur le fluide en un point quelconque M, rapportée à l'unité de masse.

Supposons qu'un corps solide soit plongé dans ce fluide et maintenu immobile. Sur chaque élément superficiel $d\sigma$ du corps, le fluide exerce une pression normale $p\,d\sigma$. L'ensemble de ces pressions constitue un système de forces appliquées à un corps solide; elles peuvent donc être réduites à une résultante générale OR

appliquée en un point O pris à volonté et à un couple dont l'axe OG est le moment résultant de toutes les pressions $p\,d\sigma$ par rapport au point O. Le principe d'Archimède permet d'évaluer la résultante OR et le couple OG d'une manière simple.

Enlevons le corps solide et, sans toucher au fluide extérieur au corps, remplaçons le corps par du fluide de même nature soumis à la même loi de forces F et disposé de façon que le système entier, constitué par le fluide primitif et celui qui a remplacé le corps, reste en équilibre sous l'action des forces considérées. Prenons, en particulier, l'ensemble des forces $F\rho\,d\tau$ *agissant sur les éléments de volume du fluide qui remplace le corps;* soient OR′ et OG′ la résultante générale et le moment résultant de ces forces par rapport au même point O. On a alors le théorème suivant :

La résultante OR *est égale et opposée à* OR′, *le moment* OG *égal et opposé à* OG′.

En effet, les forces extérieures appliquées au fluide qui remplace le corps solide sont :

1° Les pressions $p\,d\sigma$ s'exerçant sur la surface de ce fluide, pressions identiques à celles qui s'exerçaient sur la surface du corps solide;

2° Les forces $F\rho\,d\tau$ agissant sur les éléments de volume $d\tau$ de ce fluide.

Comme le fluide qui remplace le corps solide est en équilibre, les forces extérieures qui lui sont appliquées satisfont aux conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide. *L'ensemble des pressions* $p\,d\sigma$ *et des forces* $F\rho\,d\tau$ *est donc équivalent à zéro :* où, ce qui revient au même, la résultante générale OR et le moment résultant OG des forces $p\,d\sigma$ par rapport à un point O, sont égaux et opposés à la résultante générale OR′ et au moment résultant OG′ des forces $F\rho\,d\tau$ par rapport au même point.

Le théorème est donc démontré.

Exemple : *Corps immergé dans un fluide pesant.* — Imaginons un corps maintenu immobile dans un fluide pesant en équilibre. L'ensemble formé : 1° par les pressions $p\,d\sigma$ appliquées aux éléments superficiels de ce corps; 2° par les poids $g\rho\,d\tau$ des éléments de volume du fluide pesant qu'il faudrait substituer au

corps pour maintenir l'équilibre du fluide environnant, *est équivalent à zéro.*

Comme les forces verticales $g\rho\, d\tau$ sont équivalentes à une force unique égale au poids du fluide qu'il faudrait substituer au corps, on voit que les pressions $p\, d\sigma$ du fluide sur le corps ont une résultante unique égale et opposée au poids du fluide qu'il faudrait substituer au corps pour maintenir l'équilibre. On dit, pour abréger, que le corps subit, de la part du fluide pesant, une poussée verticale égale et directement opposée au poids du fluide déplacé.

Ce résultat s'applique à un corps plongé dans l'air immobile, ou dans l'eau immobile, ou partiellement dans l'air et partiellement dans l'eau.

635. Ensemble des pressions d'un fluide sur les parois d'un vase fermé qui le contient. — On peut établir un théorème analogue au précédent pour l'ensemble des pressions exercées par un fluide en équilibre sur les parois d'un vase fermé qui le contient.

Sur chaque élément $d\sigma$ de la paroi du vase, le fluide exerce une pression normale $p\, d\sigma$; sur chaque élément $d\tau$ du volume du fluide agit une force extérieure $F\rho\, d\tau$.

L'ensemble des pressions $p\, d\sigma$ *est équivalent à l'ensemble des forces* $F\rho\, d\tau$. Si, en un point quelconque O, on construit la résultante générale et le moment résultant des pressions $p\, d\sigma$, on obtient les mêmes vecteurs qu'en construisant la résultante générale et le moment résultant des forces $F\rho\, d\tau$.

En effet, les forces extérieures agissant sur le fluide sont :

1° Les réactions des parois du vase sur le fluide, réactions *égales et opposées* aux pressions $p\, d\sigma$ du fluide sur le vase;

2° Les forces $F\rho\, d\tau$.

L'ensemble de ces forces est équivalent à zéro, puisque le fluide est en équilibre : l'ensemble des forces $p\, d\sigma$ est donc équivalent à l'ensemble des forces $F\rho\, d\tau$.

Par exemple, si un fluide soumis uniquement à la pesanteur est contenu dans un vase clos, les forces $F\rho\, d\tau$, appliquées aux éléments de volume, sont les poids $g\rho\, d\tau$ de ces éléments; les pressions $p\, d\sigma$ sur les parois du vase étant, dans leur ensemble, équivalentes aux poids $g\rho\, d\tau$ ont une résultante unique égale au poids total du fluide, résultat qu'on peut regarder comme évident *a priori*.

II. — ÉQUILIBRE ISOTHERME.

636. Équilibre isotherme. — Nous examinerons en détail le cas simple où la température est constante dans toute l'étendue du fluide en équilibre. On dit alors que l'équilibre est *isotherme*.

637. Dans l'équilibre isotherme, les forces appliquées à l'unité de masse dérivent nécessairement d'une fonction de forces uniforme dans l'étendue du fluide. — Si la température τ est constante dans toute l'étendue du fluide, la relation caractéristique devient une équation entre les deux seules variables p et ρ; nous supposerons cette relation résolue par rapport à ρ.

Équation caractéristique :

$$\rho = f(p).$$

La fonction $f(p)$ est uniforme et essentiellement positive. Par exemple, pour un gaz parfait à température constante,

$$\rho = Cp,$$

C désignant une constante positive; pour un liquide incompressible,

$$\rho = c,$$

c étant une constante positive.

Les équations d'équilibre sont résumées dans l'équation unique

$$dp = \rho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \tag{11}$$

où dx, dy, dz sont arbitraires. Comme on a

$$\rho = f(p),$$

on peut écrire cette équation

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\int \frac{dp}{f(p)}.$$

Donc $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est la différentielle totale exacte de la fonction

$$P = \int \frac{dp}{f(p)}.$$

Cette quantité P est une fonction uniforme de la pression p ; mais, comme p est une fonction uniforme de x, y, z dans toute l'étendue du fluide, P est une fonction uniforme de x, y, z; ce qui démontre le théorème.

Inversement, supposons un fluide, à température constante, sollicité par des forces telles que la force X, Y, Z, rapportée à l'unité de masse, dérive d'une fonction de forces uniforme $U(x, y, z)$. Le fluide peut alors prendre une position d'équilibre et, dans cette position, la pression et la densité se déterminent comme il suit :

L'équation d'équilibre (n° 631) s'écrit

$$dp = \rho\, dU, \qquad \frac{dp}{\rho} = dU,$$

ou, en remplaçant ρ par $f(p)$ et intégrant,

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} = U - U_0; \tag{12}$$

dans cette équation, p et p_0 désignent les pressions en deux points M et M_0 du fluide, U et U_0 les valeurs de la fonction U en ces mêmes points. En la résolvant par rapport à p, on voit qu'elle détermine la pression en chaque point M du fluide, dès qu'on la connaît en un point particulier M_0. On a ensuite $\rho = f(p)$.

Ce sont là des cas particuliers des théorèmes établis au n° 631.

Par exemple, dans un liquide pesant à température constante, on a, en prenant un axe Oz vertical descendant, et supposant l'intensité de la pesanteur constante dans toute l'épaisseur du liquide,

$$U = gz.$$

L'équation d'équilibre, où ρ est constant, donne alors

$$\frac{dp}{\rho} = g\, dz, \qquad \frac{p - p_0}{\rho} = g(z - z_0).$$

Si l'on appelle z_0 le z de la surface libre supposée en contact avec l'air au repos, la pression p_0 sur un élément quelconque de cette surface est la pression atmosphérique, qui est connue. La formule détermine alors la pression en un point quelconque.

Liquide incompressible. Principe de Pascal. — Dans un li-

quide à température constante, ρ est *constant*. L'équation

$$\frac{dp}{\rho} = dU$$

donne alors immédiatement

$$\frac{p - p_0}{\rho} = U - U_0,$$

équation qui détermine la pression en chaque point, dès qu'on connaît sa valeur au point particulier M_0.

Supposons que, par un procédé quelconque, on fasse varier la pression au point particulier M_0, en lui faisant prendre une valeur $p_0 + \delta p_0$; un nouvel état d'équilibre s'établit et, en un point M quelconque du liquide, la pression prend une nouvelle valeur $p + \delta p$. D'ailleurs les quantités ρ, U, U_0 ne varient pas. La nouvelle équation d'équilibre est donc

$$\frac{p + \delta p - p_0 - \delta p_0}{\rho} = U - U_0.$$

D'où, en comparant avec la précédente,

$$\delta p = \delta p_0.$$

Donc, *dans un liquide en équilibre, les pressions se transmettent intégralement dans tous les sens.* Tel est le principe de Pascal; une application importante de ce principe est la *presse hydraulique.*

Gaz parfait à température constante. — Pour un gaz parfait, quand τ est constant, on a

$$\rho = C p;$$

l'équation d'équilibre devient

$$\frac{dp}{p} = C\, dU,$$

d'où, en intégrant,

$$\operatorname{Log} \frac{p}{p_0} = C(U - U_0),$$

$$p = p_0 e^{C(U - U_0)}.$$

Transmission des pressions dans un fluide en équilibre isotherme. — Cherchons ce que devient le principe de Pascal pour

un fluide quelconque en équilibre isotherme. Reprenons l'équation d'équilibre

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)} = U - U_0, \tag{13}$$

qui détermine la pression p dans toute la masse, dès qu'on la connaît en un point M_0. Supposons que, dans un deuxième état d'équilibre, la pression au point M_0 soit $p_0 + \delta p_0$ et cherchons la nouvelle valeur $p + \delta p$ que prend la pression en un point quelconque M; l'équation d'équilibre (13) devient alors

$$\int_{p_0+\delta p_0}^{p+\delta p} \frac{dp}{f(p)} = U - U_0. \tag{14}$$

On en conclut, en retranchant ces deux équations membre à membre,

$$\int_{p}^{p+\delta p} \frac{dp}{f(p)} = \int_{p_0}^{p_0+\delta p_0} \frac{dp}{f(p)}.$$

Cette formule détermine δp en fonction de δp_0; elle donne la généralisation du principe de Pascal.

Dans le cas particulier où δp_0 est infiniment petit, δp l'est aussi; chacune des intégrales ci-dessus ne renferme qu'un élément et la relation devient

$$\frac{\delta p}{f(p)} = \frac{\delta p_0}{f(p_0)},$$

ou, comme $\rho = f(p)$,

$$\frac{\delta p}{\rho} = \frac{\delta p_0}{\rho_0}.$$

Donc *les variations infiniment petites de pression se transmettent en chaque point proportionnellement à la densité en ce point.*

638. **Cas où les forces dérivent d'une fonction de forces non uniforme.** — Nous avons vu plus haut que, dans l'équilibre isotherme, les forces dérivent nécessairement d'une fonction de forces *uniforme dans toute la masse.* Si donc les forces dérivent d'une fonction de forces *non uniforme dans la masse fluide,* l'équilibre est *impossible.*

Supposons, par exemple, que la fonction de forces soit

$$U = \text{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Les surfaces de niveau U = const. sont des plans passant par Oz, et la valeur de U en un point M est l'angle que fait le plan zOM avec le plan zOx. La force dérivant de U, qui agirait sur un point de masse 1 placé en M, est perpendiculaire au plan zOM et dirigée, par rapport à ce plan, du côté des U croissants, c'est-à-dire *dans le sens positif* des rotations autour de Oz; elle tendrait donc à faire tourner ce point dans le sens positif des rotations autour de Oz. On trouvera dans le Chapitre IV, premier Volume, une figure se rapportant à cette question.

Cela posé, imaginons d'abord un liquide de densité constante ρ, contenu dans un vase clos à connexion simple, comme un ellipsoïde, *non traversé* par l'axe Oz.

Dans ce vase, chacune des déterminations de U, suivie par continuité, est *uniforme,* car le point x, y, z ne peut pas tourner autour de Oz sans traverser les parois du vase. Le liquide prendra donc un état d'équilibre, dans lequel la pression sera déterminée par la formule

$$\frac{p-p_0}{\rho} = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tang}\frac{y_0}{x_0}, \tag{15}$$

où p_0 est la pression au point particulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Cette formule donne pour p une seule valeur au point $M(x, y, z)$, car la différence des deux arcs tang du deuxième membre est la variation que subit la valeur de arc tang $\frac{y}{x}$ *suivie par continuité dans la masse liquide du point* M_0 *au point* M; cette variation est l'angle dont tournerait dans le sens positif autour de Oz un mobile allant de M_0 en M dans le liquide.

Le fait que l'équilibre s'établit est d'ailleurs évident *a priori,* car les parois du vase empêchent le liquide de tourner autour de Oz sous l'action des forces supposées.

Imaginons, au contraire, que le vase contenant le liquide ait la forme d'un tore ayant Oz pour axe : alors la fonction U n'est plus uniforme dans la masse fluide; en effet, si, partant d'un point quelconque M de cette masse, on se déplace dans le fluide en faisant un tour autour de Oz et revenant au point de départ, la fonction des forces, suivie par continuité, possède, au commencement, une valeur U et, à la fin, la valeur $U \pm 2\pi$. L'équilibre est donc impossible. C'est ce qu'on voit *a priori,* car, la force qui agit sur chaque molécule tendant à faire tourner la molécule autour de Oz dans le sens positif, le liquide tout entier se met à tourner autour de cet axe.

Pour empêcher ce mouvement, on pourrait placer dans le tore une cloison AB coïncidant avec le plan d'un méridien; mais cette cloison, adjointe aux parois du tore, déterminerait un nouveau vase dans lequel U *serait uniforme;* on ne pourrait plus, sans traverser les parois du vase, faire dans le liquide un tour autour de Oz. Cette cloison est alors, pour la fonction U, une coupure rendant cette fonction uniforme, comme les coupures employées dans la théorie des fonctions. L'équilibre étant établi

dans ces conditions, la formule (15) montre que, sur les deux faces de la cloison, les valeurs de la pression diffèrent de $2\pi\rho$.

Des circonstances analogues à celles que nous venons d'indiquer se présentent dans l'équilibre d'un liquide soumis à des actions électromagnétiques (*voyez* une Note de M. LIPPMANN, *Comptes rendus*, 3 novembre 1884). Nous reviendrons sur ce point dans la Dynamique des fluides.

639. **Surface libre des mers dans l'hypothèse d'un noyau terrestre sphérique.** — On sait que la surface des mers, que l'on regarde comme la surface moyenne de la Terre, n'est pas sphérique; elle peut être assimilée à un ellipsoïde aplati de révolution autour de la ligne des pôles. Essayons de nous rendre compte de ce fait en regardant la Terre comme formée d'un noyau sphérique composé de couches concentriques homogènes, recouvert d'une couche d'eau; nous négligeons d'ailleurs l'attraction newtonienne des molécules d'eau les unes sur les autres.

Dans ces conditions, l'attraction de la Terre sur une molécule liquide est la même que si toute la masse du noyau était concentrée au centre. Soient a le rayon équatorial des mers, b le rayon polaire, R le rayon moyen de la Terre;

$$R = \frac{a+b}{2}.$$

Appelons A l'intensité de l'attraction du noyau sur l'unité de masse à la distance R du centre; à la distance r du centre, elle est $\frac{AR^2}{r^2}$. Si nous prenons comme origine le centre de la Terre, comme axe Oz l'axe polaire et comme axes Ox et Oy deux axes liés à la Terre dans le plan de l'équateur, pour étudier l'équilibre relatif des mers, il suffira d'ajouter, à l'attraction du noyau qui agit sur chaque molécule liquide, la force centrifuge calculée comme au n° 632.

L'attraction du noyau sur une molécule de masse 1 dérive de la fonction des forces $\frac{AR^2}{r}$ et la force centrifuge appliquée à la même molécule de la fonction $\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$, ω étant la vitesse de rotation de la Terre.

La résultante des forces rapportée à l'unité de masse dérive

donc de la fonction

$$U = \frac{AR^2}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2).$$

L'équation d'équilibre est alors

$$dp = \rho\, dU, \qquad p = \rho U + \text{const.}$$

Les surfaces de niveau ont pour équation U = const. En particulier, la surface libre, sur laquelle la pression est regardée comme constante, est une surface de niveau. L'équation de cette surface est donc

$$\frac{AR^2}{r} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) = C.$$

C'est une surface de révolution dont la méridienne, dans le plan $y = 0$, a pour équation

$$\frac{AR^2}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{\omega^2}{2}x^2 = C, \tag{16}$$

où C est une constante que l'on peut déterminer en écrivant que le rayon polaire ($x = 0$) a une longueur donnée b; on trouve ainsi pour C la valeur $\frac{AR^2}{b}$.

Comme ω est très petit, la courbe méridienne diffère peu d'un cercle, car, si ω était nul, elle se réduirait à un cercle; on s'assure sans peine que sa forme se rapproche de celle d'une ellipse : pour cela, on peut résoudre l'équation par rapport à z^2 et développer z^2 en une série procédant suivant les puissances croissantes de ω^2; en négligeant les termes en ω^4, en obtient l'équation d'une ellipse. Conservons l'équation sous la forme (16), où C a la valeur trouvée plus haut, et cherchons le rayon équatorial a, en faisant $z = 0$, $x = a$; nous avons

$$\frac{AR^2}{a} + \frac{\omega^2}{2}a^2 = \frac{AR^2}{b}.$$

D'où, en transposant, on trouve pour l'aplatissement

$$\frac{a-b}{a} = \frac{R\omega^2}{2A}\,\frac{a^2 b}{R^3}.$$

Comme les rapports $\frac{a}{R}$ et $\frac{b}{R}$ des rayons équatoriaux et polaires au rayon moyen de la Terre sont très voisins de 1, on peut écrire

approximativement

$$\frac{a-b}{a}=\frac{R\omega^2}{2A}=\frac{1}{578},$$

comme il résulte de ce fait déjà signalé dans le Chapitre XXII, § III, que $\frac{R\omega^2}{A}$ est sensiblement égal à $\frac{1}{17^2}$.

Les mesures géodésiques montrent que l'aplatissement est environ $\frac{1}{300}$. Les hypothèses simples qui précèdent sont donc insuffisantes pour rendre compte de la forme de la Terre; en réalité, le noyau solide n'est pas sphérique, mais est lui-même aplati suivant la ligne des pôles (*voyez* GREENHILL, *Treatise on Hydrostatics*, p. 458-459, et KIRCHHOFF, *Mechanik*, zwölfte Vorlesung).

640. Figures ellipsoïdales d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène animée d'une rotation uniforme. — Soit une masse fluide *homogène* limitée par un ellipsoïde; supposons que les éléments de cette masse s'attirent suivant la loi de Newton et que la masse tourne autour d'un de ses axes de symétrie avec une vitesse angulaire constante ω. Cherchons s'il est possible que la masse soit en équilibre relatif, en supposant que la pression sur la surface libre soit nulle ou égale à une constante donnée.

PREMIER CAS. — *L'ellipsoïde est de révolution (aplati) autour de l'axe de rotation.* — Ce cas a été étudié d'abord par Mac Laurin. Prenons l'axe de rotation pour axe Oz, et pour axes Ox et Oy deux axes invariablement liés à l'ellipsoïde tournant. Soient

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1 \tag{17}$$

l'équation de la surface de l'ellipsoïde, ρ la densité du liquide et f la constante de l'attraction universelle. D'après ce que nous avons vu dans la théorie de l'attraction (n° 603), l'attraction de l'ellipsoïde sur un point de masse 1 placé à l'intérieur ou sur la surface a pour projections, sur les axes, des quantités de la forme

$$-Px,\quad -Py,\quad -Rz, \tag{18}$$

où P et R sont des constantes ayant pour valeurs

$$\left\{\begin{aligned} P&=f\frac{2\pi\rho(1+k^2)}{k^3}\left(\operatorname{arc\,tang}k-\frac{k}{1+k^2}\right),\\ R&=f\frac{4\pi\rho(1+k^2)}{k^3}(k-\operatorname{arc\,tang}k), \end{aligned}\right. \tag{19}$$

en posant

$$k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \qquad \frac{a^2}{b^2} = 1 + k^2.$$

D'autre part, la force centrifuge qu'il faut appliquer à un point de masse 1 pour étudier l'équilibre relatif a pour projections (n° 632)

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0. \tag{20}$$

La résultante des forces rapportées à l'unité de masse a donc pour projections

$$X = -(P - \omega^2)x, \qquad Y = -(P - \omega^2)y, \qquad Z = -Rz,$$

et l'équation d'équilibre est

$$dp = -\rho[(P - \omega^2)(x\,dx + y\,dy) + R z\,dz].$$

Comme ρ est constant, on a, en intégrant,

$$p = -\tfrac{1}{2}\rho[(P - \omega^2)(x^2 + y^2) + Rz^2] + C.$$

Les surfaces de niveau $p =$ const. ont donc pour équation

$$(P - \omega^2)(x^2 + y^2) + Rz^2 = \lambda, \tag{21}$$

où λ est une constante arbitraire. Ce sont des ellipsoïdes de révolution homothétiques et concentriques.

Comme, sur la surface libre, la pression est supposée constante, cette surface doit elle-même se trouver parmi les surfaces de niveau. Identifiant les équations (21) et (17), on a

$$a^2(P - \omega^2) = b^2 R;$$

remplaçons $\frac{a^2}{b^2}$ par $1 + k^2$, P et R par leurs valeurs et réduisons, nous aurons finalement une équation de condition qu'on peut écrire

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = \frac{(3 + k^2)\operatorname{arc\,tang} k - 3k}{k^3} \tag{22}$$

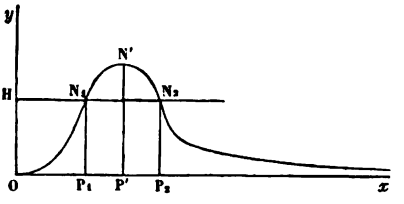
Quand ω et ρ sont donnés, cette équation transcendante détermine k et, par suite, le rapport $\frac{a}{b}$ des axes de l'ellipse méridienne relative à la surface libre ; les axes eux-mêmes sont ensuite déterminés par cette condition que le volume de la masse liquide est connu.

Discussion. — Pour discuter l'équation (22) où k est l'inconnue, faisons varier k de o à ∞ et étudions la variation de la fonction

$$h = \frac{(3 + k^2)\operatorname{arc\,tang} k - 3k}{k^3},$$

qui forme le deuxième membre; nous représenterons cette variation par une courbe obtenue en portant les valeurs de k en abscisse et celles de h en ordonnée (*fig.* 308).

Fig. 308.



Si l'on remplace $\operatorname{arc\,tang} k$ par son développement en série

$$k - \frac{k^3}{3} + \frac{k^5}{5} - \dots,$$

ou voit que, pour de petites valeurs de k, le développement de h commence par le terme $\frac{4}{15}k^2$; donc, pour $k = 0$, h est nul et la courbe est tangente à l'axe Ox au-dessus de cet axe. Si k augmente indéfiniment par valeurs positives, $\operatorname{arc\,tang} k$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, h tend donc vers zéro par des valeurs positives et la courbe est asymptote à Ox. La fonction h de k a donc, au moins, un maximum dans l'intervalle; nous allons voir que ce maximum est unique et le déterminer. Pour cela, calculons la dérivée de h par rapport à k on trouve

$$\frac{dh}{dk} = \frac{k^2 + 9}{k^4}\,\theta(k),$$

en posant

$$\theta(k) = \frac{7k^2 + 9k}{(k^2 + 1)(k^2 + 9)} - \operatorname{arc\,tang} k.$$

pour avoir le signe de $\frac{dh}{dk}$, il suffit d'étudier le signe de $\theta(k)$; or, cette fonction, pour $k = 0$, est nulle et, pour $k = \infty$, est égale à $-\frac{\pi}{2}$; sa dérivée

$$\theta'(k) = \frac{8k^4(3 - k^2)}{(k^2 + 1)^2(k^2 + 9)^2}$$

est d'abord positive, s'annule pour $k = \sqrt{3}$, puis devient et reste négative;

la fonction $\theta(k)$ partant de zéro est d'abord positive; elle croît jusqu'à un certain maximum correspondant à $k=\sqrt{3}$, puis décroît constamment jusqu'à la valeur $-\frac{\pi}{2}$. La fonction $\theta(k)$ s'annule donc une fois pour une certaine valeur k' plus grande que $\sqrt{3}$: le calcul numérique donne, pour cette racine de $\theta(k)$,

$$OP'=k'=2,53.$$

La dérivée $\frac{dh}{dk}$ s'annule une fois pour $k=k'$; cette valeur rend la fonction h maximum et la valeur de ce maximum est $P'N'=0,224\ldots$

D'après cela, si, dans l'équation (22), le premier membre $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$ a une valeur OH moindre que le maximum 0,224, on trouve pour k deux valeurs OP_1 et OP_2 (*fig.* 308) séparées par la valeur 2,53; il existe donc deux ellipsoïdes de révolution aplatis répondant à la question. Si $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$ devient égal à 0,224, les deux ellipsoïdes se confondent, et si $\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}$ est supérieur à 0,224, il n'existe plus d'ellipsoïde de révolution aplati donnant une figure possible d'équilibre.

En particulier, pour $\omega=0$, une des valeurs de k est nulle, elle donne une sphère; l'autre est infinie, elle donne a infini et b nul. Si ω est très petit, l'un des ellipsoïdes est voisin d'une sphère, l'autre se réduit à un disque elliptique très mince.

La figure de la Terre étant approximativement un ellipsoïde de révolution aplati, il est naturel de chercher à la rattacher à la théorie précédente, en admettant que la Terre a été primitivement une masse fluide homogène.

En prenant comme unité de temps la seconde de temps sidéral, on a pour la Terre

$$\omega=\frac{2\pi}{24.60^2};$$

pour avoir une valeur approchée de la densité moyenne de la Terre, regardons-la comme une sphère homogène de rayon R; son attraction en un point de sa surface de masse 1 est alors la même que si la masse totale était concentrée au centre; cette attraction est d'autre part sensiblement égale à $g=9^m,808$; on a donc approximativement

$$\frac{4}{3}\pi R\rho f=g,$$

d'où, en remplaçant $2\pi R$ par 40000000^m,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}=\frac{4\pi.40000000}{24^2.60^2.3g}=0,0022.$$

L'équation correspondante (22) a alors deux racines en k dont la plus petite seule peut se rapporter à la Terre. En calculant cette racine, on trouve qu'elle donne un ellipsoïde dont l'aplatissement $\frac{a-b}{a}$ est égal à $\frac{1}{231}$, tandis que l'aplatissement de l'ellipsoïde terrestre est $\frac{1}{300}$. Ce désaccord montre que l'on est loin de la réalité en admettant que la Terre ait été à un certain moment une masse fluide *homogène*. On trouvera ce calcul fait d'une façon plus précise dans le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, t. II, p. 89-91.

Remarque. — Il est impossible que la figure d'équilibre soit un ellipsoïde de révolution *allongé*. En effet, en supposant $a < b$, on voit que $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$ serait purement imaginaire, et, en faisant $k = il$, on aurait $l < 1$. L'équation (22) deviendrait alors

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = -\frac{3 - l^2}{il^3} \operatorname{arc\,tang} il + \frac{3}{l^2}. \tag{23}$$

Comme l est < 1, on peut développer $\operatorname{arc\,tang} il$ en série procédant suivant les puissances positives de l, et l'on constate sans peine que l'on obtient, dans le deuxième membre, une série dont tous les termes sont *négatifs;* l'équation (23) est donc impossible.

Deuxième cas : *Ellipsoïde à trois axes inégaux.* — Jacobi a montré que la figure d'équilibre de la masse tournante peut aussi être un ellipsoïde à trois axes inégaux

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{24}$$

où l'axe de rotation de la masse est toujours supposé coïncider avec Oz. D'après la valeur du potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point de son intérieur ou de sa surface (n° 602), l'attraction de l'ellipsoïde sur un point de masse 1 placé à l'intérieur ou à la surface a pour projections

$$-\mathrm{P}x, \quad -\mathrm{Q}y, \quad -\mathrm{R}z, \tag{25}$$

où P, Q, R sont des constantes fonctions de a, b, c :

$$\mathrm{P} = 2\pi abcf\rho \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \quad \ldots; \tag{26}$$

Q et R se déduisent de P par permutation de a, b, c, et $\varphi(\lambda)$ désigne le produit $(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$.

D'autre part, la force centrifuge rapportée à l'unité de masse a pour projections

$$\omega^2 x, \quad \omega^2 y, \quad 0.$$

L'équation d'équilibre est donc

$$\frac{1}{\rho} dp = (\omega^2 - \mathrm{P}) x\, dx + (\omega^2 - \mathrm{Q}) y\, dy - \mathrm{R} z\, dz.$$

Les surfaces de niveau ont pour équation

$$(\omega^2 - \mathrm{P}) x^2 + (\omega^2 - \mathrm{Q}) y^2 - \mathrm{R} z^2 = \text{const.}; \tag{27}$$

ce sont des ellipsoïdes homothétiques et concentriques. Pour que l'ellipsoïde donné soit une figure d'équilibre, il faut qu'il fasse partie de la famille (27), ce qui exige que l'on ait

$$a^2(\mathrm{P} - \omega^2) = b^2(\mathrm{Q} - \omega^2) = c^2 \mathrm{R}; \tag{28}$$

ce sont des équations transcendantes déterminant les rapports de deux des axes au troisième. En leur adjoignant l'équation

$$\frac{4}{3} \pi abc\rho = \mathrm{M},$$

qui exprime que la masse totale de l'ellipsoïde a une valeur donnée M, on a trois équations pour calculer les axes de la figure d'équilibre a, b, c en fonction de M, ρ et ω.

Il s'agit de discuter ces équations. Le cadre de cet Ouvrage ne nous permet pas d'entrer dans le détail de la discussion que l'on trouvera exposée dans le *Traité de Mécanique céleste* de Tisserand, t. II, p. 98. Nous nous bornerons à indiquer la marche et les principaux résultats de cette discussion.

Indications sur la discussion. — On tire, des deux équations (28), les suivantes :

$$\omega^2 = \frac{a^2 \mathrm{P} - b^2 \mathrm{Q}}{a^2 - b^2},$$

$$a^2 b^2 (\mathrm{P} - \mathrm{Q}) + (a^2 - b^2) c^2 \mathrm{R} = 0.$$

Dans ces deux équations, remplaçons P, Q, R par leurs valeurs, nous avons

$$\begin{cases} \dfrac{\omega^2}{2\pi f \rho} = abc \displaystyle\int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \\ (a^2 - b^2) \displaystyle\int_0^\infty \left[\frac{a^2 b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} - \frac{c^2}{c^2+\lambda} \right] \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Le premier membre de la deuxième équation est un produit de deux facteurs.

En égalant à zéro le premier facteur $a^2 - b^2$, on obtient les ellipsoïdes de révolution précédemment étudiés. Pour avoir les ellipsoïdes à trois axes inégaux, il faut égaler l'autre facteur à zéro.

Pour discuter les deux équations (29) ainsi obtenues, il est commode de faire

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{1}{s}, \qquad \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{t}, \tag{30}$$

en posant $\lambda = c^2 x$, où x est une nouvelle variable d'intégration.

On a alors, en faisant

$$\Delta = \sqrt{(1+x)(1+sx)(1+tx)},$$

les deux équations

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} = st \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)(1+tx)\Delta}, \tag{31}$$

$$(1-s-t)\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\Delta^3} - st\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\Delta^3} = 0, \tag{32}$$

devant déterminer s et t en fonction de ω et ρ. Une fois s et t connus, les axes de l'ellipsoïde sont déterminés par la condition que la masse totale M de l'ellipsoïde $\frac{4}{3}\pi abc\rho$ a une valeur donnée M. On a ainsi, en vertu des relations (30),

$$\frac{4}{3}\pi c^3\rho = M\sqrt{st}, \qquad \frac{4}{3}\pi a^3\rho = M\frac{\sqrt{t}}{s}, \qquad \frac{4}{3}\pi b^3\rho = M\frac{\sqrt{s}}{t}. \tag{33}$$

On voit immédiatement sur l'équation (32) que $s + t < 1$, sans quoi les deux parties du premier membre seraient négatives et leur somme ne pourrait pas être nulle. Comme s et t sont positifs, on a donc

$$s < 1 \qquad \text{et} \qquad t < 1,$$

et, par suite,

$$a > c, \qquad b > c;$$

l'axe autour duquel tourne l'ellipsoïde est donc le plus petit des axes.

Voici maintenant comment on détermine s et t par les équations (31) et (32).

Tout d'abord, l'équation (32) établit une relation entre s et t : on démontre que, la valeur de t étant choisie arbitrairement entre 0 et 1, cette équation donne toujours une valeur de s et une seule comprise entre ces limites. Quand t croît de 0 à 1, cette valeur de s décroît de 1 à 0 : il existe donc un nombre τ tel que, t étant pris égal à τ, s soit aussi égal à τ. Ce nombre est

$$\tau = 0{,}3396.$$

Passons maintenant à l'équation (31) : si l'on pose

$$U = st \int_0^\infty \frac{x\,dx}{(1+sx)(1-tx)\Delta},$$

cette quantité U peut être regardée comme fonction de la seule variable indépendante t, la variable s étant liée à t par la relation (32).

Comme s et t sont positifs, cette fonction est positive : elle est nulle pour $t = 0$, et elle redevient nulle pour $t = 1$, car alors $s = 0$.

Donc t variant de 0 à 1, cette fonction U a au moins un maximum. On démontre que ce maximum est unique, qu'il a lieu pour $t = \tau$ et que sa valeur est $U_1 = 0,187\ldots$. D'après cela, pour qu'il existe des valeurs de t vérifiant l'équation (31), il faut et il suffit que

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0,187\ldots.$$

L'équation (31) est alors vérifiée par deux valeurs de t, l'une $t' < \tau$, et l'autre $t'' > \tau$: soient s' et s'' les valeurs correspondantes de s. Les équations (31) et (32) étant symétriques en s et t, si $s = s'$, $t = t'$ constitue une solution, $s = t'$, $t = s'$ en constituera une autre : on a donc

$$s'' = t', \qquad t'' = s',$$

et il n'y a en définitive qu'un ellipsoïde répondant à la question, car échanger s et t, c'est échanger les axes a et b. Dans le cas de

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} = 0,187\ldots, \qquad s = t = \tau,$$

l'ellipsoïde de Jacobi est de révolution.

En particulier, si ω est nul, l'équation (31) donne $st = 0$, donc une des deux quantités s ou t est nulle et l'autre égale à 1. Si ω est très petit, une de ces quantités, t par exemple, est très petite et l'autre s très voisine de 1. Les formules (33), donnant les axes, montrent que c et a sont très petits et ont un rapport voisin de 1, b très grand.

L'ellipsoïde à trois axes inégaux affecte alors la forme d'une aiguille très mince, très longue et à peu près ronde qui tourne autour d'un axe perpendiculaire à sa direction.

Troisième cas : *Cylindre elliptique homogène et indéfini.* — Une masse fluide homogène tournant avec la vitesse ω autour de Oz peut encore être en équilibre relatif sous la forme d'un cylindre elliptique indéfini dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{34}$$

Ce cas peut être considéré comme limite de l'ellipsoïde à trois axes inégaux du numéro précédent, quand on fait croître c au delà de toute limite, ainsi que la masse totale M. En effet, l'équation de l'ellipsoïde se réduit à celle du cylindre pour $c = \infty$. Les valeurs (26) de P et Q deviennent alors, en remarquant que $\frac{c}{\sqrt{c^2-\lambda}}$ tend vers 1 quand c augmente indéfiniment,

$$(35)\quad \begin{cases} P = 2\pi abf\rho \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(b^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}} = 4\pi f\rho \dfrac{b}{a+b}, \\ Q = 2\pi abf\rho \displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}(a^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}} = 4\pi f\rho \dfrac{a}{a+b}; \end{cases}$$

enfin R devient nul.

Les surfaces de niveau (27) deviennent

$$(\omega^2 - P)x^2 + (\omega^2 - Q)y^2 = \text{const.},$$

et, en écrivant que la surface du cylindre (34) est une des surfaces de niveau, on a la condition unique

$$(36)\qquad a^2(P - \omega^2) = b^2(Q - \omega^2),$$

déterminant le rapport des axes a et b.

Discussion. — Si l'on remplace P et Q par leurs valeurs (35), on a, en résolvant par rapport à ω^2 et supprimant le facteur $a - b$,

$$\frac{\omega^2}{\pi f\rho} = \frac{4ab}{(a+b)^2};$$

cette équation du deuxième degré en $\frac{b}{a}$ donne pour ce rapport deux valeurs réelles, inverses l'une de l'autre, à condition que

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\rho} \leq \frac{1}{2}.$$

Ces deux racines donnent la même forme de cylindre, car le cylindre elliptique reste le même quand on permute a et b.

Remarque. — La condition (36) est identiquement satisfaite par $a = b$, quel que soit ω. Il semble donc que le cylindre *circulaire* indéfini soit une figure d'équilibre possible pour toutes les vitesses angulaires de rotation.

Mais il est facile de vérifier que, si ω^2 est supérieur à $2\pi f\rho$, la résultante de la force attractive et de la force centrifuge qui est, en un point

de la surface libre du cylindre, normale à cette surface, est dirigée vers l'extérieur. Les molécules de la surface libre seraient donc alors projetées vers l'extérieur, si une pression extérieure suffisamment grande ne les en empêchait pas. Cela résulte de ce que, en appelant a le rayon de la surface cylindrique de révolution, la force attractive en un point de cette surface est dirigée vers l'axe et égale à $2\pi f\rho a$ et la force centrifuge est dirigée vers l'extérieur et égale à $\omega^2 a$: cette dernière l'emporte donc, dès que ω^2 est supérieur à $2\pi f\rho$. Ce fait a été généralisé par M. Poincaré, comme nous le montrerons dans le numéro suivant.

Résumé des trois cas. — En résumé, on peut établir le Tableau ci-dessous qui donne les figures ellipsoïdales d'équilibre relatif possibles, suivant les diverses valeurs de la vitesse ω.

Pour une masse limitée donnée :

$0{,}224 < \dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho}$ ..... aucun ellipsoïde, de révolution ou non,

$0{,}187 < \dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0{,}224$... deux ellipsoïdes de révolution,

$\dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0{,}187$... deux ellipsoïdes de révolution et un ellipsoïde à trois axes inégaux.

Pour une masse illimitée :

$0{,}5 < \dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 1$..... un cylindre circulaire indéfini,

$\dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho} < 0{,}5$... un cylindre circulaire et un cylindre elliptique.

641. **Théorème de M. Poincaré.** — Imaginons une masse fluide homogène de densité ρ, animée d'une rotation uniforme autour de Oz et soumise à une pression extérieure constante. D'après ce qui précède, aucune des figures ellipsoïdales d'équilibre ne peut exister pour une masse limitée, si $\dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho} > 0{,}224$ et, pour une masse illimitée si cette quantité est plus grande que 1.

M. Poincaré a établi (*Bulletin astronomique*, t. II, p. 117) que *l'équilibre relatif est impossible pour une masse limitée, quelle que soit la forme que l'on donne à cette masse, dès que* $\dfrac{\omega^2}{2\pi f\rho} > 1$. Pour cela, il montre que, l'équilibre relatif étant supposé établi, la résultante des forces d'attraction et de la force centrifuge, qui doit être, en chaque point de la surface libre, normale à cette surface, serait, en certains points de cette surface, dirigée non vers l'intérieur, mais *vers l'extérieur* de la masse

fluide, de sorte que le fluide y serait projeté au dehors, à moins qu'une pression normale suffisante ne s'opposât à ce mouvement.

Le théorème subsiste dans le cas où la masse est soumise, en outre, à des attractions newtoniennes émanant de masses extérieures au fluide et entraînées dans le mouvement de rotation.

Imaginons donc une masse fluide homogène de densité ρ tournant autour de Oz et ayant une certaine figure d'équilibre relatif; soient, comme précédemment, Ox et Oy deux axes entraînés par le fluide. Désignons par W le potentiel $\sum \frac{m}{r}$ de la masse fluide en un point x, y, z de son intérieur ou de sa surface; par W' le potentiel des masses extérieures au fluide au même point. La force newtonienne appliquée à l'unité de masse en un point intérieur x, y, z a pour projections sur les axes

$$f\frac{\partial W}{\partial x}+f\frac{\partial W'}{\partial x},\quad f\frac{\partial W}{\partial y}+f\frac{\partial W'}{\partial y},\quad f\frac{\partial W}{\partial z}+f\frac{\partial W'}{\partial z};$$

la force centrifuge a pour projections

$$\omega^2 x,\quad \omega^2 y,\quad 0.$$

Si, donc, on pose

$$U = fW + fW' + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2),$$

la force rapportée à l'unité de masse, agissant en un point du fluide, dérive de la fonction U. La surface libre est une surface de niveau U = const.; la force appliquée à l'unité de masse placée sur la surface libre S est normale à cette surface et a pour valeur algébrique estimée suivant la normale extérieure $\frac{dU}{dn}$, la dérivée étant prise suivant la normale extérieure.

Ceci posé, appliquons à la fonction U la formule (4) du n° 538, qui est un cas particulier de la formule de Green, en prenant pour volume d'intégration le volume fluide V et pour surface la surface libre S. Nous aurons

$$\iiint_V \Delta U\, d\tau = \iint_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma.$$

Mais on a

$$\Delta W = -4\pi\rho, \qquad \Delta W' = 0,$$

d'après les formules de Poisson et de Laplace (n°s 579-581), et

$$\Delta(x^2+y^2) = 4,$$

comme on le vérifie immédiatement.

L'équation précédente devient donc

$$\iiint_V (2\omega^2 - 4\pi f\rho)\, d\tau = \iint_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma$$

ou, en faisant sortir la constante $2\omega^2 - 4\pi f\rho$ du signe d'intégration et remarquant que la somme des éléments $d\tau$ est le volume V du fluide,

$$2V(\omega^2 - 2\pi f\rho) = \int\int_S \frac{dU}{dn}\, d\sigma.$$

Si ω^2 était supérieur à $2\pi f\rho$, l'intégrale du deuxième membre serait positive, donc $\frac{dU}{dn}$ serait positif en certains points de la surface S et la force serait, en ces points, *dirigée vers l'extérieur.*

642. Indications historiques et bibliographiques; recherches de M. Poincaré. — Le problème de la recherche des figures d'équilibre possibles pour une masse fluide homogène dont les particules s'attirent suivant la loi de Newton et qui est animée d'une rotation uniforme, a donné lieu à d'importants travaux de M. Poincaré.

L'ellipsoïde de Mac-Laurin et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi furent longtemps les seules solutions connues; mais les conditions de stabilité de l'équilibre n'avaient pas été étudiées. M. Mathiessen et Sir W. Thomson (1) démontrèrent l'existence de figures annulaires d'équilibre, mais leur démonstration n'est pas parfaitement rigoureuse : M. Mathiessen supposait, *a priori,* que la section de l'anneau différait peu d'une ellipse; M. Poincaré a montré (*Comptes rendus,* 26 avril 1886) que cette hypothèse est légitime seulement quand la section de l'anneau est très petite. Il a fait une étude approfondie de ces figures et montré, en employant une méthode indiquée par Mme Kowaleski dans son Mémoire : *Sur l'anneau de Saturne* (*Astronomische Nachrichten,* t. CXI; 1885), comment on peut en déterminer les principaux éléments avec une approximation indéfinie; ces figures sont d'ailleurs instables (voyez *Bulletin astronomique,* t. II, mars et septembre 1885).

Dans un autre Mémoire (*Acta mathematica,* t. VII; 1885), M. Poincaré a montré que les diverses figures d'équilibre possible forment des séries linéaires : dans une même série, ces figures dépendent d'un paramètre variable. Telles sont la série des ellipsoïdes de révolution et celle des ellipsoïdes de Jacobi. Il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries différentes : c'est ce que M. Poincaré appelle une *figure de bifurcation.*

M. Poincaré trouve ainsi d'autres formes d'équilibre que les ellipsoïdes et les anneaux; ces figures nouvelles sont en nombre infini, elles sont convexes et ont toutes au moins un plan de symétrie.

M. Poincaré étudie ensuite la stabilité de l'équilibre et il trouve, en particulier, le résultat suivant : si, en suivant une série de figures d'équilibre, on ne rencontre que des figures stables jusqu'à la figure de bifur-

(1) *Treatise on natural Philosophy,* t. II, p. 329.

cation, on n'y trouvera plus ensuite que des figures instables; les figures stables appartiendront à l'autre série.

(*Voyez*, pour des indications plus détaillées, la *Notice sur les travaux scientifiques*, de M. Poincaré; Gauthier-Villars, 1886, et le Tome II de la *Mécanique céleste*, de Tisserand.)

Signalons enfin un Travail de M. Duhem : *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III; 1897).

III. — ÉTUDE PARTICULIÈRE DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES PESANTS.

Dans ce paragraphe et dans le suivant, nous nous occuperons de l'équilibre isotherme des fluides pesants, pris dans une étendue assez petite pour que l'intensité de la pesanteur puisse être regardée comme constante et la direction de la verticale comme invariable dans toute la masse.

Dans cette hypothèse, en prenant un axe vertical Oz dirigé vers le bas, l'équation unique d'équilibre est

$$dp = \rho g\, dz,$$

où g est constant.

Nous nous occuperons d'abord des pressions exercées par un gaz ou un liquide sur les corps solides en contact avec lui, puis de l'équilibre des corps flottants.

643. Gaz en équilibre isotherme. — Supposons un gaz à température constante, placé dans une enveloppe assez petite pour que ρ soit sensiblement constant. En appelant p_0 la pression à l'origine, supposée située dans la masse gazeuse, on aura

$$p = p_0 + \rho g z.$$

Comme ρ est ordinairement très petit, nous nous placerons dans le cas, presque toujours réalisé dans la pratique, où la pression p_0 est assez grande pour que le terme $\rho g z$ soit négligeable devant p_0. C'est ce qui arrive, par exemple, pour une chaudière à vapeur. On a alors

$$p = p_0;$$

la pression peut être regardée comme constante dans toute l'étendue de la masse.

Pressions du gaz sur une surface fermée. — Si l'on plonge un corps solide dans le gaz, chaque élément superficiel $d\sigma$ supporte une pression normale $p_0\, d\sigma$: d'après le principe d'Archimède, la résultante de ces pressions est égale et opposée au poids du fluide déplacé, mais comme nous négligeons $\rho g z$, ce poids est nul, et *les pressions normales* $p_0\, d\sigma$ *se font équilibre.*

Le même fait a lieu pour l'ensemble des pressions exercées par le gaz sur l'enveloppe fermée qui le contient

Pression du gaz sur une paroi plane. — Soit une paroi plane sur laquelle nous considérons une aire déterminée S.

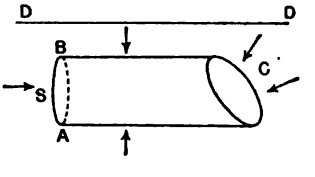
Les pressions $p_0\, d\sigma$ s'exerçant sur les éléments $d\sigma$ de S étant normales à la paroi sont des forces parallèles, de même sens, proportionnelles aux éléments superficiels. Elles ont donc une résultante unique normale à la paroi, égale à la somme $p_0 S$ des composantes et appliquée au centre de gravité de l'aire S.

Pressions du gaz sur une paroi courbe. — Soit C une portion de paroi courbe : sur chaque élément $d\sigma$ de C s'exerce une pression normale $p_0\, d\sigma$; ces forces élémentaires appliquées au corps solide C se réduisent en général à une force et à un couple.

On calculera facilement, par des intégrales doubles étendues à l'aire courbe C, les sommes des projections des pressions élémentaires sur les trois axes de coordonnées et les sommes de leurs moments par rapport aux trois axes. Nous nous bornerons à donner une méthode géométrique que nous empruntons à l'Ouvrage de M. Poincaré, *Cinématique et Mécanismes, ...*, cours professé à la Faculté des Sciences (Carré et Naud; 1899).

Projections. — Pour calculer la somme X des projections des pressions sur une droite D (*fig.* 309), construisons une surface

Fig. 309.



cylindrique ayant ses génératrices parallèles à D et passant par le contour de la surface courbe C : puis menons une section droite AB de ce cylindre, et appelons S l'aire de cette section. La surface

C, la surface cylindrique et la section droite AB forment une surface fermée. Nous avons vu plus haut que les pressions sur les divers éléments de cette surface se font équilibre : la somme de leurs projections sur la droite D est donc nulle. Or cette somme se compose : 1° de la somme X des projections des pressions appliquées à C; 2° de la somme des projections des pressions appliquées à la surface cylindrique, somme qui est évidemment nulle; 3° de la somme des projections des pressions appliquées à la section droite, somme qui est égale à $-p_0 S$.

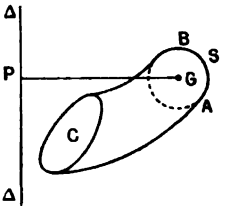
On a donc

$$X - p_0 S = 0;$$

on en conclut que *la somme des projections, sur un axe* D, *des pressions élémentaires qui s'exercent sur une surface* C *est égale à* p_0 *multiplié par la projection orthogonale de* C *sur un plan perpendiculaire à* D.

Moments. — Calculons maintenant la somme M des moments des mêmes pressions par rapport à un axe Δ. Pour cela, construisons la surface de révolution engendrée par la rotation du contour de C autour de Δ; puis coupons cette surface analogue à un tore par un plan passant par Δ de façon à obtenir une section méridienne AB d'aire S (*fig.* 310).

Fig. 310.



Nous aurons ainsi une surface limitée par C, par la surface de révolution et par la section méridienne S. Les pressions appliquées aux éléments de cette surface se faisant équilibre, la somme de leurs moments par rapport à Δ est nulle. Cette somme se compose : 1° de la somme des moments cherchée M; 2° de la somme des moments des pressions appliquées à la surface de révolution, somme qui est *nulle,* car les normales à cette surface rencontrent l'axe Δ; 3° de la somme des moments des pressions appliquées à

la paroi plane S; comme ces pressions ont une résultante $p_0 S$ appliquée au centre de gravité G de S, la somme de leurs moments par rapport à Δ est

$$-p_0 S.\overline{GP},$$

GP étant la distance du centre G à l'axe; le signe — provient de ce que les pressions sur S tendent à faire tourner le corps autour de Δ en sens contraire des pressions sur C.

On a donc

$$M - p_0 S.\overline{GP} = 0.$$

Remarque. — D'après le théorème de Guldin, le volume V de la surface de révolution engendrée par une rotation complète de C ou de S autour de Δ est

$$V = S 2\pi \overline{GP};$$

on a donc

$$M = \frac{p_0 V}{2\pi}.$$

La somme des moments des pressions appliquées à une surface courbe C *par rapport à un axe, est égale au produit de* $\frac{p_0}{2\pi}$ *par le volume de révolution engendré par la rotation de* C *autour de l'axe.*

644. Liquide pesant en équilibre isotherme. Plan de charge. Pressions sur une paroi plane. — Soit maintenant un liquide pesant incompressible et à une température constante : la densité ρ est alors constante, et le poids de l'unité de volume du liquide est

$$\varpi = \rho g.$$

Si l'on prend un axe Oz vertical descendant, l'équation d'équilibre est

$$dp = \varpi\, dz,$$

d'où

$$p - p_0 = \varpi(z - z_0), \tag{1}$$

p_0 désignant la pression à la hauteur z_0.

Le liquide étant supposé en contact avec l'air au repos, la surface libre est horizontale. Supposons que z_0 soit le z de cette

surface libre; alors p_0 est la pression sur la surface libre, c'est-à-dire la *pression atmosphérique*.

La formule (1) donne p en un point quelconque.

Plan de charge. — Nous pouvons écrire

$$p = \varpi\left(z - z_0 + \frac{p_0}{\varpi}\right),$$

expression de la forme

$$p = \varpi(z - z_1), \tag{2}$$

où

$$z_1 = z_0 - \frac{p_0}{\varpi}.$$

Le plan $z = z_1$ est le *plan de charge :* ce plan est situé à une hauteur $\frac{p_0}{\varpi}$ au-dessus de la surface libre.

D'après la formule (2), la pression dans le liquide est la même que si l'atmosphère était supprimée et le niveau du liquide remonté jusqu'au plan de charge. On peut aussi énoncer ce fait de la façon suivante qui le rend intuitif : rien ne serait changé à l'état du liquide, si l'on supprimait l'atmosphère et si l'on ajoutait, au-dessus de la surface libre S_0 du liquide, une couche du même liquide dont la pression sur S_0 fût égale à ce qu'était la pression atmosphérique; par cette opération, le niveau du liquide serait porté jusqu'au plan de charge.

Prenons le plan de charge comme plan des xy : alors

$$z_1 = 0,$$

et la pression en un point quelconque M est donnée par

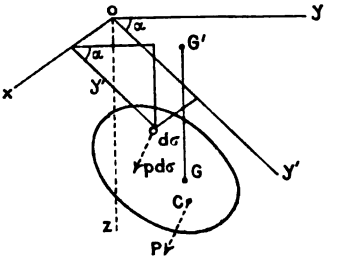
$$p = \varpi z.$$

Pressions sur une surface fermée. — Si l'on plonge dans le liquide un corps solide, d'après le principe d'Archimède, les pressions sur la surface ont une résultante unique égale et directement opposée au poids du liquide déplacé.

Inversement, si l'on imagine dans le liquide une surface fermée creuse remplie par le liquide, les pressions du liquide contenu dans cette surface sur les éléments de la surface ont une résultante unique égale au poids du liquide intérieur.

Pression sur une paroi plane. — Supposons que le vase contenant le liquide ait une paroi plane, et considérons une portion déterminée S de cette paroi limitée par une courbe donnée. Les pressions exercées par le liquide sur les divers éléments $d\sigma$ de

Fig. 311.



l'aire S sont des forces $p\,d\sigma$ normales à la paroi et, par suite, parallèles et de même sens. Elles ont donc une résultante unique P également normale à la paroi et égale à leur somme

$$P = \int\int_S p\,d\sigma = \varpi \int\int_S z\,d\sigma.$$

Pour interpréter géométriquement cette formule, appelons G le centre de gravité de l'aire S supposée homogène et ζ la distance de ce point au plan de charge; on a

$$\int\int_S z\,d\sigma = \zeta S, \qquad P = \varpi \zeta S.$$

Donc, la pression totale P sur l'aire plane S est une force P normale à l'aire, dont l'intensité est égale au poids d'un cylindre du liquide ayant pour base l'aire S et pour hauteur la distance $GG' = \zeta$ du centre de gravité de l'aire S au plan de charge.

Comme $\varpi\zeta$ est la pression au centre de gravité de l'aire S, on peut dire aussi que *la pression totale, sur la paroi plane, est égale à l'aire de la paroi multipliée par la valeur de la pression p_G en son centre de gravité :*

$$P = p_G S.$$

Centre de pression. — Cette pression totale P est appliquée en un point C appelé *centre de pression* que l'on détermine immé-

diatement d'après les formules donnant le centre d'un système de forces parallèles.

Supposons l'axe Ox à l'intersection du plan de la paroi (*fig.* 311) et du plan de charge; puis menons, dans le plan de la paroi, un deuxième axe Oy' perpendiculaire à Ox; l'angle α du plan de la paroi xOy' avec le plan de charge xOy est l'angle yOy'.

Soient x et y' les coordonnées d'un élément superficiel $d\sigma$ de l'aire S par rapport aux axes Ox, Oy'; la distance z de cet élément au plan de charge est

$$z = y' \sin\alpha,$$

et la pression sur cet élément

$$p = \varpi z = \varpi y' \sin\alpha.$$

Appelons x_1 et y'_1 les coordonnées du centre de pression C par rapport aux axes Ox et Oy'; on a, en écrivant que le moment de la résultante P par rapport à chacun des deux axes Ox et Oy' est égal à la somme des moments des composantes $p\,d\sigma$,

$$\mathrm{P}x_1 = \int\int px\,d\sigma = \int\int \varpi xy' \sin\alpha\,d\sigma,$$

$$\mathrm{P}y'_1 = \int\int py'\,d\sigma = \int\int \varpi y'^2 \sin\alpha\,d\sigma,$$

les intégrales étant étendues à l'aire S; remplaçons P par sa valeur

$$\mathrm{P} = \int\int p\,d\sigma = \int\int \varpi y' \sin\alpha\,d\sigma;$$

nous aurons, en remarquant que ϖ et $\sin\alpha$ sont des facteurs constants,

$$(\mathrm{C}) \qquad x_1 = \frac{\int\int xy'\,d\sigma}{\int\int y'\,d\sigma}, \qquad y'_1 = \frac{\int\int y'^2\,d\sigma}{\int\int y'\,d\sigma}.$$

Ces formules déterminent les coordonnées du centre de pression C; elles peuvent être résumées ainsi :

Le centre de pression est le point où se trouverait le centre de gravité de l'aire S, *si la densité superficielle en chaque*

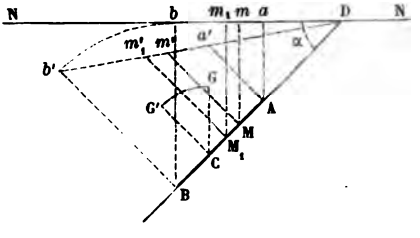
point de cette aire était proportionnelle à la distance du point à la droite d'intersection de la paroi et du plan de charge.

En effet, la droite d'intersection du plan de la paroi et du plan de charge est Ox; la distance d'un élément $d\sigma$ de l'aire à cet axe est y' : si la densité de l'élément $d\sigma$ était égale à y', la masse dm de cet élément serait $y'\,d\sigma$ et les coordonnées du centre de gravité de l'aire S seraient précisément x_1 et y'_1.

Rapprochement avec le centre de percussion. — Le centre de pression de l'aire S coïncide avec le centre de percussion de cette même aire par rapport à la droite d'intersection du plan de la paroi avec le plan de charge. Cela résulte de la détermination du centre de percussion d'une aire plane, telle que nous l'avons donnée (n° **512**).

Représentation géométrique. — Prenons comme plan de la *fig.* 312 un plan perpendiculaire à la paroi et au plan de charge :

Fig. 312.



soient NN la trace du plan de charge et BD celle de la paroi. En chaque point M de la portion considérée S de paroi plane, élevons à la paroi une perpendiculaire Mm' égale à la distance Mm du point au plan de charge. Le lieu des points m' est un plan, en sorte que, si le point M décrit la portion S de paroi, la droite Mm' engendre un cylindre tronqué AB$b'a'$ dont la surface pressée S constitue la section droite de base AB. La pression sur un élément $d\sigma$ de paroi placé en M est égale à ϖM$m'.d\sigma$; si donc on plaçait verticalement le cylindre tronqué que nous venons de construire, rempli de liquide, la pression sur chaque élément $d\sigma$ serait précisément le poids de la colonne verticale de base $d\sigma$ du cylindre tronqué. La pression totale est donc le poids de ce cylindre liquide AB$b'a'$, et son point d'application C est la projection du centre de gravité G' du cylindre tronqué sur la paroi.

EXEMPLES : 1° *Pression sur le fond d'un vase.* — La pression sur le fond horizontal d'un vase est égale au poids d'une colonne cylindrique de liquide ayant ce fond comme base et, comme hauteur, la hauteur même du liquide. Cette pression est donc, en général, différente du poids du liquide : elle peut être, par exemple, de beaucoup supérieure au poids si le vase va en se rétrécissant à partir du fond. Néanmoins, si l'on pèse un vase vide, puis le même vase plein, l'augmentation de poids est évidemment le poids du liquide : cela tient à ce que l'ensemble des pressions exercées par le liquide sur toutes les parois du vase est équivalent à son poids (n° 635).

2° *Pression sur une portion circulaire de paroi.* — *a.* La pression totale est égale au poids d'un cylindre de liquide ayant pour base le cercle et pour hauteur la distance de son centre au plan de charge.

b. Le point d'application C de la pression est sur le diamètre perpendiculaire à la trace du plan de charge, au delà du centre et à une distance du centre égale à une troisième proportionnelle entre la moitié du rayon et la distance du centre à cette trace.

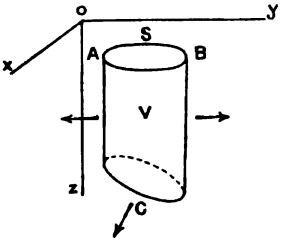
645. **Pressions sur une paroi courbe.** — Soit une portion de paroi courbe C : sur un élément $d\sigma$ de cette paroi s'exerce une pression normale $p\,d\sigma$: ces pressions constituent un ensemble de forces appliquées à un corps solide : elles se réduisent en général à une force et à un couple; ce n'est qu'exceptionnellement qu'elles se réduisent à une force unique. Ce dernier cas se présente toutes les fois que la paroi est une portion de surface sphérique, car les pressions normales $p\,d\sigma$ concourent alors au centre de la sphère et se composent en une résultante unique.

Pour évaluer la somme des projections et la somme des moments de ces pressions par rapport à un axe, on peut suivre une méthode géométrique analogue à celle qui a été suivie pour les gaz.

Somme des projections des pressions sur un axe vertical. — Soit C une portion de paroi courbe, construisons la surface cylindrique verticale ayant pour directrice le contour de C et limitée en AB au plan de charge (*fig.* 313). Nous avons ainsi une surface fermée de volume V remplie de liquide. Les pressions appliquées aux parois de cette surface fermée ont une résultante unique égale au poids ϖV du liquide contenu dans la surface. La somme de leurs projections sur la verticale descendante est donc ϖV. Or, cette somme se compose : 1° de la somme cherchée Z des projections des pressions appliquées à C; 2° de la somme des projections des pressions appliquées à la surface cylindrique qui est nulle, car

ces pressions sont normales aux génératrices; 3° de la somme des pressions appliquées aux éléments de AB qui est nulle, car toutes ces pressions sont nulles.

Fig. 313.



Donc

$$Z = \varpi V.$$

Somme des projections des pressions sur un axe horizontal D. — Si l'on construit une surface cylindrique horizontale ayant pour directrice le contour de C et fermée par une section droite AB d'aire S (*fig.* 309), la résultante de toutes les pressions exercées par le liquide sur les parois du volume ainsi limité est égale au poids du liquide intérieur à ce volume. La somme des projections de toutes ces pressions sur un axe horizontal D est donc nulle. Comme les pressions sur la surface cylindrique ont des projections nulles, on voit que la somme des projections des pressions appliquées à la paroi courbe C est égale, en valeur absolue, à la pression totale sur la paroi plane AB. On a donc, en appelant X la somme des projections des pressions appliquées à C,

$$X - p_G S = 0,$$

p_G étant la valeur de la pression au centre de gravité de l'aire plane S.

Somme des moments des pressions par rapport à un axe vertical Δ. — Construisons la surface de révolution obtenue en faisant tourner l'aire courbe C autour de Δ et menons en AB une section plane méridienne (*fig.* 310). Appelons M la somme des moments des pressions appliquées à C et μ la somme des moments des pressions appliquées à la surface plane AB, par rapport à Δ.

Si l'on considère le volume liquide limité par C, par la surface

de révolution et par la section méridienne AB, les pressions exercées par le liquide intérieur sur la surface limite ont une résultante égale au poids de ce liquide. La somme des moments de ces pressions par rapport à Δ est donc égale au moment du poids qui est *nul,* car Δ est vertical. D'autre part, les pressions, appliquées aux éléments de la surface de révolution, ont des moments nuls, car elles rencontrent Δ; on a donc

$$M - \mu = 0.$$

On est ainsi ramené à calculer μ, c'est-à-dire à résoudre le problème des pressions pour une paroi plane AB.

646. Remarque sur la pression atmosphérique. — Il peut arriver que l'on ait à évaluer les pressions totales sur une paroi qui, par une de ses faces, est en contact avec un liquide pesant ayant une surface libre S_0 et, par l'autre face, avec l'atmosphère. Dans ce cas, un élément $d\sigma$ de paroi situé à une distance $z - z_0$ au-dessous du plan S_0 de la surface libre subit, sur la face en contact avec le liquide, une pression normale

$$[\varpi(z - z_0) + p_0]\, d\sigma,$$

p_0 désignant la pression atmosphérique, et sur l'autre face la pression $p_0\, d\sigma$ en sens contraire. La résultante de ces pressions est donc la force normale $\varpi(z - z_0)\, d\sigma$, c'est-à-dire la même que si l'atmosphère n'existait pas.

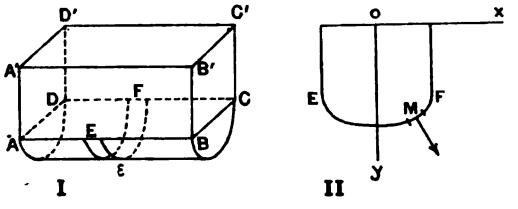
647. Exercice : Toile rectangulaire soumise à la pression d'un liquide pesant. — Imaginons un vase ayant la forme d'un parallélépipède rectangle à arêtes verticales, dont le fond est remplacé par une toile rectangulaire, imperméable, parfaitement flexible et inextensible, attachée par ses bords opposés aux droites AB, CD : les faces AA'D'D et BB'C'C sont supposées prolongées de façon à constituer finalement un vase clos (*fig.* 314, I). On demande quelle forme d'équilibre prendra la toile, quand le vase contiendra un liquide pesant en équilibre.

On peut regarder comme évident que la toile prend la forme d'un cylindre horizontal dont la section droite a une forme indépendante de la longueur AB de la toile.

Pour avoir la forme de cette section droite, il suffit de chercher la figure d'équilibre d'une bande EF de toile comprise entre deux sections droites infiniment voisines dont la distance est ε; nous assimilerons une

bande de ce genre à un fil flexible et inextensible attaché à ses deux extrémités E et F. Prenons comme plan de la figure (*fig.* 314, II) le plan de la bande EF, comme axe Ox le niveau du liquide, comme axe Oy une ver-

Fig. 314.



ticale descendante. Soit ds un élément de longueur de la section droite; l'élément de bande qui se projette en ds a pour surface $d\sigma = \varepsilon\, ds$. La pression atmosphérique s'exerçant sur la surface libre du liquide et sur la face extérieure de l'élément $d\sigma$ n'a point d'effet : tout se passe comme si l'atmosphère était supprimée : la pression résultante sur l'élément $d\sigma$ placé au point M de coordonnées x et y, est alors *normale* à cet élément et égale à $\varpi y\, d\sigma$ ou $\varpi\varepsilon y\, ds$, ϖ désignant le poids de l'unité de volume du liquide.

D'après les équations intrinsèques de l'équilibre d'un fil, la tension T est *constante,* car la force est normale; on a de plus

$$\frac{T}{\rho} = \varpi\varepsilon y,$$

ρ étant le rayon de courbure en M. On a donc, tout le long de la courbe cherchée,

$$\rho y = a^2,$$

a désignant une constante linéaire. Cette dernière relation est l'équation différentielle de la courbe cherchée : son intégration se ramène à des quadratures.

La courbe que nous venons de trouver est identique à la *courbe élastique plane,* c'est-à-dire à la figure d'équilibre d'une lame élastique homogène, dont la fibre moyenne est rectiligne ou circulaire à l'état naturel et que l'on courbe en faisant agir sur ses extrémités des forces et des couples. On trouvera une discussion des formes de cette courbe dans les *Principes de la théorie des fonctions elliptiques,* par MM. Appell et Lacour (Gauthier-Villars, 1895).

IV. — ÉQUILIBRE DES CORPS FLOTTANTS.

648. Indications historiques et bibliographiques. — Archimède est le premier qui se soit occupé de la théorie des corps flottants : il donne des exemples d'équilibre de corps sphériques, cylindriques, paraboliques. Dix-neuf siècles se passèrent avant qu'on revînt aux questions traitées par Archimède. Deux géomètres s'en occupèrent, pour ainsi dire, en même temps : Bouguer, dans le voyage qu'il fit avec La Condamine pour mesurer sous l'équateur un arc du méridien, employait ses loisirs à composer le *Traité du Navire*, tandis qu'Euler, à Saint-Pétersbourg, écrivait son Livre intitulé : *Scientia Navalis*. Vint ensuite Dupin qui, en introduisant les surfaces des flottaisons isocarènes et des centres de carène, donna les principes des méthodes générales encore employées aujourd'hui : le Mémoire de Dupin se trouve reproduit, avec le Rapport de Carnot (1), dans les *Applications de Géométrie et de Mécanique*, par Charles Dupin (Paris, Bachelier, 1822).

La partie la plus délicate de la théorie est l'étude de la stabilité des positions d'équilibre : les positions d'équilibre instable ont une existence purement théorique, et, en réalité, un corps ne peut flotter que dans une position d'équilibre *stable*. Pour qu'une position soit stable il faut qu'en écartant très peu, d'une manière quelconque, le flotteur et le liquide de la position considérée et imprimant au système de petites vitesses initiales, on obtienne un mouvement dans lequel le système reste voisin de la position d'équilibre (*Voyez* IIe Volume, Chap. XXIV, § III).

Bouguer est le premier qui étudia cette question; mais il ne considéra que des déplacements particuliers du flotteur en supposant que le volume immergé restait invariable. Duhamel (2) montra l'insuffisance des raisonnements de Bouguer : il tenta de les compléter en étudiant les petits mouvements du système dans le

---

(1) Rapport de Carnot à la première classe de l'Institut de France sur un Mémoire de Dupin : *De la stabilité des corps flottants* (30 août 1814).

(2) DUHAMEL, *Note sur divers principes de Mécanique : observations sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe Cahier, 1835) et *Traité de Mécanique*, t. II, 2e édition, p. 3-9.

voisinage d'une position d'équilibre ; mais il fit lui-même des hypothèses arbitraires, en admettant que, dans ces petits mouvements, les pressions peuvent être déterminées d'après les règles de l'hydrostatique : néanmoins les conditions qu'il trouva pour la stabilité sont exactes. Les hypothèses faites par Duhamel furent critiquées par Clebsch (1), qui fit voir que certains termes négligés par Duhamel étaient de même ordre de grandeur que les termes conservés : il ne donna d'ailleurs pas, sous une forme simple, les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre.

La première théorie rigoureuse de la stabilité des corps flottants a été donnée par M. Guyou (2), suivant une idée émise par Bravais dans sa thèse soutenue à Lyon en 1837. Cette théorie, fondée sur le théorème de Lejeune-Dirichlet (IIe Volume, Chap. XXIV), est appuyée de démonstrations géométriques très simples et très élégantes que nous reproduisons plus loin. M. Duhem (3) a fait à cette théorie une objection qu'il a ensuite reconnue mal fondée (4).

On trouvera dans le premier Mémoire de M. Duhem un historique de la question plus détaillé que nous ne pouvons le donner ici, suivi d'une solution analytique. Pour les travaux anglais nous renverrons au *Treatise on hydrostatics* de M. Greenhill (1894).

Une question du même genre, mais plus complexe encore, a fait l'objet de quelques travaux récents : c'est l'équilibre d'un navire avec un chargement liquide. Cette question a été étudiée par M. Guyou (*loc. cit.*), par M. Duhem dans divers Mémoires dont on trouvera une énumération détaillée dans le Tome CXXIX des *Comptes rendus* (p. 879; 1899), par M. Greenhill (*loc. cit.*, p. 174) et par M. Appell (*Comptes rendus*, 16 et 23 octobre 1899; *Journal de l'École Polytechnique*, 1900).

---

(1) CLEBSCH, *Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper* (*Journal de Crelle*, t. 57, 1860).

(2) GUYOU, *Théorie nouvelle de la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Revue maritime*, mars 1879) et *Théorie du Navire* (Berger-Levrault, 1re édition, 1887; 2e édition, 1894).

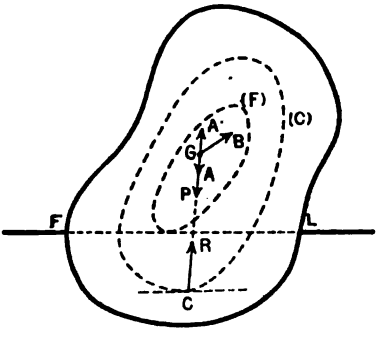
(3) DUHEM, *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. I; 1895).

(4) DUHEM (*Ibid.*, 5e série, t. II; 1896).

649. Conditions nécessaires à l'équilibre d'un corps flottant. — Un solide pesant plongé dans un liquide en repos est soumis : 1° à son poids P appliqué en son centre de gravité G; 2° à la poussée R égale au poids du liquide déplacé et appliquée au centre C du volume immergé (*fig.* 315).

Dans cet énoncé, comme dans tout ce qui suit, nous appelons *centre d'un volume* ou *centre d'une surface* le centre de gravité du volume ou de la surface regardés comme *homogènes*.

Fig. 315.



Pour qu'il y ait équilibre, il faut et il suffit que ces deux forces soient égales et directement opposées. Donc : 1° la droite GC doit être verticale; 2° on doit avoir

$$P = \varpi V,$$

en appelant ϖ le poids de l'unité de volume du liquide et V le volume immergé.

650. Définitions. Flotteurs. — Nous appellerons *flotteur* un solide pesant fermé de toutes parts et dont le poids total est inférieur au poids d'un égal volume d'eau. Il peut arriver que les flotteurs soient des solides creux ouverts à leur partie supérieure, c'est le cas des navires; mais lorsque l'on convient de n'envisager que les inclinaisons telles que le liquide ne peut pas embarquer, on peut évidemment les supposer clos.

Axes d'orientation. — Pour préciser la manière dont le flotteur est orienté dans l'espace, prenons un point du flotteur, son centre de gravité G par exemple (*fig.* 315), et menons par ce point

des demi-droites telles que GA, GB, ... dans toutes les directions : nous appellerons ces demi-droites *axes d'orientation*. Nous dirons alors que le flotteur est orienté suivant un de ces axes, GA par exemple, quand cet axe GA est vertical et *dirigé vers le bas*. Pour le problème qui nous occupe, toutes les positions du flotteur obtenues en le faisant tourner ensuite autour de la verticale GA doivent être regardées comme équivalentes.

Flottaison. — On appelle *plan de flottaison* un plan FL qui détache un volume V, tel que le poids d'un volume V de liquide soit égal au poids total P du flotteur,

$$P = \varpi V, \qquad V = \frac{P}{\varpi}.$$

La section du flotteur par un plan de flottaison est une aire plane qu'on appelle *flottaison*. A chaque axe d'orientation, tel que GA, correspond un plan de flottaison et un seul. En effet, après avoir orienté le flotteur suivant GA (*fig.* 315), faisons-le descendre progressivement dans le liquide en repos : il existera une position et une seule où le volume immergé sera égal à V : la surface libre du liquide donne alors le plan de flottaison cherché : ce plan est perpendiculaire à l'axe GA. La ligne limitant, sur la surface du flotteur, la partie mouillée est le contour de la flottaison correspondante.

Carène. — Le volume détaché par la flottaison est appelé *carène*. Si l'on considère toutes les flottaisons détachant dans un flotteur donné des carènes de même volume V, ces flottaisons sont dites *isocarènes*.

Centre de carène. — Le centre de volume d'une carène se nomme *centre de carène*.

Surface des flottaisons isocarènes ou surface (F). — Étant donné un flotteur, considérons l'enveloppe des plans de flottaison isocarènes : cette enveloppe est une surface fermée (F) que chaque plan de flottaison touche en un point et qu'on appelle *surface de flottaison*. Cette surface affecte, en général, des formes compliquées; mais, dans tous les cas, on peut lui mener deux plans tangents, et seulement deux, parallèles à un plan donné. En effet, abaissons du centre de gravité G une perpendiculaire sur la direction du plan donné, et prenons sur cette perpendiculaire deux

demi-droites GA et GA′ dirigées en sens contraires. A chacun des axes d'orientation GA et GA′ répond un plan de flottaison, et un seul, qui est perpendiculaire à l'axe correspondant. On a donc bien deux flottaisons isocarènes parallèles, donnant deux plans tangents à la surface (F). Mais *il ne faudrait pas conclure* de cette propriété que la surface de flottaison prise dans son ensemble est convexe, pas plus qu'on ne pourrait affirmer qu'une courbe plane fermée à laquelle on peut mener deux, et seulement deux, tangentes parallèles à une direction donnée est convexe; la développée de l'ellipse en est une preuve. Dans le voisinage d'un de ses points, la surface (F) peut, suivant les cas, être d'un même côté du plan tangent ou traverser ce plan.

L'indicatrice des courbures en un point de (F) est donc tantôt une ellipse et tantôt une hyperbole.

Surface des centres de carène ou surface (C). — A chaque flottaison isocarène correspond un centre de carène; le lieu géométrique de ces centres est une surface fermée appelée *surface des centres de carène* ou, par abréviation, *surface* (C). Cette surface est convexe en chacun de ses points : l'indicatrice des courbures en chaque point est une *ellipse*.

Les deux surfaces (F) et (C) sont définies dès qu'on connaît le volume V de la carène et la surface limitant le flotteur.

651. **Théorèmes de Dupin.** — Premier théorème : *Le point de contact de chaque plan de flottaison* FL *avec la surface-enveloppe* (F) *est au centre de la flottaison correspondante.*

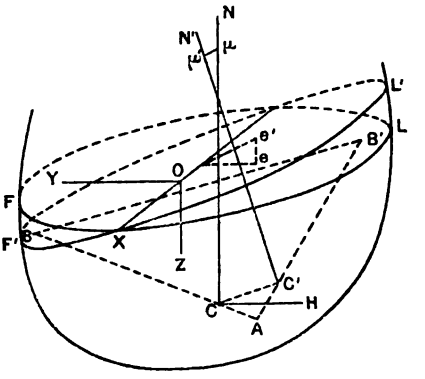
Pour le démontrer, nous nous appuierons sur le théorème de Géométrie suivant :

Si l'on considère un plan tangent à une surface, le point de contact se trouve sur la droite d'intersection de ce plan avec un plan tangent quelconque infiniment voisin.

Soient (*fig.* 316) deux flottaisons infiniment voisines FL et F′L′ dont les plans font entre eux un angle θ; prenons un système d'axes rectangulaires formé par l'intersection OX des deux plans, la perpendiculaire OY dans le plan FL, enfin la perpendiculaire OZ à ce plan vers le bas. Les deux flottaisons étant iso-

carènes, les volumes des onglets LOXL′ et FOXF′ sont égaux. Soient $d\sigma$ un élément du plan des XY placé en e, X et Y ses coor-

Fig. 316.



données et soit Z la cote correspondante ee' du plan F′L′; on a évidemment

$$Z = Y \tan\theta,$$

Pour l'onglet de gauche FXF′, Z est positif et le volume de cet onglet est

$$\int\int Z\, d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue aux éléments $d\sigma$ placés à gauche de OX; pour l'onglet de droite LXL′, Z est négatif et le volume de cet onglet est

$$-\int\int Z\, d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue aux éléments $d\sigma$ à droite de OX.

Ces deux intégrales étant égales, leur différence est nulle, et l'on a

$$\int\int_{FL} Z\, d\sigma = 0,$$

cette dernière intégrale étant étendue à toute la flottaison FL. Remplaçant Z par Y tang θ et supprimant le facteur constant tang θ, on a finalement

$$\int\int_{FL} Y\, d\sigma = 0,$$

l'intégrale étant étendue à toute la flottaison. Mais cette équation signifie que le centre de la flottaison FL est sur OX, c'est-à-dire sur l'intersection de cette flottaison avec une flottaison quelconque infiniment voisine.

Le théorème est donc démontré.

Dans ce qui suit, nous désignerons par O le centre de la flottaison FL, point de contact de la flottaison avec la surface (F). La droite OX, intersection des deux plans infiniment voisins FL et F'L', est l'*axe d'inclinaison* dans le passage de la flottaison FL à F'L'. Voici la raison de cette dénomination :

On peut se représenter physiquement la *fig.* 316 de la façon suivante : Supposons d'abord le flotteur immergé dans l'eau jusqu'à la flottaison FL, puis écartons-le infiniment peu de cette position, en l'inclinant, *de façon que le volume immergé* V *reste le même;* le plan de la surface libre prendra, par rapport au corps, une nouvelle position F'L'. Pour obtenir la nouvelle position du corps, il suffirait d'incliner la figure de façon que le plan F'L' devînt horizontal.

Dans ces deux positions succcessives du corps, l'axe OX reste horizontal; on peut donc imaginer que l'on passe de la première position à la seconde en faisant tourner le corps d'un angle infiniment petit θ autour de l'axe OX. A chaque position du corps infiniment voisine de la première, sous la condition que le volume immergé V reste le même, correspond ainsi un axe d'inclinaison OX passant par le centre O de la flottaison FL.

Pratiquement, on peut incliner un flotteur, un navire par exemple, de façon à lui faire prendre des positions dans lesquelles la carène conserve toujours le même volume. Il suffit pour cela de modifier la distribution intérieure du chargement; le navire prend alors diverses positions d'équilibre qu'on peut faire varier d'une manière continue, mais comme son poids n'a pas changé, le volume immergé est toujours le même.

652. **Deuxième théorème.** — *Le plan tangent en un point* C *de la surface des centres de carène est parallèle au plan de flottaison correspondant* FL.

Soient C le centre de la carène détachée par FL, C' le centre de

la carène détachée par F'L' (*fig.* 316). Ces deux carènes ont une partie commune située au-dessous de F'XL dont nous appellerons le centre A et le volume a. Les deux onglets LXL', FXF' sont équivalents; nous appellerons leurs centres respectifs B et B' et leur volume commun b.

Cela posé, le point C est le centre de l'ensemble des volumes a et b ayant leurs centres respectifs en A et B; on a donc

$$\frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}.$$

De même, C' est le centre des volumes a et b ayant leurs centres en A et B'; d'où

$$\frac{C'A}{C'B'} = \frac{b}{a}.$$

Les points C et C' divisant AB et AB' dans le même rapport, la droite CC' est parallèle à BB' et dirigée dans le même sens que BB'.

Si la flottaison F'L' se rapproche indéfiniment de FL, les points B et B' qui sont compris entre les deux flottaisons tendent à se placer dans le plan FL; le point C' tend vers C et la droite CC' parallèle à BB' tend vers une position limite parallèle au plan FL.

Cette position limite est tangente à la surface des centres de carène en C : ainsi les tangentes à la surface (C) en un point C sont parallèles au plan de flottaison correspondant FL. Ce qui démontre le théorème.

Remarque. — La surface (C) est convexe *en chacun de ses points :* cela veut dire que, dans le voisinage d'un de ses points C, elle est d'un même côté du plan tangent en C. En effet, le plan tangent en C, CH (*fig.* 316), est parallèle à FL; la droite BB' va d'un point B situé au-dessous de FL à un point B' situé au-dessus. La droite CC' de même sens que BB' est donc au-dessus du plan tangent CH, et le point C' est toujours au-dessus de ce plan tangent, quelle que soit la flottaison F'L' voisine de FL. L'indicatrice des courbures en C est donc toujours une *ellipse*.

653. **Définition des métacentres.** — Considérons comme précédemment la flottaison dans deux positions infiniment voisines, l'axe d'inclinaison pour passer de la première à la deuxième étant

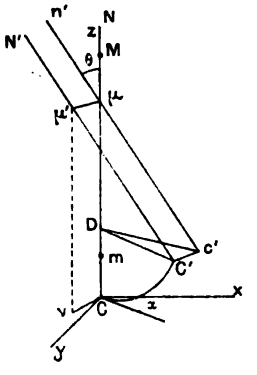
OX (*fig.* 316). Menons les normales CN et C'N' à la surface (C) aux deux centres de carène C et C' correspondant à ces deux positions. Traçons la perpendiculaire commune $\mu\mu'$ à ces deux normales; le point μ est le *métacentre* correspondant à l'axe d'inclinaison OX.

On peut remarquer que $\mu\mu'$ est parallèle à OX, car les deux normales CN et C'N' sont respectivement perpendiculaires aux deux plans de flottaison FL et F'L'.

654. Troisième théorème. — *Le métacentre* μ *est situé en général entre les deux centres de courbure principaux* M *et* m *de la surface* (C) *relatifs au point* C : *il coïncide avec l'un d'eux* M *ou* m *quand l'axe d'inclinaison est parallèle à une des directions principales de la surface* (C) *au point* C.

Ce théorème exprime une propriété générale des surfaces courbes. La surface (C) étant convexe au point C, prenons ce point comme origine d'un système d'axes (*fig.* 317), comme axe

Fig. 317.



des z la normale CN du côté où se trouve la surface, comme axes des x et des y les directions principales en C.

Appelons, suivant l'usage, p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et deuxièmes du z d'un point de la surface par rapport à x et y et affectons de l'indice o les valeurs de ces quantités à l'origine C.

D'après le choix des axes, p_0, q_0, s_0 sont nuls, et l'on a, en

développant z par la formule de Mac-Laurin, pour de petites valeurs de x et y,

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + \dots, \tag{1}$$

où r_0 et t_0 sont positifs, les rayons de courbure principaux en C, CM et Cm ayant pour valeurs $\frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{t_0}$. Les équations de la normale C'N' au point C'(x, y, z) sont

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}. \tag{C'N'}$$

La perpendiculaire $\mu\mu'$ a pour projection sur le plan des xy la perpendiculaire Cν à la projection de C'N' sur ce même plan. Le plan $z\mu\mu'$ a donc pour équation

$$pX + qY = 0. \tag{Cν}$$

En associant cette équation aux équations de C'N', on en déduit les coordonnées du point μ'. Cherchons en particulier le Z de ce point qui est le même que celui de μ. Nous avons, en tirant X et Y des équations (C'N') pour les porter dans l'équation (Cν),

$$Z = z + \frac{px + qy}{p^2 + q^2},$$

ou, d'après les valeurs de p et q tirées de (1),

$$Z = z + \frac{r_0 x^2 + t_0 y^2 + \dots}{r_0^2 x^2 + t_0^2 y^2 + \dots}.$$

Quand C' tend vers C, x, y, z tendent vers zéro et le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers une limite tangα, α étant l'angle que fait avec Ox la direction limite de CC', c'est-à-dire la tangente en C à la courbe suivant laquelle C' tend vers C.

On a ainsi

$$\lim Z = C\mu = \frac{r_0 + t_0 \operatorname{tang}^2\alpha}{r_0^2 + t_0^2 \operatorname{tang}^2\alpha}.$$

La valeur limite de Cμ est donc comprise entre $\frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{t_0}$, c'est-à-dire entre CM et Cm; elle est égale à l'une de ces quantités

quand α est égal à o ou à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand la direction limite de CC′ est une direction principale de la surface en C.

Les centres de courbure M et m correspondant au maximum et au minimum de Cμ s'appellent le *grand* et le *petit métacentres* relatifs au point C.

Remarque. — La direction limite de CC′, de coefficient angulaire tangα, et la direction limite de la perpendiculaire commune $\mu\mu'$ ou de sa parallèle OX sont *conjuguées* par rapport à la conique indicatrice des courbures de la surface (C) au point C.

En effet, la conique indicatrice des courbures est actuellement l'ellipse

$$r_0 x^2 + t_0 y^2 = 1.$$

L'équation de la droite Cν parallèle à $\mu\mu'$ est

$$pX + qY = 0,$$

ou, d'après les valeurs de p et q,

$$(r_0 x + \ldots)X + (t_0 y + \ldots)Y = 0,$$

Quand x et y tendent vers zéro, de façon que $\frac{y}{x}$ tende vers tangα, cette équation devient

$$r_0 X + t_0 Y \tang\alpha = 0,$$

ce qui est l'équation du diamètre conjugué de la direction de coefficient angulaire tangα dans l'indicatrice.

Ce fait résulte aussi géométriquement de ce que $\mu\mu'$ est parallèle à l'intersection des plans tangents en C et C′ (théorème des tangentes conjuguées).

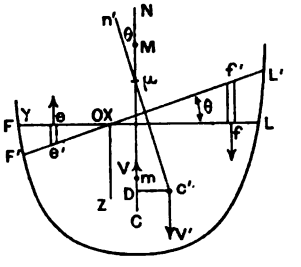
655. Quatrième théorème. — *Soit* I *le moment d'inertie de l'aire de la flottaison par rapport à un axe d'inclinaison* OX, *le métacentre correspondant* μ *est à une distance de* C

$$C\mu = \frac{I}{V}.$$

Considérons, comme plus haut, un plan de flottaison horizontale FL et un plan infiniment voisin F′L′ faisant avec lui l'angle θ et le coupant suivant l'axe d'inclinaison OX.

Pour simplifier, nous représenterons seulement (*fig.* 318) la projection de la figure de l'espace sur le plan mené par la normale CN parallèlement à la normale infiniment voisine C'N'. On peut

Fig. 318.



déterminer ce plan de projection en menant par le métacentre μ (*fig.* 317) la droite μ*n'* parallèle à C'N'; le plan *n'*μN est le plan demandé parallèle aux deux normales; il est perpendiculaire à μμ' et, par suite, à l'axe d'inclinaison OX. L'angle Nμ*n'* est égal à θ. Nous appellerons *c'* la projection de C' sur ce plan; la droite *c' n'* est alors la projection de la normale C'N'.

Prenons, comme précédemment (n° 651), pour axe OY une perpendiculaire à OX dans le plan FL et pour axe OZ une verticale descendante; l'axe OX perpendiculaire au plan de projection sera représenté (*fig.* 318) par un point.

Appelons X, Y, Z les coordonnées d'un point *e'* ou *f'* du plan de la flottaison F'L' par rapport à ces axes, en remarquant que l'on a

$$Z = Y \tang\theta.$$

Soit $d\sigma$ un élément d'aire de la flottaison FL placé en *e* ou *f*, le moment d'inertie de la flottaison par rapport à l'axe OX est

$$I = \int\int Y^2 \, d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la flottaison.

Cela posé, appliquons à tous les éléments de la première carène, limitée par le plan horizontal FL, des forces fictives verticales ascendantes égales à ces éléments : ces forces ont une résultante CV égale à leur somme V appliquée au centre de carène C et dirigée suivant CN. Appliquons de même aux éléments de volume

de la deuxième carène des forces fictives verticales descendantes égales à ces éléments : ces forces ont une résultante unique C'V' égale à leur somme V et dirigée verticalement vers le bas. L'ensemble de toutes ces forces fictives appliquées aux éléments de volume des deux carènes est donc équivalent au couple CV, C'V' dont le bras de levier est C'D, distance de C' à la normale CN. Mais, d'autre part, les forces fictives appliquées aux éléments de volume communs aux deux carènes se détruisent deux à deux, puisque à chacun de ces éléments sont appliquées deux forces égales et opposées; il ne reste donc que les forces fictives appliquées aux éléments des deux onglets FXF' et LXL'. A un cylindre élémentaire *ee'* de base $d\sigma$ et de hauteur Z du premier onglet est appliquée une force verticale ascendante égale au volume $Z\,d\sigma$ de ce cylindre; le moment de cette force par rapport à OX est $YZ\,d\sigma$; de même, à un cylindre élémentaire *ff'* du deuxième onglet ayant pour base $d\sigma$ est appliquée une force verticale descendante égale au volume de ce cylindre : le moment de cette force par rapport à OX est encore $YZ\,d\sigma$.

Les forces appliquées aux éléments des deux onglets étant équivalentes au couple CV, C'V' la somme de leurs moments

$$\iint YZ\,d\sigma$$

par rapport à OX est égale à la projection de l'axe du couple sur OX, ou encore du moment de la projection du couple sur un plan perpendiculaire à OX, c'est-à-dire précisément sur le plan de la *fig.* 318.

Les forces V et V' se projettent en vraie grandeur sur ce plan, le point C' se projette en *c'* et le bras de levier C'D en *c'*D. Le moment du couple projeté est donc $V.c'D$, et l'on a

$$\iint YZ\,d\sigma = V\overline{c'D}.$$

Mais comme chaque ordonnée Z, telle que *ee'* ou *ff'*, est égale à $Y\,\mathrm{tang}\,\theta$, on a

$$\mathrm{tang}\,\theta \iint Y^2\,d\sigma = V\overline{c'D},$$

d'où

$$\frac{I}{V} = \lim \frac{\overline{c'D}}{\mathrm{tang}\,\theta}.$$

D'ailleurs le triangle $\mu D c'$, dans lequel l'angle en μ est égal à θ, donne

$$\frac{\overline{c'D}}{\operatorname{tang}\theta} = D\mu;$$

le point D étant infiniment voisin de C, la limite de $D\mu$ est égale à celle de $C\mu$ et l'on a finalement

$$C\mu = \frac{I}{V}.$$

Le théorème est donc démontré.

Quand l'axe d'inclinaison varie en tournant autour du point O, centre de la flottaison, I varie, le point μ change de position sur la normale CN.

D'après ce qui précède, ce point est constamment compris entre le grand et le petit métacentre M et m et se confond avec l'un d'eux quand la direction limite de CC′ coïncide avec une direction principale de la surface (C) au point C, c'est-à-dire avec un des axes de l'ellipse indicatrice des courbures en C. On en conclut aisément que ce fait a lieu au moment où l'axe d'inclinaison lui-même est parallèle à une des directions principales relatives au point C. En effet, nous avons vu plus haut que la direction limite CC′ et l'axe d'inclinaison OX sont parallèles à deux diamètres conjugués de la conique indicatrice en C. Si donc CC′ coïncide avec une direction principale en C, l'axe d'inclinaison est parallèle à l'autre et réciproquement.

Pour représenter la variation du moment d'inertie I de l'aire de la flottaison par rapport à des axes OX situés dans son plan et passant par son centre O, il suffit de considérer l'ellipsoïde d'inertie de l'aire de la flottaison relatif au point O (Chap. XVII); cet ellipsoïde a évidemment pour plan de symétrie le plan de la flottaison qu'il coupe suivant une ellipse qu'on peut appeler l'*ellipse centrale d'inertie de la flottaison*. Les directions de l'axe d'inclinaison, qui donnent les moments d'inertie maximum et minimum, correspondent alors au petit et au grand axe de cette ellipse. Soit I_0 le minimum de I, le petit métacentre m est à une hauteur

$$Cm = \frac{I_0}{V}.$$

Les directions principales de la surface (C) en C sont parallèles aux axes de l'ellipse centrale d'inertie de la flottaison.

La seule connaissance de la flottaison permet donc de déterminer M, m et les directions principales de la surface (C) en C.

656. **Positions d'équilibre du flotteur.** — Dans l'équilibre, la partie immergée est une carène de volume

$$V = \frac{P}{\varpi},$$

la surface de flottaison est donc tangente à la surface libre du liquide FL supposée prolongée dans le flotteur (*fig.* 315). En outre, la droite GC est verticale, c'est-à-dire perpendiculaire à FL : elle est donc normale en C à la surface des centres de carène, puisque le plan tangent en C à cette surface est parallèle à FL.

Donc le centre de carène correspondant à une position d'équilibre est le pied d'une normale menée du centre de gravité G à la surface des centres de carène.

Réciproquement, à chaque normale GC menée de G à la surface (C) correspondra une position d'équilibre obtenue en immergeant la carène dont le centre est au pied C de la normale considérée. Dans cette position, le centre de gravité peut se trouver soit au-dessus, soit au-dessous de C.

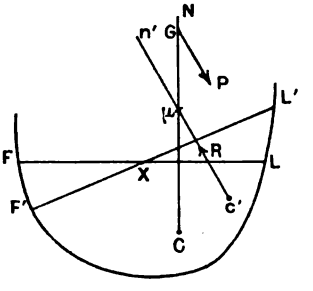
Parmi les positions ainsi obtenues, les unes sont *stables*, les autres *instables*. Les positions d'équilibre instables ne peuvent pas être réalisées : le flotteur, placé dans une position instable, chavire au bout d'un temps très court. Les seules positions dans lesquelles il puisse réellement flotter sont les positions stables.

657. **Premier aperçu sur la stabilité.** — Imaginons que le corps soit en équilibre dans une certaine position, le plan de flottaison étant FL : la droite GC est alors perpendiculaire à FL et normale en C à la surface (C).

Écartons le corps infiniment peu de cette position d'équilibre de telle façon que la carène conserve le même volume V, et soient OX l'axe d'inclinaison correspondant; F'L' la nouvelle position de la surface libre par rapport au corps; C' le nouveau centre de carène.

Nous représentons encore dans la *fig.* 319 la projection de la figure de l'espace sur le plan mené par CN perpendiculairement à

Fig. 319.



l'axe d'inclinaison. Le point C′ se projette en c' et la normale C′N′ en $c'n'$; le métacentre μ est à l'intersection de CN et $c'n'$. Dans cette nouvelle position, le corps est sollicité par son poids P appliqué en G et par la poussée R égale et opposée à P appliquée en C′ : ces deux forces sont d'ailleurs perpendiculaires à F′L′. On voit dès lors que, si, comme dans la figure, G était au-dessus de μ, le couple P, R tendrait à écarter le corps encore davantage de sa position d'équilibre. Pour que l'équilibre soit stable, il faut donc que G soit *au-dessous* de μ; et comme ce fait doit avoir lieu *pour toutes les directions de l'axe d'inclinaison, il faut que* G *soit au-dessous du petit métacentre m*. On a ainsi une condition nécessaire de la stabilité. Mais notre raisonnement ne permet pas de voir si elle est suffisante, car il faut, pour cela, voir ce qui se passe quand on écarte le système entier, corps et liquide, de la position d'équilibre d'une façon quelconque.

Nous montrons plus loin, d'après M. Guyou, comme application du théorème de Dirichlet démontré dans le deuxième Volume, que la condition trouvée comme nécessaire est suffisante pour la stabilité.

658. Stabilité de l'équilibre. Méthode. — Nous avons vu (Chap. XXIV) que lorsqu'un système pesant quelconque est en équilibre, la condition nécessaire et suffisante de la stabilité de l'équilibre est que le centre de gravité du système soit, dans la

position considérée, *le plus bas possible,* c'est-à-dire plus bas que dans toutes les positions infiniment voisines.

On peut ramener l'étude des positions d'équilibre d'un flotteur à l'étude des positions d'équilibre d'un corps pesant limité par une surface courbe par laquelle il est assujetti à rester en contact avec un plan horizontal fixe.

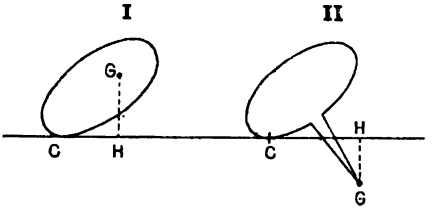
Pour cela, on établit que *l'orientation du flotteur dans les positions d'équilibre et la nature de ces positions (stabilité ou instabilité) sont les mêmes que si le flotteur reposait sur un plan horizontal fixe par la surface des centres de carène.*

C'est ce que nous allons montrer, en établissant d'abord les conditions d'équilibre d'un corps pesant sur un plan horizontal.

659. **Équilibre d'un solide pesant sur un plan horizontal.** — Soit un solide pesant invariablement lié à une surface (C), convexe en tous ses points, et posée sur un plan horizontal fixe (*fig.* 320, I et II).

Soient G le centre de gravité du corps, GH sa distance au plan fixe : les positions d'équilibre stable du corps s'obtiennent en déterminant les positions dans lesquelles $\overline{GH}$ est *minimum;* dans

Fig. 320.



cet énoncé, le segment $\overline{GH}$ doit être regardé comme positif ou comme négatif suivant que le point G est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal; le centre de gravité peut passer au-dessous du plan s'il est à l'extérieur de la surface (C) comme dans la *fig.* 320, II. Si, dans une certaine position, $\overline{GH}$ est un maximum, c'est encore une position d'équilibre, mais *instable.*

Soit C le point de contact du corps avec le plan horizontal; nous allons démontrer que les conditions *nécessaires et suffi-*

santes pour qu'une position du corps soit une position d'équilibre stable sont les suivantes :

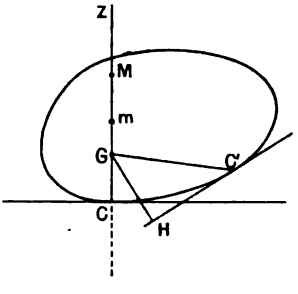
1° *Le centre de gravité doit se trouver sur la normale en* C (*fig.* 321).

2° *Il doit être placé au-dessous des deux centres de courbure principaux de la surface relatifs au point* C.

La première condition est évidente, car, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le poids du corps appliqué en G soit détruit par la réaction du plan appliquée en C : le poids doit donc passer par C; la droite GC doit être normale au plan.

Cette première condition étant remplie, pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit que, dans la position considérée du corps, la distance du point G au plan horizontal fixe soit plus petite que dans toute position infiniment voisine. Au lieu de laisser le plan tangent fixe et de déplacer le corps, il est plus commode de regarder le corps comme fixe dans la position d'équilibre et de déplacer le plan tangent. Il faut et il suffit, pour la stabilité, que la distance $\overline{GC}$ du point G au plan tangent en C

Fig. 321.



soit plus petite que la distance GH du point G aux plans tangents en des points C′ infininiment voisins de C. Prenons comme origine le point C, comme plan des xy le plan tangent en C, comme axes des x et des y les directions principales de la surface en C, comme axe des z la normale Cz du côté où se trouve la surface. Soient x, y, z les coordonnées d'un point C′ de la surface, voisin de C; en employant les mêmes notations que plus haut (n° 634), on a

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + \dots; \qquad (1)$$

les ordonnées des deux centres de courbure principaux M et m (grand et petit métacentre) sont $\frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{t_0}$.

Cela posé, appelons ζ le z du centre de gravité G qui, par hypothèse, est sur Cz; l'équation du plan tangent en C′ est

$$Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0;$$

la distance $\overline{GH}$ du centre de gravité à ce plan est

$$\overline{GH} = (\zeta - z + px + qy)(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

où nous devons prendre le signe + dans le deuxième membre, d'après la convention faite plus haut pour le signe de $\overline{GH}$. En effet, comme au point C, x, y, z, p, q sont nuls; au point C′, voisin de C, ces quantités sont très petites et l'expression de $\overline{GH}$ a le même signe que ζ; elle est donc, d'après le choix des axes, positive ou négative suivant que G est, par rapport au plan tangent, du même côté que la surface ou de l'autre côté.

Il faut maintenant exprimer que cette expression de $\overline{GH}$ est minimum pour $x = y = 0$. D'après le développement de z, on a

$$p = r_0 x + \dots, \qquad q = t_0 y + \dots.$$

et en portant dans $\overline{GH}$:

$$\overline{GH} = \left[\zeta + \frac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + \dots\right](1 + r_0^2 x^2 + t_0^2 y^2 + \dots)^{-\frac{1}{2}}.$$

Développant la puissance $-\frac{1}{2}$ par la formule du binome, faisant le produit et écrivant seulement les termes du deuxième ordre en x et en y, on a

$$(2) \qquad \overline{GH} = \zeta + \frac{1}{2} r_0^2 x^2 \left(\frac{1}{r_0} - \zeta\right) + \frac{1}{2} t_0^2 y^2 \left(\frac{1}{t_0} - \zeta\right) + \dots.$$

Pour que la valeur ζ, qui correspond à $x = y = 0$, soit un minimum de $\overline{GH}$, il faut et il suffit que les coefficients de x^2 et y^2 soient positifs, c'est-à-dire que l'on ait à la fois

$$\zeta < \frac{1}{r_0}, \qquad \zeta < \frac{1}{t_0},$$

ou encore

$$\zeta < CM, \qquad \zeta < Cm.$$

Donc, il faut et il suffit que le point G soit à la fois au-dessous des deux centres de courbure principaux M et m relatifs au point C, c'est-à-dire au-dessous du *petit métacentre m*.

L'expression de $\overline{GH}$ montre que, si G est au-dessus du grand métacentre, la valeur $\overline{GC}$ de $\overline{GH}$ correspondant à $x = y = 0$ est un *maximum*. Si G est placé entre les deux métacentres M et m, la normale GC n'est ni un maximum ni un minimum, car dans l'expression de $\overline{GH}$ les coefficients de x^2 et y^2 sont de signes contraires.

Résumé. — Pour obtenir les positions d'équilibre d'un corps pesant reposant par une surface (C) sur un plan horizontal fixe, il faut mener du centre de gravité des normales à la surface (C); soient GC_1, GC_2, ... ces normales. A chacune d'elles GC répond une position d'équilibre obtenue en mettant le corps en contact avec le plan horizontal par le point C; pour que cette position soit stable, il faut et il suffit que, dans cette position, G soit au-dessous du petit métacentre relatif au point de contact C.

Remarque. — Dans cette théorie, on peut supposer indifféremment le point G à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface (C), à condition de donner un signe à $\overline{GH}$, comme nous l'avons fait. Mais, si cela paraît plus simple, on peut toujours remplacer la surface (C) par une autre contenant le point G à son intérieur.

En effet, construisons une surface (C_1) parallèle à (C), obtenue en portant sur les normales extérieures à (C) une longueur constante l. Pendant que (C) reste en contact avec un plan horizontal fixe P, (C_1) reste en contact avec un plan horizontal fixe P_1 placé à une distance l au-dessous de P, et réciproquement. On peut donc regarder le corps comme assujetti à reposer sur un plan horizontal fixe P_1 par la surface (C_1) : et l'on peut toujours prendre l assez grand pour que G soit à l'intérieur de (C_1).

THÉORÈME. — *La recherche des positions d'équilibre stable peut se ramener à la recherche des plus courtes distances du point* G *à la surface* (C).

Nous venons de voir qu'on obtient les positions d'équilibre stable du corps en cherchant les points où le plan tangent à la surface (C) est à une distance minimum du centre de gravité. On

peut remplacer ce problème par un autre quelquefois plus simple et chercher les points de la surface (C) tels que leur distance au centre de gravité soit un minimum. En effet, pour montrer que ces deux problèmes sont équivalents, remarquons d'abord que, pour que la distance GC du point G à un point C de la surface soit un minimum ou un maximum, il faut que GC soit normal en C. Supposons cette condition remplie et prenons les mêmes axes que plus haut; il faut montrer (*fig.* 321) que si GC est un maximum ou un minimum du segment $\overline{GH}$, la valeur absolue de GC est aussi un maximum ou un minimum de la distance GC′ et réciproquement. Or on a

$$\overline{GC'}^2 = x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2;$$

remplaçons z par son développement (1) et ordonnons $\overline{GC'}^2$ par rapport aux puissances de x et y en nous bornant aux termes du deuxième ordre. Nous avons

$$\overline{GC'}^2 = \zeta^2 + r_0 x^2 \left(\frac{1}{r_0} - \zeta\right) + t_0 y^2 \left(\frac{1}{t_0} - \zeta\right) + \dots.$$

Comme r_0 et t_0 sont positifs, cette fonction est maximum ou minimum pour $x = 0$, $y = 0$, aux mêmes conditions que la fonction $\overline{GH}$ définie par l'équation (2). C'est ce que nous voulions montrer (Poincaré, *Cinématique et Mécanismes, etc.*, p. 298 et suivantes).

Représentation des diverses positions d'équilibre. — Nous empruntons à M. Guyou (*Théorie du Navire*, 2e édition, p. 21), la représentation suivante des diverses positions d'équilibre, représentation qui a été employée pour la première fois par Reech (*Journal de l'École Polytechnique*, 1858).

Imaginons une sphère liquide ayant pour centre le point G que nous supposerons intérieur à la surface du solide considéré; et concevons que cette sphère, ayant d'abord un rayon assez grand pour que la surface entière soit immergée, vienne à s'assécher progressivement. Il arrivera un premier instant où la sphère deviendra tangente à la surface; au point de contact correspondra évidemment une normale maximum abaissée du point G et, d'après ce qu'on vient de voir, pour l'orientation correspondant à cette normale, le point G sera au-dessus du grand métacentre; la

sphère continuant à se dessécher, d'autres points viendront successivement à fleur d'eau; à chacun de ces sommets correspondront des normales de même nature que nous nommerons *normales maxima*. Les *îlots* ainsi formés viendront bientôt se rejoindre; aux points de jonction des îles correspondront encore des normales, mais pour celles-ci la sphère décrite du point G sera en partie extérieure, en partie intérieure à la surface, et pour les orientations correspondantes ce point sera compris entre les deux métacentres; nous nommerons ces normales des *normales mixtes*. Enfin, les îlots en se réunissant formeront des *lacs* qui se subdiviseront en d'autres plus petits et finiront par s'assécher; aux points d'assèchement correspondront des normales que nous appellerons *normales minima;* en ces points la sphère tangente sera intérieure à la surface; par conséquent, pour les orientations suivant ces normales, le point G sera au-dessous du petit métacentre. Les positions d'équilibre stable seront celles pour lesquelles ces normales seront verticales et dirigées en bas.

On voit, d'après cette image, qu'il y a toujours au moins une normale maxima et une minima, c'est-à-dire une position d'équilibre instable et une stable.

Oscillations du corps ébranlé, puis abandonné à lui-même. — Considérons la surface *podaire* de la surface limite (C) par rapport au centre de gravité, c'est-à-dire le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point G sur les plans tangents.

D'après ce qui précède, les normales menées du point G à cette podaire sont les mêmes que les normales menées du point G à la surface du corps, et les normales communes sont de même nature (maxima, minima ou mixtes). De plus, chacun des rayons vecteurs GH de la podaire (*fig.* 321) représente la hauteur du centre de gravité au-dessus du plan d'appui quand le corps est orienté suivant GH.

Ceci posé, plaçons le corps sur le plan fixe dans une position quelconque où le centre de gravité est à une hauteur h_0 au-dessus du plan et imprimons-lui un mouvement initial dans lequel les divers points ont des vitesses v_0, puis abandonnons-le à lui-même. A l'instant t, la hauteur du centre de gravité sera devenue h et les vitesses des divers points seront v. Appliquons au mouvement le théorème des forces vives de l'instant initial à l'instant t, en remarquant que le travail du poids P est $-P(h-h_0)$ et en désignant par $\mathfrak{S}_P$ le travail des résistances passives qui, nul au début, est

essentiellement *négatif*, nous aurons

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = -\,\mathrm{P}(h-h_0) + \mathfrak{T}_\mathrm{P},$$

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 + \mathrm{P}h = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + \mathrm{P}h_0 + \mathfrak{T}_\mathrm{P}. \tag{3}$$

Le terme $\mathfrak{T}_\mathrm{P}$ étant négatif et croissant en valeur absolue avec t, le premier membre de l'équation va en diminuant; ce qui revient à dire que l'énergie du système diminue à cause des résistances passives. Introduisons une longueur k par la condition

$$\mathrm{P}k = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + \mathrm{P}h_0 + \mathfrak{T}_\mathrm{P};$$

cette longueur k va en diminuant avec le temps; l'équation des forces vives

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 + \mathrm{P}h = \mathrm{P}k$$

montre d'ailleurs qu'on a, à chaque instant,

$$h < k.$$

La hauteur h du centre de gravité dans les oscillations du corps a donc une limite supérieure k qui va sans cesse en diminuant. Employons alors, à l'égard de la surface podaire, la même image que plus haut pour la surface du corps. Si l'on considère une sphère liquide de centre G et de rayon k, tous les rayons vecteurs de la podaire plus petits que k tombent dans un des lacs déterminés par cette sphère et la podaire. Or dans les oscillations du corps, la distance h du centre de gravité au plan tangent horizontal fixe est inférieure à k; à chaque instant, l'axe d'orientation du corps est donc compris dans l'un des cônes ayant pour base l'un des lacs déterminés dans la podaire par la sphère de rayon k. L'absorption de l'énergie, par les résistances passives, aura pour effet d'assécher progressivement ce lac, qui pourra se subdiviser en lacs de plus en plus petits, dont l'un contiendra nécessairement l'axe d'orientation; finalement le corps viendra se fixer au repos suivant l'axe d'orientation qui correspond à la normale minimum aboutissant au fond du dernier lac.

Mesure de la stabilité d'une position. — Supposons le corps dans une position d'équilibre stable où la distance du centre de gravité au plan horizontal fixe ait une longueur l. Dans cette position initiale lançons le corps, nous aurons

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 + \mathrm{P}h = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + \mathrm{P}l + \mathfrak{T}_\mathrm{P}$$

en appelant, comme plus haut, h la hauteur du centre de gravité au temps t et $\mathfrak{G}_P$ le travail des résistances passives.

Considérons le lac d'oscillation initial déterminé par la podaire et la sphère liquide dont le rayon k_0 est donné par

$$P k_0 = \frac{1}{2} \sum m v_0^2 + P l.$$

Pour que le corps puisse chavirer, il faut que l'énergie imprimée $\frac{1}{2} \sum m v_0^2$ soit telle que ce lac comprenne une deuxième position d'équilibre. Or, si l'on suppose que la sphère liquide, ayant d'abord pour rayon la normale d'équilibre l, gonfle progressivement, le lac qu'elle détermine autour de cette normale ne contiendra pas d'autre normale tant qu'il n'aura pas été uni par l'ouverture d'un isthme à un lac voisin. Par suite, si l'on désigne par l' la longueur de la normale mixte allant de G à cet isthme, il suffit, pour qu'il n'y ait pas danger de chavirement, que le rayon k_0 de la sphère liquide déterminant le lac d'oscillation initial soit moindre que l', c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{1}{2} \sum m v_0^2 + P l < P l',$$

$$\frac{1}{2} \sum m v_0^2 < P(l' - l).$$

D'après cela on peut dire que $P(l' - l)$ représente la mesure de la stabilité de la position d'équilibre considérée correspondant à la normale minimum l (Guyou, *loc. cit.*, p. 22-23).

660. Corps flottants. — En suivant la méthode de M. Guyou, nous allons considérer un liquide contenu dans un vase fixe et chercher dans quelles positions du système le centre de gravité de l'ensemble du flotteur et du liquide sera à une hauteur minima. Les conditions auxquelles nous parviendrons étant indépendantes de la forme et de la grandeur du vase, seront applicables aux navires flottant sur de grands bassins. Nous reprendrons le problème à son origine pour le traiter entièrement à ce nouveau point de vue, c'est-à-dire sans faire appel aux résultats que nous a fournis l'application du principe d'Archimède.

Première condition : *La surface libre du liquide doit être horizontale.* — Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi; *quelle que soit la position du flotteur,* on pourra toujours imaginer un plan horizontal coupant les arêtes des vagues de telle façon que le volume du liquide situé au-dessus de lui soit égal

à celui des vides laissés au-dessous; alors, si, sans déranger le flotteur, on versait progressivement les masses liquides situées au-dessus du plan dans les creux situés au-dessous, on rendrait la surface libre horizontale et l'on abaisserait d'une manière continue le centre de gravité du système. Ce point ne serait donc pas à une hauteur minima.

Deuxième condition : *Le poids du liquide déplacé doit être égal au poids du flotteur.* — Pour démontrer cette proposition, nous ferons voir que, *quelle que soit l'orientation du flotteur* dans l'espace, si on le descend parallèlement à lui-même dans le liquide à surface libre horizontale, le centre de gravité du système descend tant que le poids du liquide déplacé est moindre que celui du flotteur, pour s'élever ensuite à partir de l'instant où ces deux poids sont devenus égaux.

Il est évident que, tant que le flotteur descend en restant au-dessus de la surface libre, le centre de gravité du système descend; mais lorsque le flotteur commence à plonger, le niveau du liquide s'élève, et le centre de gravité du liquide monte tandis que celui du flotteur descend. Il faut alors analyser le phénomène de plus près pour voir comment se comporte le centre de gravité du système.

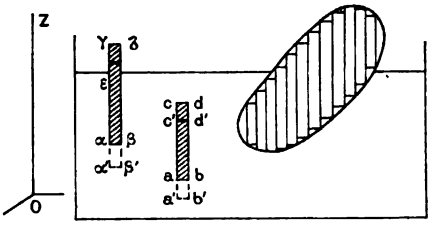
Appelons, comme plus haut, P le poids du flotteur, V le volume immergé, P′ le poids du liquide et ϖ le poids de l'unité de volume du liquide. Nous allons montrer que si l'on *enfonce* le flotteur verticalement d'une quantité *infiniment petite* h, le centre de gravité du liquide *remonte* de la quantité

$$h\frac{\varpi V}{P'}.$$

Pour cela, nous supposerons d'abord que le flotteur est un cylindre droit, à arêtes verticales : deux cas sont à distinguer suivant que le cylindre est partiellement ou totalement plongé. Prenons (*fig.* 322) un cylindre $\alpha\beta\gamma\delta$ partiellement plongé : soit l la longueur $\varepsilon\alpha$ de la partie immergée, σ la section droite; le volume immergé v est $l\sigma$. Quand on enfonce le cylindre de h, la base $\alpha\beta$ prend la position $\alpha'\beta'$, l'élément liquide $\alpha\beta\alpha'\beta'$ est chassé et le niveau du liquide s'élève infiniment peu. Prenons un plan des xy horizontal, un axe Oz vertical ascendant et appelons ζ' le z du centre

de gravité du liquide quand le cylindre est dans la première position $\alpha\beta\gamma\delta$. Décomposons le liquide en éléments de volume de poids p et d'ordonnées z, et appelons en particulier p_1 et z_1 le poids et

Fig. 322.



l'ordonnée de l'élément placé en $\alpha\beta\alpha'\beta'$. Le théorème des moments donne

$$P'\zeta' = p_1 z_1 + \sum pz. \tag{3}$$

Une fois le cylindre enfoncé jusqu'en $\alpha'\beta'$, la disposition du liquide est la même que si le liquide qui occupait primitivement l'élément $\alpha\beta\alpha'\beta'$ était supprimé et versé sur la surface libre où son ordonnée deviendrait $z_1 + l$, tous les autres éléments de poids p et d'ordonnées z restant dans les mêmes positions. Soit $\zeta' + \delta\zeta'$ la nouvelle ordonnée du centre de gravité du liquide; on a

$$P'(\zeta' + \delta\zeta') = p_1(z_1 + l) + \sum pz; \tag{4}$$

d'où, en retranchant et remarquant que p_1, poids de l'élément $\alpha\beta\alpha'\beta'$, est égal à $\varpi h \sigma$,

$$\delta\zeta' = \frac{p_1 l}{P'} = h\frac{\varpi\sigma l}{P'} = h\frac{\varpi v}{P'}; \tag{5}$$

la formule est ainsi démontrée pour ce cas.

On l'établit de même pour le cas d'un cylindre entièrement immergé *abcd* qu'on enfonce de h, de façon à l'amener de *abcd* en $a'b'c'd'$ (*fig.* 322). Si, conservant les notations précédentes, on appelle l la longueur totale du cylindre, le volume immergé est $v = \sigma l$: dans la position *abcd* du cylindre, le z du centre de gravité du liquide est encore donné par la formule (3) où p_1 et z_1 se rapportent à l'élément $aba'b'$. Une fois le cylindre enfoncé, la

disposition du liquide est la même que si l'élément liquide $abd'b$ était supprimé et transporté en $cdc'd'$ où son ordonnée deviendrait $z_1 + l$, tous les autres éléments restant dans les mêmes positions. La nouvelle ordonnée du centre de gravité du liquide est donc encore donnée par la formule (4), d'où résulte la même valeur (5) pour $\delta\zeta'$.

Il est maintenant facile d'établir le même résultat pour un flotteur de forme quelconque que l'on enfonce verticalement d'un mouvement de translation d'une quantité infiniment petite h : on peut toujours décomposer ce flotteur en cylindres élémentaires verticaux de sections infiniment petites (*fig.* 322) : appelons v_1, v_2, ..., v_n les volumes des parties immergées de ces cylindres. Au lieu d'enfoncer le flotteur tout d'une pièce de h pour voir l'effet produit sur le centre de gravité du liquide, on peut enfoncer successivement de h tous les cylindres élémentaires. Mais, d'après ce qui précède, en enfonçant le premier cylindre, on fait monter le centre de gravité du liquide de $h\frac{\varpi v_1}{P'}$; en enfonçant le deuxième, on le fait monter de $h\frac{\varpi v_2}{P'}$, ... Quand tous les cylindres sont enfoncés, le centre de gravité du liquide est monté de

$$h\frac{\varpi}{P'}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = h\frac{\varpi V}{P'},$$

V désignant le volume immergé : c'est ce que nous voulions établir.

Voyons enfin quelle est la variation du z du centre de gravité de tout le système quand on enfonce le flotteur d'une quantité infiniment petite h. En désignant par Z le z du centre de gravité de tout le système, par ζ et ζ' les z des centres de gravité du flotteur et du liquide, on a

$$(P + P')Z = P\zeta + P'\zeta'. \tag{6}$$

Si l'on enfonce le flotteur de h, on a

$$\delta\zeta = -h, \qquad \delta\zeta' = h\frac{\varpi V}{P'}.$$

Donc, en différentiant la relation (6),

$$(P + P')\,\delta Z = h(\varpi V - P),$$

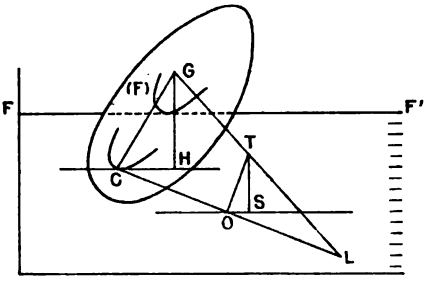
où V est le volume immergé du flotteur.

D'après cela, δZ est négatif et le centre de gravité total descend, tant que ϖV, poids du liquide déplacé, est inférieur au poids P du flotteur; au contraire, δZ est positif et le centre de gravité remonte quand le poids du liquide déplacé est supérieur à P. Pour que le centre de gravité du système total soit le plus bas possible, il faut donc que

$$\varpi V = P. \tag{7}$$

Troisième condition : *Pour être en équilibre stable, le flotteur doit avoir la même orientation que s'il reposait sur un plan horizontal par sa surface des centres de carène.* — D'après les deux premières conditions supposées remplies, nous n'avons plus maintenant qu'à comparer entre elles les positions diverses dans lesquelles le flotteur déplace son poids de liquide, c'est-à-dire pour lesquelles la condition (7) est remplie. Dans ces

Fig. 323.



positions, la surface de flottaison (F) reste tangente à la surface libre (*fig.* 323).

Appelons comme précédemment P le poids du flotteur et V le volume immergé, P′ le poids du liquide et V′ son volume total, de sorte que

$$\varpi V' = P'.$$

Soient G le centre de gravité du flotteur, L celui du liquide, T le centre de gravité du système total : ces trois points sont en ligne droite et l'on a

$$\frac{LT}{TG} = \frac{P}{P'}.$$

D'autre part, le centre du volume immergé V est en C centre

de carène; le centre du volume V′ occupé par le liquide est en L, car le liquide est homogène; le centre O du volume total V + V′ situé au-dessous de la surface libre FF′ est donc en ligne droite avec C et L et l'on a

$$\frac{LO}{OC} = \frac{V}{V'}.$$

Comme P et P′ sont respectivement égaux à ϖV et $\varpi V'$, on a

$$\frac{LT}{TG} = \frac{LO}{OC} = \frac{P}{P'}.$$

Il en résulte que les droites CG et OT sont parallèles et que l'on a

$$\frac{OT}{CG} = \frac{LT}{LG} = \frac{P}{P + P'}. \tag{8}$$

Cela posé, remarquons que le point O est fixe dans les déplacements que nous considérons, car le volume immergé V est assujetti à rester constant; le plan FF′ est donc fixe ainsi que le centre O du volume V + V′ limité par ce plan. On pourra donc compter les hauteurs TS du centre de gravité total à partir du plan horizontal xOy mené par O : pour que l'équilibre soit stable, il faut orienter le corps de façon que TS soit minimum.

Menons par le centre de carène C un plan horizontal CH; ce plan, étant parallèle à la flottaison, est tangent en C à la surface des centres de carène; soit GH la distance du centre de gravité du corps à ce plan : les triangles OTS et CGH sont semblables et l'on a

$$\frac{TS}{GH} = \frac{LT}{LG} = \frac{P}{P + P'},$$

$$TS = GH \frac{P}{P + P'}.$$

Le minimum de TS a donc lieu en même temps que celui de GH. Comme GH est la distance du centre de gravité du corps au plan tangent horizontal mené à la surface des centres de carène, on voit que l'orientation du flotteur dans une position d'équilibre stable est la même que s'il reposait sur un plan horizontal par sa surface des centres de carène. Nous sommes donc ramenés à un problème étudié dans le numéro précédent.

Conclusions. — Pour qu'un flotteur, dans une certaine position, soit en équilibre stable, il faut et il suffit :

1° Que la surface libre du liquide soit horizontale;

2° Que le poids du liquide déplacé soit égal au poids du flotteur ou, ce qui revient au même, que la surface de flottaison soit tangente à la surface libre;

3° Que le centre de gravité du flotteur soit sur la normale à la surface des centres de carène au centre de la carène immergée et au-dessous du petit métacentre de cette surface.

Ces conditions ont déjà été indiquées par Dupin. Nous avons vu, dans le quatrième théorème, qu'en appelant I_0 le moment d'inertie minimum d'une flottaison par rapport à des axes passant par son centre, on a, pour la distance Cm du petit métacentre, $\frac{I_0}{V}$. Si donc la flottaison considérée correspond à une position d'équilibre, la condition de stabilité s'écrit

$$CG < \frac{I_0}{V}.$$

Oscillations du flotteur ébranlé puis abandonné à lui-même. — Le système formé par le flotteur et l'eau est de telle nature que, s'il n'y avait pas de frottements, la somme des travaux des forces de liaison serait nulle. Écartons alors le système de sa position d'équilibre, puis donnons-lui une impulsion initiale; nous aurons, d'après le théorème des forces vives,

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = -(P + P')(h - h_0) + \mathfrak{T}_p,$$

P et P' étant les poids du flotteur et du liquide, h la hauteur du centre de gravité total au temps t, h_0 la valeur initiale de cette quantité et $\mathfrak{T}_p$ le travail des résistances passives; $\mathfrak{T}_p$ est une quantité négative dont la valeur absolue, nulle au début, va sans cesse en croissant.

En écrivant

$$(9) \qquad \frac{1}{2}\sum mv^2 + (P + P')h = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + (P + P')h_0 + \mathfrak{T}_p,$$

on voit que le premier membre va sans cesse en décroissant jusqu'au moment où le système s'arrête dans une position d'équilibre.

Quand les oscillations sont de telle nature que la surface libre de l'eau puisse être regardée comme immobile, le volume immergé V est constant, le centre O du volume total au-dessous de la surface libre est fixe et l'on peut compter la hauteur h au-dessus du plan horizontal passant par O.

On a alors, d'après la *fig.* 323,

$$h = \mathrm{ST} = \mathrm{GH}\,\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}+\bar{\mathrm{P}}'},$$

et l'équation des forces vives (9) devient

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 + \mathrm{P}\,\overline{\mathrm{GH}} = \frac{1}{2}\sum mv_0^2 + \mathrm{P}(\mathrm{GH})_0 + \bar{\mathrm{C}}_p.$$

Cette équation est identique à celle que nous avons rencontrée pour les oscillations d'un corps pesant reposant par la surface (C) sur un plan horizontal fixe, à la fin du numéro précédent. Toutes les conséquences que nous en avons tirées s'appliquent donc à ces oscillations spéciales du flotteur. On peut, en particulier, mesurer la stabilité d'une position d'équilibre du flotteur, par la quantité $\mathrm{P}(l'-l)$ définie comme plus haut (Guyou, *loc. cit.*).

661. **Exemples.** — Pour l'application des théorèmes que nous venons d'établir à la théorie du navire, nous renverrons à l'Ouvrage de M. Guyou. Nous nous bornerons à en donner quelques exemples élémentaires; on en trouvera d'autres aux exercices :

1° *Flotteur sphérique.* — Pour un flotteur sphérique, les surfaces (F) et (C) sont évidemment des sphères concentriques à la proposée. Le centre de gravité G occupe dans la sphère une position quelconque : de ce point, on peut mener à la surface (C) deux normales; une d'elles donne le minimum de la distance de G à (C), l'autre le maximum de cette distance. A la première correspond une position d'équilibre stable, à la seconde une position d'équilibre instable.

2° *Ellipsoïde.* — Si le flotteur est limité par un ellipsoïde, les surfaces (F) et (C) sont des ellipsoïdes homothétiques et concentriques à la surface du flotteur. C'est ce qu'on voit immédiatement en faisant une transformation homographique qui transforme l'ellipsoïde en une sphère en altérant les éléments de volume dans un rapport constant.

On peut alors, du point G, mener à la surface (C), deux, quatre ou six normales réelles. Pour reconnaître les positions stables, il faut voir quelles sont les normales donnant des *minima* de la distance du point G à la surface (C).

Dans le cas de six normales, il y a toujours deux positions stables; dans e cas de quatre, il y en a une ou deux; dans le cas de deux, il y a seulement une position d'équilibre stable.

3° *Flotteur avec un plan de symétrie.* — Soit un flotteur admettant, non seulement au point de vue de la forme extérieure, mais au point de vue de la distribution de la matière, un plan de symétrie S. Le centre de gravité G est dans ce plan et la surface (C) admet ce plan comme plan de symétrie; elle le coupe donc à angle droit, suivant une courbe c; car

elle est convexe partout. Parmi les normales menées de G à (C) se trouveront les normales menées de G à cette courbe plane.

Soit GC une de ces normales : en orientant le flotteur suivant GC, on aura une position d'équilibre; la flottaison correspondante FL coupe le plan S suivant un axe s, qui est un axe de symétrie de la flottaison. Le centre O de la flottaison est sur s et les axes principaux d'inertie de l'aire de la flottaison sont Os et la perpendiculaire Ot.

Appelons I_0 le plus petit des moments d'inertie de la flottaison par rapport à ces deux axes, il faut et il suffit pour la stabilité que l'on ait

$$CG < \frac{I_0}{V}.$$

Il pourra, bien entendu, exister d'autres positions d'équilibre, correspondant à des normales issues de G non contenues dans le plan de symétrie.

4° *Cylindre de révolution homogène.* — Soit un cylindre de révolution homogène dont le rayon de base est a, la hauteur $2h$ et *la densité égale à la moitié de celle du liquide*. Le volume immergé est alors la moitié du volume du cylindre et la surface (F) se réduit au point G, milieu de la hauteur, qui est le centre de gravité du cylindre.

La surface (C) est évidemment de révolution autour de l'axe du cylindre, et elle admet comme plan de symétrie (plan de l'équateur) le plan mené par G perpendiculairement à l'axe. Pour mener de G des normales à cette surface de révolution, il suffit de mener de ce point des normales à la méridienne. Cette méridienne a pour centre le point G; elle admet comme axes de symétrie, l'axe du cylindre et la perpendiculaire à l'axe menée par G; elle a là une forme ovale comme une ellipse. En coupant le cylindre par un plan passant par l'axe, on obtient un rectangle dont les diagonales se coupent en G : les portions de méridienne situées dans les angles des diagonales qui comprennent l'axe sont formées de deux arcs de parabole dont les points correspondent aux flottaisons qui ne coupent pas les bases du cylindre; les portions de méridienne situées dans les deux autres angles des diagonales sont des arcs d'une courbe transcendante se raccordant avec les arcs de parabole; les points de ces nouveaux arcs correspondent aux flottaisons qui coupent les bases.

En prenant les deux axes de symétrie de la méridienne, on a immédiatement deux normales menées du point G à la surface (C) :

1° L'axe du cylindre;

2° Un rayon de l'équateur de la surface (C).

A ces deux normales correspondent deux positions d'équilibre possibles, d'ailleurs évidentes *a priori*, une position dans laquelle les génératrices sont verticales et une position dans laquelle les génératrices sont horizontales.

Voyons dans quels cas elles sont stables :

Première position : Génératrices verticales. — Le cylindre étant im-

mergé verticalement, le centre de carène C est au milieu de la hauteur immergée h : CG est donc égal à $\frac{1}{2}h$. La flottaison correspondante est un cercle de rayon a et de centre G : le moment d'inertie de cette flottaison par rapport à un axe GX passant par son centre dans son plan est

$$I_0 = \frac{1}{4}\pi a^4;$$

tous ces moments sont égaux. Le volume immergé V est d'ailleurs $\pi a^2 h$; on a donc, pour la condition de stabilité,

$$CG < \frac{I_0}{V}, \qquad \frac{h}{2} < \frac{1}{4}\frac{a^2}{h}, \qquad h < \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Deuxième position : Génératrices horizontales. — Le plan de flottaison passant alors par l'axe, le centre de carène C coïncide avec le centre de gravité du demi-cercle immergé de la section droite menée par G; on a donc, pour la distance CG, la valeur $\frac{4a}{3\pi}$.

La flottaison est un rectangle de centre G et de côtés $2a$ et $2h$: les axes principaux d'inertie de la flottaison sont l'axe du cylindre et la perpendiculaire à cet axe menée par G. Le moment d'inertie de la flottaison, par rapport à l'axe du cylindre, est

$$I = \frac{4}{3}ha^3.$$

et, par rapport à la perpendiculaire,

$$I' = \frac{4}{3}ah^3.$$

Les deux métacentres correspondants m et M [centres de courbure principaux de la surface (C)] sont à des distances de C données par

$$Cm = \frac{I}{V} = \frac{4a}{3\pi},$$

$$CM = \frac{I'}{V} = \frac{4}{3}\frac{h^2}{\pi a}.$$

L'un des métacentres m est donc précisément au point G, ce qui est évident, car, la surface (C) étant de révolution, l'un des centres de courbure principaux est sur l'axe de révolution. Pour que l'équilibre soit stable, il faut que le métacentre qui coïncide avec G soit le *petit métacentre,* c'est-à-dire

$$Cm < CM, \qquad h > a.$$

Autres positions. — Outre ces deux positions d'équilibre évidentes par raison de symétrie, il peut en exister deux autres correspondant à des nor-

males menées de G à la méridienne obliquement par rapport à l'axe du cylindre : ce sont deux positions dans lesquelles les génératrices sont obliques par rapport à la surface libre du liquide. Dans l'une d'elles, une base est entièrement immergée; le centre de carène correspondant est sur la partie parabolique de la méridienne. Dans l'autre, les deux bases sont partiellement immergées; le centre de carène correspondant est sur l'autre partie de la méridienne.

On trouvera la discussion complète de ces deux dernières positions dans l'Ouvrage de M. Poincaré (*Cinématique et Mécanismes,* p. 315-320).

EXERCICES.

1. *Équilibre d'un fluide dans le cas général où l'on a*

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \psi\,d\varphi,$$

ψ et φ étant des fonctions données de x, y, z. — L'équation d'équilibre est alors

$$dp = \rho\psi\,d\varphi.$$

Elle montre que p est fonction de φ seul, car $d\varphi$ étant nul, dp l'est aussi. Soit alors

$$p = f(\varphi);$$

l'équation donne

$$\rho = \frac{1}{\psi} f'(\varphi).$$

Enfin, la relation caractéristique donne τ.

2. *Centre de pression d'une aire plane triangulaire* ABC. — Appelons α, β, γ les distances des sommets A, B, C à la trace du plan de charge sur le plan de la paroi : le centre de pression coïncide avec le centre de gravité de trois masses :

L'une, $2\alpha + \beta + \gamma$, placée en A;
L'autre, $2\beta + \gamma + \alpha$, placée en B;
La troisième, $2\gamma + \alpha + \beta$, placée en C.

3. *Pression d'un liquide pesant sur une portion de paroi plane ayant la forme d'un trapèze à bases horizontales.* — Appelons a la base supérieure, b la base inférieure, h la hauteur du trapèze, c la distance de la base supérieure à la trace du plan de charge sur la paroi. La distance du centre de pression à cette même trace est

$$\frac{h^2(a+3b) + 3hc(a+2b)}{2h(a+2b) + 6c(a+b)}.$$

(Bour, *Mécanique,* IIIe fasc., p. 292.)

4. Étant donnée une aire plane de forme et de grandeur déterminées, à laquelle on fait occuper diverses positions sur une paroi plane immergée dans un liquide pesant, démontrer que le centre de pression sur cette aire est, dans chaque position, le pôle de la droite d'intersection D du plan de charge et du plan de l'aire par rapport à une certaine ellipse imaginaire E attachée à l'aire : cette conique

a pour centre le centre de gravité G de l'aire et pour axes les axes principaux d'inertie de l'aire par rapport à G; soient Gx et Gy ces axes, l'ellipse E a une équation de la forme

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

On peut dire aussi que le centre de pression est le symétrique par rapport à G du pôle de D par rapport à l'ellipse réelle

$$(E') \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

conjuguée de la précédente. Cette propriété a déjà été indiquée à propos des centres de percussion d'une aire plane (*Exercices* sur le Chapitre X, exercice 32).

5. *Pressions sur un vase sphérique.* — Soit un vase sphérique, dont le rayon est $0^m,1$, entièrement rempli d'eau à son maximum de densité; le vase est, à sa partie supérieure, percé d'une ouverture infiniment petite qui fait communiquer le liquide avec l'atmosphère : la surface libre de l'eau est alors le plan S_0 tangent à la sphère au point le plus haut.

Calculer en kilogrammes la résultante des pressions :

1° Sur l'hémisphère inférieur;

2° Sur l'hémisphère supérieur;

3° Sur la sphère entière.

6. Deux liquides homogènes, de densités ρ et ρ_1 et de volumes V et V_1, sont superposés dans un vase ayant la forme d'un cylindre de révolution à génératrices verticales. Le liquide supérieur ρ est simplement pesant; le liquide inférieur ρ_1 est pesant, mais, en outre, ses éléments sont attirés par le centre O du fond du vase proportionnellement aux masses et aux distances, l'attraction du point O sur l'unité de masse à l'unité de distance étant a. Déterminer la figure d'équilibre et la loi des pressions.

Réponse. — Prenons comme origine O, comme axe Oz une verticale ascendante :

Liquide supérieur. — Surface libre $z = C$; pression $p = p_a + \rho g (C - z)$, p_a désignant la pression atmosphérique. La constante C est déterminée par la condition que le volume total est $V + V_1$.

Liquide inférieur. — On a, en appelant p_1 la pression,

$$dp_1 = -\rho_1 g\, dz - a(x\, dx + y\, dy + z\, dz),$$
$$p_1 = C' - \rho_1 g z - \tfrac{1}{2} a (x^2 + y^2 + z^2),$$

C' désignant une constante; les surfaces de niveau sont des sphères concentriques.

Surface de séparation. — Sur cette surface, on a $p = p_1$:

$$p_a + \rho g (C - z) = C' - \rho_1 g z - \tfrac{1}{2} a (x^2 + y^2 + z^2);$$

c'est une sphère dont le centre est sur Oz.

On déterminera C' en écrivant que le volume détaché par cette sphère dans le cylindre est V_1.

7. *Problème d'Euler.* — La surface de séparation de deux fluides pesants en contact est horizontale quand ils sont en équilibre tous les deux. Mais si l'un d'eux est en mouvement et l'autre en équilibre, cette surface cesse d'être horizontale. On en a un premier exemple dans la surface de séparation de l'air supposé immobile et d'un liquide homogène pesant animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical; la surface de séparation est un paraboloïde, comme nous l'avons vu au n° 632.

Voici un deuxième exemple, dû à Euler, dans lequel le liquide est immobile et l'air en mouvement :

Imaginons un canal plein d'eau, limité latéralement par deux plans verticaux parallèles P et P', fermé à une de ses extrémités par une paroi rigide et ouvert à l'autre. Puis supposons que, pour empêcher l'écoulement de l'eau par l'extrémité ouverte, on lance horizontalement dans le sens de la longueur du canal, de façon à repousser l'eau, un courant d'air uniforme de vitesse V.

On demande de chercher si l'eau peut se mettre en équilibre dans ces conditions, en admettant, par raison de symétrie, que la surface libre de l'eau prend la forme d'un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires aux parois P et P' du canal; on admet, en outre, que la pression du courant d'air sur chaque élément de surface de l'eau est normale à l'élément et proportionnelle au carré de la composante normale de la vitesse de l'air.

Réponse. — Il suffit évidemment de connaître la section droite S de la surface cylindrique de l'eau. Soient, dans le plan d'une section droite, Ox un axe horizontal estimé positivement en sens contraire de la vitesse V du vent, Oz un axe vertical descendant, α l'angle que fait avec Ox la normale à la courbe S en un point $M(x, z)$ de cette courbe. L'eau étant un liquide pesant en équilibre, la pression en un point et en particulier au point M, est donnée par

$$p = \rho g z + C^{te}.$$

D'autre part, la pression du vent sur l'élément superficiel placé en M, rapportée à l'unité de surface, est, par hypothèse,

$$p = k v^2 \cos^2 \alpha.$$

L'élément superficiel étant en équilibre, ces deux pressions sont égales :

$$\rho g z + C^{te} = k v^2 \cos^2 \alpha.$$

D'où, en choisissant convenablement la hauteur de l'origine O,

$$z = a \cos^2 \alpha.$$

Cette équation définit la forme de la section droite S.

En remarquant que

$$dx = dz \operatorname{tang} \alpha,$$

on exprime x en fonction de α et l'on reconnaît que la section droite est une cycloïde.

8. *Corps flottants. Carènes complémentaires.* — Dans tout flotteur fermé, une même flottaison détache deux carènes dites *complémentaires*.

Les surfaces (F), correspondant à deux carènes complémentaires, coïncident.

Les surfaces (C), correspondant à deux carènes complémentaires, sont inversement homothétiques par rapport au centre du volume total.

Lorsqu'un flotteur homogène de densité δ peut flotter en équilibre, dans une certaine position, sur un liquide de densité d, un flotteur égal et homogène, de densité $\delta' = d - \delta$, pourra flotter dans la position correspondant à la carène complémentaire. (GUYOU, *Théorie du Navire*, Chap. III. — GREENHILL, *Treatise on Hydrostatics*, p. 180.)

9. **Stabilité des corps flottants.** — *Prisme triangulaire isoscèle homogène flottant horizontalement.* — Nous ne considérerons que les deux positions données par la symétrie : la face latérale, qui est seule de son espèce, est supposée horizontale; alors l'arête opposée peut être immergée ou non. Nous appellerons 2φ l'angle au sommet de la section droite, δ la densité du flotteur, d celle du liquide.

Conditions de stabilité de l'équilibre l'arête en bas :

$$\delta > d\cos^4\varphi.$$

L'arête en haut :

$$\delta < d(1-\cos^4\varphi).$$

Il peut arriver qu'aucune de ces positions ne soit stable; alors le prisme ne peut flotter dans aucune des deux positions. Il existera nécessairement d'autres positions stables dans lesquelles les arêtes sont verticales ou inclinées. (GUYOU, *loc. cit.*, p. 46.)

10. Une canne cylindrique homogène, de longueur $2h$ et de rayon a, possède une densité $\frac{1}{4}$, la densité de l'eau étant 1. A l'extrémité de la canne, on fixe un point matériel et l'on demande quel doit être le poids de ce point pour que la canne flotte verticalement?

11. *Exemples de surfaces de flottaison.* — 1° Soit un flotteur ayant la forme d'un tétraèdre ABCD : trouver l'enveloppe des plans de flottaison rencontrant seulement trois arêtes telles que DA, DB, DC.

Réponse. — En prenant ces trois arêtes comme axes coordonnés, on voit que l'enveloppe a pour équation

$$xyz = k.$$

2° Soit un cylindre à base quelconque : trouver l'enveloppe des plans de flottaison rencontrant seulement les arêtes latérales.

Réponse. — L'enveloppe est un point. Cela résulte de ce que, dans un cylindre tronqué, la droite joignant les centres de gravité des deux bases O et O' est parallèle aux génératrices, et que le volume du cylindre tronqué égale le produit de la section droite par OO'.

12. *Exemples de surfaces de centres de carène.* — Déterminer les portions des surfaces (C) correspondant aux deux espèces de carènes de l'exercice précédent :

1° Pour les carènes déterminées par des plans coupant les trois arêtes d'un trièdre, la surface (C) a pour équation

$$xyz = \frac{27}{64}k.$$

2° Pour les carènes déterminées par les plans coupant les génératrices d'un cylindre quelconque, la surface (C) est une portion de paraboloïde elliptique dont l'axe est parallèle aux génératrices.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

ABDANK-ABAKANOWICZ (Br.). — Les intégraphes. *La courbe intégrale et ses applications. Étude sur un nouveau système d'intégromètres mécaniques.* Grand in-8, avec 94 figures dans le texte; 1886..... 8 fr.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, et **GOURSAT (Édouard)**, Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales.** *Études des fonctions analytiques sur une surface de Riemann.* Avec une Préface de M. Ch. HERMITE. Grand in-8, avec figures; 1895..... 15 fr.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **LACOUR (Émile)**, Maître de Conférences à l'Université de Nancy. — **Principes de la Théorie des Fonctions elliptiques.** Grand in-8 avec figures; 1896..... 15 fr.

LÉVY (Maurice), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions.** 2e édition. 3 vol. grand in-8, avec 3 Atlas de même format. (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère des Travaux publics.*)

Ire PARTIE. — *Principes et applications de la Statique graphique pure.* Grand in-8, XXVIII-549 pages, avec figures et un Atlas de 26 planches; 1886..... 20 fr.

IIe PARTIE. — *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.* Grand in-8 de XIV-345 pages, avec figures et un Atlas de 6 planches; 1886..... 15 fr.

IIIe PARTIE. — *Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupole. Corps de révolution.* Grand in-8 de IX-518 pages avec figures et un Atlas de 6 planches; 1887..... 17 fr.

IVe PARTIE. — *Ouvrages de maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre Parties.* Grand in-8 de IX-350 pages, avec figures et un Atlas de 4 planches; 1888..... 15 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie.** *Théorie des abaques. Applications pratiques.* Grand in-8, avec 177 figures et une planche; 1899.

Broché..... 14 fr. | Relié (cuir souple)..... 17 fr.

PONCELET. — Cours de Mécanique appliquée aux machines; publié par ARTUR, Ingénieur en chef des Manufactures de l'État. 2 volumes in-8.

Ire PARTIE : *Machines en mouvement; Régulateurs et transmissions. Résistances passives*, avec 117 figures et 2 planches; 1874..... 10 fr.

IIe PARTIE : *Mouvement des fluides, Moteurs, Ponts-levis*, avec 331 figures; 1876..... 12 fr.

20525. PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

Phys 778.15
Bibliothèque (II, 2)

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME TROISIÈME.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES MILIEUX CONTINUS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1900
Deuxième fascicule.

13. Soit une surface courbe quelconque (C); soient C et C' deux points infiniment voisins pris sur cette surface, CN et C'N' les normales en ces points (*fig.* 317), $\mu\mu'$ la perpendiculaire commune à ces deux normales. Le pied μ de cette perpendiculaire sur CN est le métacentre correspondant au point C.

Démontrer que μ est le centre de courbure, en C, de la section droite du cylindre circonscrit à la surface (C) et ayant ses génératrices parallèles à $\mu\mu'$, c'est-à-dire à l'axe d'inclinaison.

14. *Surface des centres des tranches isocarènes ou surface* (T). — Soient un premier système de plans de flottaison FL détachant des carènes de volume V, (C) la surface des centres de carène correspondante; soient ensuite un deuxième système de plans de flottaison F_1L_1 détachant des carènes $V_1 = V + \Delta V$, (C_1) la surface des centres de carène correspondante; si l'on prend un plan quelconque FL du premier système et le plan parallèle F_1L_1 du deuxième, les tranches de volume constant ΔV, comprises entre ces deux plans, sont des tranches *isocarènes*.

Soient T le centre d'une de ces tranches et (T) le lieu des points T : cette surface (T) est la surface des centres des tranches isocarènes.

THÉORÈME I. — *Le plan tangent à la surface* (T), *en un point quelconque* T, *est parallèle aux flottaisons correspondantes.*

THÉORÈME II. — *Soient* FL *et* F_1L_1 *deux flottaisons parallèles détachant dans le flotteur des carènes de volume* V, $V + \Delta V$ *et une tranche de volume* ΔV; *soient* C, C_1, T *les centres des deux carènes et de la tranche.* Prenons, comme dans la *fig.* 318, deux positions F'L' et $F'_1L'_1$ des flottaisons infiniment voisines des deux premières : les points C, C_1, T prennent des positions C', C'_1, T'. Soient OX et O_1X_1 les droites d'intersection des plans FL et F'L' d'une part, F_1L_1 et $F'_1L'_1$ d'autre part; appelons I et I_1 les moments d'inertie des flottaisons FL et F_1L_1 par rapport à OX et O_1X_1 respectivement. Supposons que, comme dans la *fig.* 318, on projette sur un plan perpendiculaire à OX et O_1X_1. Menons aux points C et C', C_1, C'_1, T, T' des normales aux surfaces respectives (C), (C_1) et (T). Soient μ, μ_1, t les métacentres correspondant aux trois surfaces. On a, d'après le texte,

$$C\mu = \frac{I}{V}, \qquad C_1\mu_1 = \frac{I_1}{V_1};$$

démontrer que

$$Tt = \frac{I_1 - I}{V_1 - V} = \frac{\Delta I}{\Delta V}.$$

THÉORÈME III. — *Si l'on suppose que* ΔV *soit infiniment petit, la flottaison* F_1L_1 *est infiniment rapprochée de* FL, *le point* T, *centre de la tranche, a pour limite le point* O, *centre de la flottaison* FL_1, *la surface* (T) *se confond avec la surface de flottaison* (F); *la distance* T*t du point* T *au métacentre de la surface* (T) *devient la distance* O*o du point* O *au métacentre de la surface* (F), *et l'on a*

$$Oo = \lim \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{dI}{dV}.$$

Cette formule donne les éléments de la courbure de la surface (F).

(GUYOU, *loc. cit.*, p. 34-35. — GREENHILL, *Hydrostatic.*)

15. *Généralisation des théorèmes précédents.* — Soient des points $C_1, C_2, \ldots, C_k$, en nombre quelconque k, décrivant respectivement, d'une manière continue,

k surfaces fixes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$, de telle façon qu'à chaque instant *les plans tangents à ces surfaces aux points considérés soient parallèles.*

Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des constantes positives ou négatives dont la somme

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + \ldots a_k$$

n'est pas nulle, et considérons le centre C des moyennes distances de masses a_1, $a_2, \ldots, a_k$, placées en $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Ce point C décrit une surface Σ.

1° Le plan tangent à Σ au point C est parallèle aux plans tangents aux surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ aux points $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

2° Déplaçons infiniment peu le groupe des points C_i, de façon à les amener en $C'_1, C'_2, \ldots, C'_k$: le point C vient en C'.

Appelons $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ et μ les métacentres des surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_k$ et Σ correspondant à ce déplaeement. (Le point μ_1, par exemple, est le pied de la perpendiculaire commune à la normale en C_1 et à la normale en C'_1 à la surface Σ_1). Démontrer que l'on a

$$a.\overline{C\mu} = a_1.\overline{C_1\mu_1} + a_2.\overline{C_2\mu_2} + \ldots + a_k.\overline{C_k\mu_k}.$$

La démonstration se fait en construisant une figure analogue à 318, en remarquant que tous les triangles analogues à $D\mu c'$ (*fig.* 318), à savoir :

$$D_1\mu_1c'_1, \quad D_2\mu_2c'_2, \quad \ldots, \quad D_k\mu_kc'_k,$$

sont semblables, et que l'on a

$$a.\overline{Dc'} = a_1.\overline{D_1c'_1} + \ldots + a_k.\overline{D_kc'_k}.$$

Cette dernière relation résulte de ce que les quantités $\overline{Dc'}$ $\overline{D_1c'_1}, \ldots, \overline{D_kc'_k}$ peuvent être regardées comme les variations des abscisses des points C, $C_1, \ldots, C_k$, quand ils passent de la première position à la deuxième. (*Journal de l'École Polytechnique*, p. 101 et suiv., 5e cahier; 1900).

CHAPITRE XXXII.

DÉFORMATION D'UN MILIEU CONTINU. PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES.

Lorsqu'un milieu continu, solide, liquide ou gazeux, se déplace et se déforme d'une manière continue, les éléments du milieu obéissent à certaines lois géométriques générales qui résultent de la continuité et de l'existence des dérivées. Ce sont ces lois que nous étudions dans ce Chapitre. Pour les renseignements historiques et bibliographiques, nous renverrons à l'intéressant Mémoire de MM. Cosserat, publié dans les *Annales de la Faculté de Toulouse*, t. X.

I. — GÉNÉRALITÉS.

662. Formules de transformation. — Imaginons une portion continue de matière occupant à l'instant t une certaine région $\mathcal{R}$ de l'espace, et supposons que les divers points de ce milieu matériel se mettent en mouvement de telle façon que le milieu reste continu; à l'instant $t_1 > t$, le milieu occupera une certaine région $\mathcal{R}_1$ de l'espace.

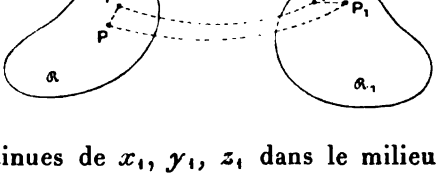
Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Appelons x, y, z les coordonnées d'un point P (*fig.* 324) du milieu $\mathcal{R}$ à l'instant t; ce point se met en mouvement, suit une certaine trajectoire et, à l'instant t_1, il occupe une position P_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1 dans le milieu $\mathcal{R}_1$. Un point P′ voisin de P suit une trajectoire voisine de celle de P et, à l'instant t_1, occupe une position P'_1 voisine de celle de P_1; et ainsi de suite, pour tous les points du milieu $\mathcal{R}$.

Les quantités x_1, y_1, z_1 sont évidemment des fonctions de x, y, z et t_1 :

$$(1)\quad x_1 = f(x, y, z, t_1), \qquad y_1 = f_1(x, y, z, t_1), \qquad z_1 = f_2(x, y, z, t_1):$$

ces fonctions sont uniformes et continues dans l'intérieur du milieu primitif, et, inversement, x, y, z sont des fonctions uni-

Fig. 324.



formes et continues de x_1, y_1, z_1 dans le milieu transformé; à chaque point du milieu primitif correspond ainsi un point du milieu transformé, et inversement. Pour $t_1 = t$, x_1, y_1, z_1 prennent les valeurs respectives x, y, z.

Ce mode de transformation se présente dans la théorie du mouvement des fluides et dans la théorie de l'élasticité.

Les relations (1) définissent la transformation continue de la région $\mathfrak{R}$ de l'espace dans la région $\mathfrak{R}_1$. On peut aussi se représenter cette transformation par l'image géométrique suivante qui la rattache à la théorie des champs de vecteurs :

Portons notre attention seulement sur les positions initiales $P(x, y, z)$ et les positions finales $P_1(x_1, y_1, z_1)$ des divers points : les segments tels que PP_1 c'est-à-dire les déplacements des divers points du milieu $\mathfrak{R}$, forment un champ continu de vecteurs : les origines de ces vecteurs sont les divers points de la région initiale $\mathfrak{R}$ et leurs extrémités les points correspondants de la région $\mathfrak{R}_1$. Désignons par $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ les projections sur les axes du vecteur PP_1,

$$(PP_1)\qquad \mathbf{u} = x_1 - x, \qquad \mathbf{v} = y_1 - y, \qquad \mathbf{w} = z_1 - z :$$

les quantités $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont évidemment, comme x_1, y_1, z_1, des fonctions uniformes et continues de x, y, z dans toute l'étendue du milieu primitif $\mathfrak{R}$. On pourra appliquer à ces vecteurs PP_1, définissant la transformation, toutes les propositions relatives aux champs continus de vecteurs (Chap. XXVIII).

663. Lignes et surfaces transformées. — Voici quelques conséquences immédiates de la continuité.

Si l'on considère, dans le milieu primitif $\mathfrak{R}$, *une suite de points disposés sur une ligne continue* L, *les nouvelles positions de ces points dans le milieu transformé* $\mathfrak{R}_1$ *à l'instant* t_1, *sont encore sur une ligne continue* L_1, *transformée de* L.

En effet, le long de L on peut exprimer les coordonnées d'un point P de cette ligne en fonctions continues d'un paramètre λ

$$(2) \qquad x = \varphi(\lambda), \qquad y = \varphi_1(\lambda), \qquad z = \varphi_2(\lambda)$$

de telle façon que λ variant de α à β, on obtienne successivement tous les points de L, la valeur $\lambda = \alpha$ donnant une extrémité de la ligne et $\lambda = \beta$ l'autre. D'après les formules (1), où t_1 a une valeur numérique et où l'on remplace x, y, z par les expressions (2), x_1, y_1, z_1 sont aussi des fonctions continues de λ; quand λ varie de α à β, le point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ occupe donc successivement, dans le milieu transformé $\mathfrak{R}_1$, les divers points d'une ligne L_1 dont les extrémités correspondent à $\lambda = \alpha, \lambda = \beta$. Les lignes L et L_1 se correspondent point par point.

Si la ligne L *est fermée, la ligne* L_1 *l'est aussi.*

En effet, dans cette hypothèse, les deux extrémités de L sont confondues en un même point qui est obtenu à la fois pour $\lambda = \alpha$ et $\lambda = \beta$: les deux extrémités de L_1 sont donc aussi confondues, et L_1 est fermée.

Si l'on prend, dans le milieu primitif $\mathfrak{R}$, *un ensemble de points disposés sur une surface continue* S, *les nouvelles positions de ces points, dans le milieu transformé* $\mathfrak{R}_1$, *sont encore sur une surface continue* S_1, *transformée de* S.

En effet, le long de S on peut exprimer les coordonnées d'un point P de cette surface en fonctions continues de deux paramètres λ et μ

$$(3) \qquad x = \varphi(\lambda, \mu), \qquad y = \varphi_1(\lambda, \mu), \qquad z = \varphi_2(\lambda, \mu).$$

D'après les formules (1), où l'on remplace x, y, z par ces expressions, x_1, y_1, z_1 sont des fonctions continues de λ et μ, et le point P_1 appartient à une surface S_1. A la ligne L qui limite le

feuillet formant la surface S correspond une ligne L_1 limitant S_1. Les deux surfaces S et S_1 se correspondent point par point.

Si la surface S *est fermée, la surface* S_1 *l'est aussi, et à un point* P *de l'intérieur de* S *correspond un point* P_1 *de l'intérieur de* S_1 *et réciproquement.*

En effet, pour qu'un feuillet S d'abord limité par une ligne L devienne une surface fermée, il suffit de déformer le contour L de façon à le réduire finalement à un point; dans ces conditions, le contour L_1 de S_1 se réduit aussi à un point et cette surface est aussi fermée.

Quant à la seconde partie de l'énoncé, on la démontre comme il suit : Soit P un point pris dans l'intérieur d'une surface fermée S du milieu initial : les points situés d'abord sur S se déplacent de façon à être, à chaque instant t' compris entre t et t_1, sur une surface mobile S′ qui correspond point par point à S et qui, à l'instant t_1, occupe la position S_1. Le point situé d'abord en P dans S se déplace en même temps; il reste constamment dans la surface mobile S′, car s'il en sortait, il existerait un instant t' où il serait *sur la surface* S′ en un certain point P′; ce qui est en contradiction avec ce fait que les surfaces S et S′ se correspondent point par point, puisque au point P′ situé sur S′ correspondrait, dans le milieu primitif, un point P non situé sur S.

664. Équation de continuité. — On appelle *équation de continuité* une relation qui exprime que la masse d'un élément infiniment petit du milieu est la même avant et après la déformation. Appelons ρ la densité en un point P du milieu primitif $\mathfrak{R}$: ρ est une fonction uniforme et positive des coordonnées x, y, z du point P. A l'instant t_1 le point P occupe la position $P_1(x_1, y_1, z_1)$: appelons ρ_1 la densité du milieu transformé $\mathfrak{R}_1$ en ce point; ρ_1 est une fonction uniforme et positive des coordonnées x_1, y_1, z_1. Désignons par D le déterminant fonctionnel

$$(4) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} & \frac{\partial y_1}{\partial z} \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & \frac{\partial z_1}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ou en développant

$$D = \frac{\partial x_1}{\partial x}\left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial z} - \frac{\partial y_1}{\partial z}\frac{\partial z_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial y}\left(\frac{\partial y_1}{\partial z}\frac{\partial z_1}{\partial x} - \frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial z}\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial z_1}{\partial y} - \frac{\partial y_1}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial x}\right).$$

A l'instant t, ce déterminant est égal à $+1$, car, à cet instant, x_1, y_1, z_1 sont respectivement égaux à x, y, z. Quand t_1 varie, ce déterminant d'abord positif change de valeur. Nous allons trouver une expression remarquable de ce déterminant qui nous montrera qu'il reste toujours positif.

Soit, dans le milieu primitif, une surface fermée S limitant un volume V : à l'instant t_1 les points du milieu situés primitivement sur S sont sur la surface transformée S_1 ; aux points intérieurs à S correspondent des points intérieurs à S_1 et réciproquement. La masse de matière qui remplit la surface S_1 est donc la même que celle qui remplit S, et l'on a

$$(5) \qquad \iiint_{V_1} \rho_1 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1 - \iiint_{V} \rho \, dx \, dy \, dz = 0,$$

la première intégrale étant étendue au volume V_1 limité par S_1 et la seconde au volume V limité par S. Cela résulte immédiatement de ce qu'un élément de volume du premier milieu est $dx\,dy\,dz$ et la masse de cet élément $\rho\,dx\,dy\,dz$; de même $\rho_1\,dx_1\,dy_1\,dz_1$ est la masse d'un élément de volume du second milieu.

D'après les formules classiques du changement de variable dans une intégrale triple, nous allons dans la première des intégrables (5) introduire les nouvelles variables x, y, z liées à x_1, y_1, z_1 par les formules (1), où t_1 a une valeur numérique donnée. On sait que pour obtenir la nouvelle intégrale, il faut remplacer l'élément différentiel

$$dx_1\,dy_1\,dz_1$$

pour le nouvel élément différentiel

$$D\,dx\,dy\,dz$$

où D désigne le déterminant fonctionnel (4) des variables x_1, y_1, z_1

par rapport aux variables x, y, z. Quant aux nouvelles limites d'intégration, elles résultent de ce fait que, pour que le point x_1, y_1, z_1 décrive une fois, et une seule fois, le volume V_1, il faut et il suffit que le point x, y, z décrive le volume V : le nouveau volume d'intégration est donc V. D'après cela l'intégrale

$$\iiint_{V_1} \rho_1 \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1$$

devient, après le changement de variables,

$$\iiint_{V} \rho_1 D \, dx \, dy \, dz.$$

L'équation (5) peut alors s'écrire, si l'on remarque qu'après la transformation les deux intégrales sont étendues aux mêmes limites,

$$\iiint_{V} (\rho_1 D - \rho) \, dx \, dy \, dz = 0.$$

Le volume V est un volume quelconque pris dans le milieu initial $\mathcal{R}$. Donc l'intégrale que nous venons d'obtenir doit être nulle *quel que soit le volume* V *auquel elle est étendue* dans le milieu initial : il faut évidemment pour cela que l'élément différentiel soit nul. On a donc

$$\rho_1 D - \rho = 0 : \tag{6}$$

c'est là l'*équation de continuité*.

Le déterminant D, fonction de x, y, z, varie avec t_1, car la densité ρ_1 au point P_1 varie avec l'instant considéré t_1. Pour $t_1 = t$, P_1 se confond avec P, $\rho_1 = \rho$ et le déterminant est égal à 1, comme nous l'avons déjà vu. Quand t_1 croît, ce déterminant reste positif, car la densité ρ_1 est une quantité positive de même que ρ.

Dans le cas particulier où la matière dont on étudie la déformation est un liquide incompressible à température constante, on a constamment

$$\rho_1 = \rho, \qquad D = 1.$$

Si l'on introduit les projections **u**, **v**, **w** du vecteur PP_1 par

les formules

$$x_1 = x + u, \qquad y_1 = y + v, \qquad z_1 = z + w$$

le déterminant D s'écrit

$$(7) \qquad D = \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & 1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & 1 + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Remarque. — Sans s'appuyer sur les formules du changement de variables dans une intégrale triple, on peut obtenir l'équation de continuité (6) en exprimant qu'un élément de volume infiniment petit entourant le point P conserve la même masse après la transformation : pour faire le calcul, on prendra en P un parallélépipède rectangle construit sur trois segments infiniment petits issus de P parallèles aux axes et ayant pour longueurs respectives dx, dy, dz, et l'on exprimera que la masse de ce parallélépipède reste invariable dans la transformation. C'est du reste la méthode même qui donne les formules du changement de variables dans une intégrale triple. (*Voyez* BERTRAND, *Calcul intégral*, p. 419.)

665. Dilatation cubique en un point. — Soit un élément de volume infiniment petit $d\tau$ entourant le point P : cet élément se transforme en un élément $d\tau_1$ entourant P_1 : sa masse restant inaltérée, on a

$$\rho_1 \, d\tau_1 = \rho \, d\tau,$$

$$\frac{d\tau_1 - d\tau}{d\tau} = \frac{\rho}{\rho_1} - 1.$$

Mais le premier rapport est ce qu'on appelle *dilatation cubique du volume* $d\tau$, ou encore *dilatation cubique* au point P. Cette dilatation a donc pour valeur

$$(8) \qquad \frac{\rho}{\rho_1} - 1 = D - 1,$$

D étant le déterminant (4).

666. Déformation. Déplacement. — Imaginons un système matériel continu dont les éléments passent d'une manière continue d'une région de l'espace $\mathcal{R}$ à une région $\mathcal{R}_1$. On dit que le système a subi une *déformation* quand on ne peut pas, en le transportant tout d'une pièce, à la façon d'un corps rigide, l'amener de l'état $\mathcal{R}$ à l'état $\mathcal{R}_1$. Dans le cas très particulier où l'on pourrait amener le système de l'état $\mathcal{R}$ à l'état $\mathcal{R}_1$ par un transport d'ensemble, on dit qu'il a subi un *déplacement*. Ainsi la déformation est un changement de forme, le déplacement un simple changement de position. Deux déformations d'un même système continu sont regardées comme identiques, quand on peut passer de l'une à l'autre par un déplacement.

Nous allons montrer qu'une déformation d'un système continu est caractérisée par *six fonctions*.

Nous définirons ces fonctions, comme l'ont fait MM. Cosserat dans leur excellent Mémoire des *Annales de la Faculté de Toulouse* et dans une Note à la *Cinématique* de M. Kœnigs, en partant de la considération de l'élément linéaire. Les théorèmes sur la déformation d'un milieu continu sont, de cette façon, rattachés aux théorèmes classiques sur la déformation des surfaces et l'étude des ds^2 à plusieurs variables (*voir* les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux, t. II et III).

667. Les six fonctions associées à une déformation. — Soient, comme plus haut, x, y, z les coordonnées initiales d'un élément matériel P du milieu $\mathcal{R}$, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de la position P_1 du même élément à l'instant t_1 dans le milieu déformé $\mathcal{R}_1$. Les quantités x_1, y_1, z_1 sont des fonctions uniformes de x, y, z. Reprenons les formules

$$x_1 = x + \mathbf{u}, \qquad y_1 = y + \mathbf{v}, \qquad z_1 = z + \mathbf{w}, \tag{9}$$

où $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont des fonctions uniformes en tous les points x, y, z de $\mathcal{R}$.

Soit $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ un point du milieu $\mathcal{R}$ infiniment voisin du point $P(x, y, z)$; à ce point P' correspond, après la transformation, dans le milieu $\mathcal{R}_1$, un point

$$P'_1(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1)$$

infiniment voisin du point $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Comme x_1, y_1, z_1 sont des fonctions de x, y, z définies par les formules (1), on a

$$(10)\qquad \begin{cases} dx_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial x_1}{\partial y}dy + \dfrac{\partial x_1}{\partial z}dz, \\ dy_1 = \dfrac{\partial y_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial y_1}{\partial y}dy + \dfrac{\partial y_1}{\partial z}dz, \\ dz_1 = \dfrac{\partial z_1}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z_1}{\partial y}dy + \dfrac{\partial z_1}{\partial z}dz, \end{cases}$$

ou encore, d'après les formules (9),

$$(10')\qquad \begin{cases} dx_1 = \left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz, \\ dy_1 = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \left(1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz, \\ dz_1 = \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \left(1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)dz. \end{cases}$$

D'après cela, en désignant par ds la distance infiniment petite PP′ et par ds_1 la distance P_1P_1' des points correspondants après la transformation, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2.$$

Dans cette dernière expression remplaçons dx_1, dy_1, dz_1 par leurs valeurs (10) ou (10′), nous aurons pour ds_1^2 une forme quadratique en dx, dy, dz que nous écrirons, pour nous conformer aux notations habituelles, de la façon suivante

$$(11)\qquad \begin{aligned} ds_1^2 = {} & (1 + 2\varepsilon_1)\,dx^2 + (1 + 2\varepsilon_2)\,dy^2 + (1 + 2\varepsilon_3)\,dz^2 \\ & + 2\gamma_1\,dy\,dz + 2\gamma_2\,dz\,dx + 2\gamma_3\,dx\,dy. \end{aligned}$$

d'où

$$(12)\qquad \begin{aligned} ds_1^2 - ds^2 = {} & 2\varepsilon_1\,dx^2 + 2\varepsilon_2\,dy^2 + 2\varepsilon_3\,dz^2 \\ & + 2\gamma_1\,dy\,dz + 2\gamma_2\,dz\,dx + 2\gamma_3\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Les coefficients ε_i et γ_i s'expriment immédiatement soit à l'aide des dérivées partielles de x_1, y_1, z_1 soit à l'aide des dérivées partielles de u, v, w suivant qu'on se sert des expressions (10) ou (10′). Ainsi en prenant les expressions (10) on aurait

$$(13)\qquad 1 + 2\varepsilon_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2, \qquad \ldots.$$

Nous écrirons les expressions de ces coefficients en fonction de u, v, w

$$(14)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases}$$

ε_2 et ε_3 se déduisant de ε_1, γ_2 et γ_3 de γ_1 par permutation circulaire des lettres x, y, z et u, v, w.

Ces six coefficients sont des fonctions de x, y, z qui caractérisent la déformation considérée. Cela résulte des deux théorèmes suivants :

PREMIER THÉORÈME. — *Si les six fonctions* ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 *sont identiquement nulles, la déformation est nulle et l'on peut amener le milieu de l'état* $\mathcal{R}$ *à l'état* $\mathcal{R}_1$ *par un déplacement d'ensemble. Réciproquement, si la déformation est nulle, les six fonctions sont nulles.*

En effet, si les fonctions sont nulles, on a, d'après l'identité (12),

$$ds_1 = ds;$$

la distance de deux points infiniment voisins quelconques P, P′ du milieu primitif est égale à la distance des deux points correspondants P_1, P'_1 du milieu transformé. A une ligne quelconque ALB joignant deux points A et B du milieu primitif correspond une ligne $A_1L_1B_1$ *de même longueur* joignant les deux points correspondants A_1 et B_1 du milieu transformé : cela résulte évidemment de ce que les éléments de longueur correspondants des deux lignes L et L_1 sont égaux. A la ligne la plus courte joignant les points A et B correspond donc, dans le milieu transformé, la ligne la plus courte joignant A_1 et B_1 ; en d'autres termes, le segment de droite AB se transforme en un segment de droite *égal* A_1B_1. Un triangle ABC du milieu primitif se transforme donc en un triangle égal $A_1B_1C_1$ du milieu transformé.

Soient alors P un point quelconque du milieu primitif, P_1 le point correspondant du milieu transformé, en joignant par des droites

le point P aux points ABC et le point P_1 aux points $A_1B_1C_1$ on obtient deux tétraèdres dans lesquels les arêtes correspondantes sont égales : ces tétraèdres sont donc *égaux* ou *symétriques :* Mais, comme par hypothèse la transformation du milieu de l'état $\mathcal{R}$ à l'état $\mathcal{R}_1$ a lieu d'une manière continue, sans que le déterminant

$$D = \frac{\rho}{\rho_1}$$

cesse d'être positif, les deux tétraèdres *ne peuvent pas être symétriques* et sont nécessairement *égaux*. On amènera donc tous les points tels que P à coïncider avec les points correspondants P_1, en déplaçant le premier milieu tout d'une pièce de façon que le triangle ABC se place sur son égal $A_1B_1C_1$.

On a alors nécessairement $\rho_1 = \rho$ et par suite $D = 1$.

Quant à la réciproque, elle est évidente : si la déformation est nulle, on a identiquement $ds_1^2 = ds^2$ et par suite les six fonctions ε_i et γ_i sont nulles.

Remarque. — Nous avons dit que, le déterminant D étant positif le tétraèdre matériel PABC ne peut pas se transformer en un tétraèdre symétrique; en effet, il est facile de vérifier que, dans une transformation par symétrie, le déterminant D est égal à -1.

Indications sur la démonstration analytique. — En égalant à zéro les six expressions (14) de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, on a des équations aux dérivées partielles définissant u, v, w en fonction de x, y, z. L'intégration de ces équations montre que u, v, w et, par suite, x_1, y_1, z_1 sont des fonctions linéaires de x, y, z :

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z, \\ y_1 &= b + \beta x + \beta_1 y + \beta_2 z, \\ z_1 &= c + \gamma x + \gamma_1 y + \gamma_2 z, \end{aligned}$$

où a, b, c sont des constantes quelconques que nous regarderons comme les coordonnées d'un certain point fixe O', mais où α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 vérifient les six relations qui expriment que ces quantités sont les cosinus directeurs de trois axes rectangulaires $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. En outre, *ces trois axes sont orientés comme les axes* Ox, y, z, car le déterminant D est actuellement le déterminant des neuf cosinus α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 qui est égal, comme on sait, à ± 1. Mais D étant essentiellement positif, le déterminant des neuf cosinus

est $+1$ et l'orientation des deux systèmes d'axes est la même. Dès lors, prenons le milieu $\mathfrak{R}$ regardé comme invariablement lié aux axes Ox, y, z et transportons-le tout d'une pièce de façon que les axes Ox, y, z se superposent à $O'x', y', z'$: chaque point P du milieu $\mathfrak{R}$ ira se placer sur le point correspondant P_1 du milieu $\mathfrak{R}_1$.

Second théorème. — *Deux déformations d'un même milieu $\mathfrak{R}$, pour lesquelles les six fonctions ε_i et γ_i sont identiques, sont des déformations identiques, c'est-à-dire telles que l'on passe de l'une à l'autre par un déplacement d'ensemble, et réciproquement.*

En effet, la première déformation amène le milieu $\mathfrak{R}$ à l'état $\mathfrak{R}_1$; un élément linéaire ds_1 de milieu $\mathfrak{R}_1$ est lié à l'élément correspondant ds du milieu $\mathfrak{R}$ par la relation (12). La seconde déformation amène le milieu $\mathfrak{R}$ à l'état $\mathfrak{R}_2$; un élément ds_2 du milieu déformé $\mathfrak{R}_2$ est lié à l'élément ds du milieu primitif $\mathfrak{R}$ par une relation analogue à (12). Comme les six fonctions ε_i et γ_i sont supposées les mêmes dans les deux déformations, on a

$$ds_2^2 = ds_1^2.$$

Deux éléments linéaires correspondants des deux milieux $\mathfrak{R}_1$ et $\mathfrak{R}_2$ sont donc égaux. On en conclut, comme dans le théorème précédent, que le milieu $\mathfrak{R}_1$ et le milieu $\mathfrak{R}_2$ peuvent être superposés par un déplacement d'ensemble.

Inversement, si les deux déformations transformant $\mathfrak{R}$ en $\mathfrak{R}_1$ puis en $\mathfrak{R}_2$ sont *identiques,* on a

$$ds_2^2 = ds_1^2$$

et les six fonctions ε_i et γ_i sont *les mêmes* pour les deux déformations.

668. **Dilatations linéaires autour d'un point du milieu primitif : ellipsoïde des dilatations en ce point.** — Les considérations suivantes précisent la signification des six coefficients ε_i et γ_i. Soient P un point choisi dans le milieu primitif et P_1 son correspondant dans le milieu déformé. Prenons un point quelconque P' infiniment voisin de P situé à la distance $PP' = ds$ du point P; à ce

point correspond un point P'_1 infiniment voisin de P_1 et à une distance $P_1P'_1 = ds_1$ de P_1.

L'élément linéaire PP′, en passant à la nouvelle position $P_1P'_1$, change *de longueur et d'orientation*. Portons ici notre attention uniquement sur le changement de *longueur* : l'élément PP′ subit une dilatation positive ou négative $ds_1 - ds$ et le coefficient δ de cette dilatation (rapport de la dilatation à la longueur primitive) est

$$\delta = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \frac{ds_1}{ds} - 1. \tag{15}$$

Cette quantité δ peut prendre toutes les valeurs *positives, négatives* ou *nulles,* à l'exception de la valeur -1. Elle varie autour du point P, regardé comme fixe, avec la direction de l'élément PP′. Appelons α, β, γ les cosinus directeurs de PP′ ;

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds};$$

la formule fondamentale (11) donne

$$\left\{\begin{aligned} \frac{ds_1^2}{ds^2} &= (1+2\varepsilon_1)\alpha^2 + (1+2\varepsilon_2)\beta^2 + (1+2\varepsilon_3)\gamma^2 \\ &\quad + 2\gamma_1\beta\gamma + 2\gamma_2\gamma\alpha + 2\gamma_3\alpha\beta. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Pour représenter géométriquement la variation du rapport $\frac{ds_1}{ds}$ autour du point P, portons sur PP′ une longueur

$$PQ = \frac{ds}{ds_1} = \frac{1}{1+\delta}$$

et cherchons le lieu du point Q, quand on donne à P′ toutes les positions possibles autour du point déterminé P. Par rapport à des axes PX, PY, PZ menés par P parallèlement aux axes coordonnés, le point Q a pour coordonnées

$$X = \frac{ds}{ds_1}\alpha, \qquad Y = \frac{ds}{ds_1}\beta, \qquad Z = \frac{ds}{ds_1}\gamma. \tag{Q}$$

D'après la relation (16), le lieu du point Q, quand α, β, γ varient, est donc la quadrique

$$\left\{\begin{aligned} \psi(X,Y,Z) &= (1+2\varepsilon_1)X^2 + (1+2\varepsilon_2)Y^2 + (1+2\varepsilon_3)Z^2 \\ &\quad + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY = 1. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Comme le point Q est réel, quelle que soit la direction α, β, γ, cette quadrique est un ellipsoïde de centre P : on l'appelle *ellipsoïde des dilatations au point* P. Cet ellipsoïde étant construit, on connaît les dilatations linéaires de tous les éléments infiniment petits PP′ autour de P. La direction de PP′ prolongée perce l'ellipsoïde en un point Q, et l'on a, pour le coefficient de dilatation de PP′,

$$\delta = \frac{1}{PQ} - 1.$$

La dilatation peut être positive, négative ou nulle : pour distinguer les divers cas, décrivons, de P comme centre, avec l'unité comme rayon, une sphère S : cette sphère coupe l'ellipsoïde suivant une courbe C qui divise la surface de l'ellipsoïde en deux régions, l'une E_e extérieure à la sphère, l'autre E_i intérieure. Si la direction PP′ de l'élément *ds* perce l'ellipsoïde en un point Q de la région extérieure E_e, PQ est supérieur à 1, δ est négatif et l'élément se contracte dans la déformation ; si Q est dans la région intérieure E_i, δ est positif et l'élément s'allonge ; si Q est sur la courbe de séparation C, $\delta = 0$, l'élément *ds* ne change pas de longueur. Il peut arriver que la sphère S ne coupe pas l'ellipsoïde ; alors la courbe C n'existe pas : la région E_e ou la région E_i envahit tout l'ellipsoïde, suivant que l'ellipsoïde est tout entier extérieur ou intérieur à la sphère S ; dans le premier cas, les éléments linéaires issus de P se contractent tous ; dans le second, ils se dilatent tous.

En prenant comme origine le point P, la courbe C est définie par l'intersection de l'ellipsoïde (17) avec la sphère de rayon 1

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \qquad (S)$$

Le cône lieu des éléments PP′ issus de P, qui ne changent pas de longueur, a pour sommet P et pour directrice la courbe C : son équation s'obtient en retranchant membre à membre les équations (17) et (S) de l'ellipsoïde et de la sphère : on a ainsi le cône

$$\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 + \gamma_1 YZ + \gamma_2 ZX + \gamma_3 XY = 0$$

qui n'existe pas quand la sphère S ne coupe pas l'ellipsoïde.

Significations géométriques particulières des coefficients ε_1, ε_2, ε_3 ; *dilatations des éléments primitivement parallèles aux axes de coordonnées.* — Imaginons un élément $PP' = ds$ issu de P et parallèle à Ox : appelons δ_1 son coefficient de dilatation. Si l'on désigne par ds_1 la longueur de cet élément après la déformation, on a, d'après les formules précédentes (16) où

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0$$

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1}, \qquad \delta_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1 ;$$

de même en appelant δ_2 et δ_3 les coefficients de dilatation de deux éléments linéaires issus de P parallèles aux axes Oy et Oz, on a

$$\delta_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1, \qquad \delta_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1.$$

Ces formules définissent géométriquement ε_1, ε_2, ε_3 en chaque point P du milieu $\mathfrak{R}$.

669. Dilatations angulaires autour d'un point. — Soient deux éléments linéaires infiniment petits $ds = PP'$ et $ds' = PQ'$ issus du point P : soient dx, dy, dz les projections du premier, dx', dy', dz' celles du second : l'angle θ de ces deux directions est donné par

$$ds\, ds' \cos\theta = dx\, dx' + dy\, dy' + dz\, dz'.$$

Après la déformation, les points P, P', Q' sont venus en P_1, P'_1, Q'_1, les deux éléments ds et ds' se sont transformés en $ds_1 = P_1P'_1$, $ds'_1 = P_1Q'_1$: si nous appelons dx_1, dy_1, dz_1 et dx'_1, dy'_1, dz'_1 les projections de ces éléments, le nouvel angle θ_1 formé par les éléments déformés est donné par

$$ds_1\, ds'_1 \cos\theta_1 = dx_1\, dx'_1 + dy_1\, dy'_1 + dz_1\, dz'_1.$$

La variation $\theta_1 - \theta$ est appelée la *dilatation* de l'angle $P'PQ'$. L'expression de $\cos\theta_1$ est aisée à former : d'après les formules

$$x_1 = x + \mathrm{u}, \qquad y_1 = y + \mathrm{v}, \qquad z_1 = z + \mathrm{w},$$

où u, v, w sont des fonctions de x, y, z, on a, en faisant croître

d'abord x, y, z de dx, dy, dz, les projections de $P_1P'_1$

$$\begin{aligned} dx_1 &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,\\ dy_1 &= \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz,\\ dz_1 &= \frac{\partial w}{\partial x}\,dx + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz, \end{aligned}$$

puis, en faisant croître x, y, z de dx', dy', dz', les projections de $P_1Q'_1$

$$\begin{aligned} dx'_1 &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx' + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy' + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz',\\ dy'_1 &= \frac{\partial v}{\partial x}\,dx' + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy' + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz',\\ dz'_1 &= \frac{\partial w}{\partial x}\,dx' + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy' + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz'. \end{aligned}$$

On en conclut

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} ds_1\,ds'_1\cos\theta_1 = {} & (1+2\varepsilon_1)\,dx\,dx' + (1+2\varepsilon_2)\,dy\,dy'\\ & + (1+2\varepsilon_3)\,dz\,dz' + \gamma_1(dy\,dz' + dz\,dy')\\ & + \gamma_2(dz\,dx' + dx\,dz') + \gamma_3(dx\,dy' + dy\,dx'). \end{aligned}\right.$$

où ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont les coefficients caractéristiques de la déformation, définis par les formules (14). On peut écrire cette formule d'une façon un peu plus simple en introduisant la forme quadratique

$$\begin{aligned} \psi(X,Y,Z) = {} & (1+2\varepsilon_1)X^2 + (1+2\varepsilon_2)Y^2 + (1+2\varepsilon_3)Z^2\\ & + 2\gamma_1 YZ + 2\gamma_2 ZX + 2\gamma_3 XY, \end{aligned}$$

qui forme le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde des dilatations au point P. Si alors on appelle α, β, γ et α', β', γ' les cosinus directeurs des deux éléments ds et ds',

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \qquad \ldots,$$

on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{ds_1\,ds'_1\cos\theta_1}{ds\,ds'} &= (1+2\varepsilon_1)\alpha\alpha' + (1+2\varepsilon_2)\beta\beta'\\ &\quad + \ldots + \gamma_1(\beta\gamma' + \gamma\beta') + \ldots\\ &= \frac{1}{2}[\alpha'\psi'_\alpha + \beta'\psi'_\beta + \gamma'\psi'_\gamma]. \end{aligned}\right.$$

La connaissance de l'ellipsoïde des dilatations en un point P entraîne donc, d'une manière simple, la connaissance des dilatations angulaires autour de ce point.

En particulier, *pour que l'angle* θ_1 *soit droit, il faut et il suffit qu'avant la déformation on ait*

$$\alpha'\psi'_\alpha + \beta'\psi'_\beta + \gamma'\psi'_\gamma = 0,$$

c'est-à-dire que les deux directions PP′ *et* PQ′ *soient conjuguées par rapport à l'ellipsoïde des dilatations au point* P :

$$\psi(X, Y, Z) = 1.$$

On en conclut qu'*il existe trois éléments linéaires issus de* P *qui forment un trièdre trirectangle avant et après la déformation; ce sont les éléments dirigés primitivement suivant les axes de l'ellipsoïde des dilatations au point* P.

Les directions de ces axes sont les directions *principales* au point P.

Signification particulière des coefficients γ_1, γ_2, γ_3 : *dilatations des faces du trièdre primitivement parallèle aux axes.* Ces considérations conduisent à l'interprétation géométrique suivante des coefficients γ_1, γ_2, γ_3. Soit, au point P, un angle P′PQ′ dont les côtés infiniment petits PP′ $= ds$ et PQ′ $= ds'$ sont respectivement parallèles à Oy et Oz : alors

$$(20) \qquad \begin{cases} \alpha = 0, & \beta = 1, & \gamma = 0, \\ \alpha' = 0, & \beta' = 0, & \gamma' = 1. \end{cases}$$

Après la déformation ces deux éléments deviennent $P_1P'_1 = ds_1$, $P_1Q'_1 = ds'_1$, leurs variations de longueur sont données par les formules

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}, \qquad \frac{ds'_1}{ds'} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3};$$

leur angle $\alpha_1 = P'_1P_1Q'_1$ est donné par la formule (19) où α, β, γ, α', β', γ' prennent les valeurs particulières (20), et où l'on remplace θ_1 par α_1 : on a donc

$$\frac{ds_1\, ds'_1 \cos\alpha_1}{ds\, ds'} = \gamma_1,$$

d'où

$$\gamma_1 = \sqrt{1+2\varepsilon_2}\sqrt{1+2\varepsilon_3}\cos\alpha_1, \tag{21}$$

relation qui définit géométriquement γ_1.

On a, de même, γ_2 et γ_3 en chaque point P.

670. **Dilatations principales.** — On appelle *dilatations principales,* en un point P du milieu primitif, les coefficients de dilatation Δ_1, Δ_2,, Δ_3 des trois éléments linéaires issus de P dirigés primitivement suivant les axes de l'ellipsoïde des dilatations en P. Appelons A, B, C les trois sommets de cet ellipsoïde; le coefficient de dilatation de l'élément dirigé suivant PA est

$$\Delta_1 = \frac{1}{PA} - 1;$$

on a de même, pour les éléments dirigés suivant PB et PC, les coefficients de dilatation

$$\Delta_2 = \frac{1}{PB} - 1, \qquad \Delta_3 = \frac{1}{PC} - 1.$$

Pour calculer Δ_1, Δ_2 Δ_3, on est donc ramené à calculer les axes PA, PB, PC de l'ellipsoïde (17). Pour cela, on forme l'équation en S relative à cet ellipsoïde

$$\begin{vmatrix} 1+2\varepsilon_1-S & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1+2\varepsilon_2-S & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1+2\varepsilon_3-S \end{vmatrix} = 0.$$

Les racines S_1, S_2, S_3 de cette équation sont les carrés des inverses des longueurs des axes $\frac{1}{PA^2}$, $\frac{1}{PB^2}$, $\frac{1}{PC^2}$. On a donc

$$\Delta_1 = \sqrt{S_1} - 1, \qquad \Delta_2 = \sqrt{S_2} - 1, \qquad \Delta_3 = \sqrt{S_3} - 1.$$

671. **Invariants.** — Quand on fait un changement d'axes de coordonnées rectangulaires, l'équation de l'ellipsoïde des dilatations (17) change; les six coefficients ε_i et γ_i prennent de nouvelles valeurs qui se déduiraient des premières par les formules classiques du changement d'orientation des axes. Mais on sait que, dans une quadrique

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY = H,$$

il existe trois fonctions des coefficients qui restent inaltérées quand on fait un changement d'axes rectangulaires, à savoir les fonctions

$$A + A' + A'',$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 - A'A'' - A''A - AA'$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'',$$

dont la dernière est ce qu'on appelle le *discriminant* de la forme quadratique.

Appliquant ce théorème à l'ellipsoïde (17), on voit, en laissant de côté des constantes, qu'en chaque point P du milieu initial il existe trois fonctions *invariantes* dont la valeur est indépendante de l'orientation des axes et dépend seulement de la nature de la déformation; ce sont les fonctions

$$(22) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2), \\ 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2. \end{cases}$$

Ces trois quantités ont donc, dans la déformation, une signification indépendante du choix des axes.

Prenons en particulier le discriminant de (17)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix};$$

la règle qui donne le carré d'un déterminant montre immédiatement que ce discriminant Δ est égal à D^2, D étant le déterminant (7), ou à $\frac{\rho^2}{\rho_1^2}$.

Le coefficient de dilatation cubique au point P, égal à $D - 1$, est donc aussi exprimé par $\sqrt{\Delta} - 1$.

672. Déformation inverse. — On pourrait évidemment regarder l'état $\mathcal{R}_1$ comme initial et l'état $\mathcal{R}$ comme final : on aurait alors la déformation inverse de la première. Dans cette façon de voir, il faudrait regarder x, y, z comme des fonctions de x_1, y_1, z_1 tirées des relations (1). Cette déformation serait définie par le système des vecteurs P_1P d'origine P_1 et d'extrémité P, ayant pour projections $-u$, $-v$, $-w$.

En chaque point P_1 du milieu $\mathcal{R}_1$ il y aurait un ellipsoïde des dilatations dont les axes donneraient les trois directions des élé-

ments linéaires issus de P_1 formant un trièdre trirectangle avant et après la déformation. On voit, par comparaison avec le même théorème relatif à l'ellipsoïde des dilatations au point P, que trois éléments linéaires issus de P et dirigés suivant les axes de l'ellipsoïde des dilatations en P se transforment en trois éléments issus de P_1 et dirigés suivant les axes de l'ellipsoïde des dilatations relatif au point P_1 dans la déformation inverse.

673. **Équations aux dérivées partielles pour les ε_i et γ_i.** — Les six fonctions ε_i et γ_i qui caractérisent une déformation ne peuvent pas être prises arbitrairement en fonction de x, y, z. En effet, d'après les relations (14), ces six fonctions dépendent seulement de trois fonctions arbitraires **u, v, w** dont l'élimination conduirait à des équations aux dérivées partielles entre les ε_i et les γ_i.

II. — DÉFORMATION HOMOGÈNE.

674. **Définition d'une déformation homogène.** — Les considérations précédentes s'appliquent à une déformation quelconque. Dans le cas général la déformation est caractérisée par les six quantités ε_i et γ_i qui sont des fonctions des coordonnées x, y, z dans le milieu primitif : ou encore, au point de vue géométrique, la déformation est définie par l'ensemble des ellipsoïdes de déformation relatifs aux divers points P.

Le cas le plus simple est le cas où *la déformation est la même autour de chaque point* P, c'est-à-dire le cas où les six fonctions ε_i et γ_i *ne varient pas* avec la position du point P : dans ce cas particulier, où les six quantités ε_i et γ_i sont des *constantes indépendantes de* x, y, z, la déformation est d'après sir W. Thomson (Lord Kelvin) une *déformation homogène*. Les ellipsoïdes des dilatations en tous les points P sont alors *égaux et orientés de la même façon*.

Il en résulte que la dilatation linéaire d'un élément du milieu primitif ne dépend que de sa direction et non de sa position dans ce milieu; de même la dilatation de l'angle de deux éléments ne dépend que de la direction de ses côtés et non de la position du sommet; en particulier, deux éléments parallèles se transforment en deux éléments parallèles. A chaque direction est ainsi associée

une dilatation linéaire suivant cette direction, et à chaque système de deux directions une dilatation angulaire de leur angle.

Propriétés géométriques. — On conclut de cette définition les propriétés suivantes qui caractérisent géométriquement une déformation homogène :

1° *A deux segments de droites parallèles entre eux du premier milieu correspondent deux segments de droites parallèles entre eux du second milieu, et le rapport des deux segments est le même avant et après la déformation.*

En effet, d'après ce qui précède, si l'on considère dans le premier milieu des éléments linéaires égaux et parallèles entre eux, il leur correspond dans le second milieu des éléments linéaires égaux et parallèles entre eux. Soit alors AB un segment de droite du premier milieu; divisons ce segment en éléments linéaires égaux entre eux et nécessairement parallèles. Il leur correspond des éléments linéaires égaux et parallèles entre eux portés bout à bout et formant, par suite, un nouveau segment de droite A_1B_1, tel que le rapport des longueurs $\frac{A_1B_1}{AB}$ soit précisément le rapport des éléments linéaires correspondants : le coefficient de dilatation de ce segment est donc identique à celui des éléments linéaires qui le composent.

A un second segment A'B' du milieu primitif parallèle à AB correspond, d'après le même raisonnement, un segment $A'_1B'_1$ parallèle à A_1B_1 ayant subi la même dilatation relative, et l'on a

$$\frac{A'_1B'_1}{A'B'} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

2° *A des plans du premier milieu parallèles entre eux répondent dans le second milieu des plans parallèles entre eux.* Deux plans parallèles Π et Π' du premier milieu peuvent être regardés comme engendrés par des droites mobiles D et D' parallèles à une même direction s'appuyant respectivement sur deux directrices fixes Δ et Δ' parallèles à une autre direction. A ces droites mobiles correspondent dans le second milieu les droites mobiles D_1 et D'_1 parallèles à une même direction s'appuyant respectivement sur deux directrices fixes Δ_1 et Δ'_1 parallèles à une autre direction : ces droites D_1 et D'_1 engendrent deux plans parallèles Π_1 et Π'_1 correspondant à Π et Π'.

Ces propriétés sont caractéristiques de la *transformation homographique conservant le plan de l'infini.*

675. **Formules.** — Prenons, comme dans le cas général, un système d'axes quelconque $Oxyz$ auquel nous rapporterons le milieu primitif et le milieu transformé.

Les propriétés géométriques que nous venons d'indiquer montrent que x_1, y_1, z_1 doivent être des fonctions linéaires de x, y, z. En effet, en laissant y et z constants et faisant varier seulement x, on fait décrire au point $P(x, y, z)$ une droite parallèle à Ox; dans ces conditions, le point $P_1(x_1, y_1, z_1)$, dont les coordonnées varient avec x, doit décrire également une droite parallèle à une direction fixe; donc les cosinus directeurs de la tangente au lieu du point P_1 sont des constantes indépendantes des valeurs attribuées à y et z. Ces cosinus sont proportionnels à $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial x}$; mais la quantité

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2$$

étant égale à $1 + 2\varepsilon_1$, est actuellement *constante,* puisque ε_1 est constant : en écrivant que les cosinus directeurs

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_1}}\frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_1}}\frac{\partial y_1}{\partial x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+2\varepsilon_1}}\frac{\partial z_1}{\partial x}$$

sont constants, on voit que $\frac{\partial x_1}{\partial x}, \frac{\partial y_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial x}$ sont constants, c'est-à-dire que x_1, y_1, z_1 sont des fonctions linéaires de x. On verrait de même que x_1, y_1, z_1 sont linéaires par rapport aux trois lettres x, y, z, *à la fois.* C'est ce que nous voulions établir.

Les formules de transformation définissant une déformation homogène sont donc de la forme :

$$(23) \qquad \begin{cases} x_1 = a_{10} + (1 + a_{11})x + a_{12}\,y + a_{13}z, \\ y_1 = a_{20} + a_{21}\,x + (1 + a_{22})y + a_{23}z, \\ z_1 = a_{30} + a_{31}\,x + a_{32}\,y + (1 + a_{33})z, \end{cases}$$

les coefficients a_{ij} étant des constantes quelconques, assujetties à la condition que les relations (23) donnent, inversement, pour

chaque système de valeurs de x_1, y_1, z_1, un seul système de valeurs pour x, y, z. Cela revient à dire que le déterminant D, qui a été défini précédemment (7) et qui est ici

$$D = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 + a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 1 + a_{33} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. D'après sa signification physique, ce déterminant doit, en outre, être positif.

Les six coefficients caractéristiques de cette déformation ont les valeurs constantes

$$(24) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = a_{11} + \frac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2), \ldots . \\ \gamma_1 = a_{32} + a_{23} + a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}. \ldots . \end{cases}$$

676. Simplification des formules à l'aide d'une translation. — On peut toujours rendre les trois coefficients a_{10}, a_{20}, a_{30} nuls sans modifier la *déformation* : on en voit *a priori* la raison dans ce fait que ces coefficients ne figurent pas dans les ε_i et les γ_i. On le voit directement de la façon suivante : Soit O′ le point du système primitif $\mathfrak{R}$ auquel correspond l'origine O dans la transformation. Les coordonnées α, β, γ de ce point doivent annuler les seconds membres des formules (23)

$$(25) \qquad a_{10} + (1 + a_{11})\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \quad \ldots .$$

puisque, pour x, y, z égaux à α, β, γ, on doit trouver x_1, y_1, z_1 nuls.

Supposons alors qu'on imprime au système $\mathfrak{R}$ une translation d'ensemble qui amène O′ en O. Cette translation amènera les points P en des points P′ dont les coordonnées x', y', z' sont liées aux coordonnées x, y, z de P par les formules

$$x = \alpha + x', \qquad y = \beta + y', \qquad z = \gamma + z'.$$

Les formules (23) deviennent alors, d'après les relations (25),

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 + a_{11})x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y_1 &= a_{21}x' + \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_1 &= a_{31}x' + \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'elles conservent la même forme, avec cette seule différence que les termes constants ont disparu.

D'après cela nous considérerons, dans tout ce qui suit, les coefficients a_{10}, a_{20}, a_{30} comme rendus nuls par une translation préliminaire et nous étudierons la déformation définie par les formules

$$(26)\qquad \begin{cases} x_1 = (1+a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z, \\ y_1 = a_{21}x + (1+a_{22})y + a_{23}z, \\ z_1 = a_{31}x + a_{32}y + (1+a_{33})z, \end{cases}$$

qui donnent pour le segment PP_1 les projections

$$(27)\qquad \begin{cases} u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\ v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\ w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Dans ces formules, l'origine est caractérisée par ce fait qu'elle se correspond à elle-même dans la déformation, puisque les valeurs $x = y = z = 0$ donnent $x_1 = y_1 = z_1 = 0$.

Nous avons vu que, dans une déformation quelconque, il existe, en chaque point P du milieu primitif, trois éléments linéaires rectangulaires qui se transforment en trois éléments rectangulaires. Actuellement l'orientation de ces éléments est indépendante du choix du point P; de plus, comme une droite devient une droite, on peut dire qu'il existe trois directions de droites rectangulaires qui se transforment en trois directions rectangulaires. Ces directions sont les axes de l'ellipsoïde des dilatations (17) dans l'équation duquel les coefficients ont les valeurs constantes (24).

On peut ici retrouver ce résultat par une voie plus élémentaire en remarquant que, d'après les formules (26), une sphère

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = R^2$$

du second milieu correspond à un ellipsoïde

$$[(1+a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z]^2 + \ldots + \ldots = R^2$$

du premier. A trois diamètres conjugués de cet ellipsoïde correspondent trois diamètres rectangulaires de la sphère : par suite, les trois axes de cet ellipsoïde OXYZ forment un système d'axes rectangulaires qui se transforment en trois axes rectangulaires $OX_1Y_1Z_1$.

677. Déformation pure : directions principales; coefficients de dilatation principaux. — On dit qu'une déformation homogène est une déformation *pure,* quand *il existe dans le premier milieu trois directions rectangulaires qui restent inaltérées par la déformation.*

En général, il existe dans une déformation homogène trois directions rectangulaires OXYZ qui se transforment respectivement en trois autres directions rectangulaires $OX_1Y_1Z_1$. La déformation est *pure* quand les deux trièdres OXYZ, $OX_1Y_1Z_1$ *se confondent.* Les arêtes de ces deux trièdres constituent alors ce qu'on peut appeler les *directions principales* de la déformation pure.

Imaginons que l'on prenne ces directions principales OXYZ pour axes. Appelons x', y', z' les coordonnées d'un point P avant la déformation, x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de la position P_1 de ce point après la déformation.

La déformation étant homogène, les expressions de x'_1, y'_1, z'_1 en fonctions de x', y', z' sont de la forme (26) et l'on a

$$\begin{aligned} x'_1 &= (1+A_{11})x' + A_{12}y' + A_{13}z', \\ y'_1 &= A_{21}x' + (1+A_{22})y' + A_{23}z', \\ z'_1 &= A_{31}x' + A_{32}y' + (1+A_{33})z', \end{aligned}$$

où les A_{ij} sont des constantes. Par hypothèse, quand le point P est sur OX, le point correspondant P_1 doit être aussi sur OX; donc, quand y' et z' sont nuls, y'_1 et z'_1 doivent l'être, *quel que soit* x', ce qui exige que A_{21}, A_{31} soient nuls. On voit de même que tous les coefficients autres que A_{11}, A_{22}, A_{33} sont nuls. La déformation pure rapportée à ses directions principales est donc définie par les relations

$$(28)\qquad x'_1 = (1+A_{11})x', \qquad y'_1 = (1+A_{22})y', \qquad z'_1 = (1+A_{33})z'.$$

Les coefficients A_{11}, A_{22}, A_{33} figurant dans ces formules réduites sont les *coefficients de dilatation principaux* Δ_1, Δ_2, Δ_3 (670). Cela résulte des formules générales. On peut le vérifier directement. Les ellipsoïdes des dilatations sont actuellement tous égaux et ont leurs axes parallèles aux directions principales OXYZ; prenons une droite PQ parallèle à l'axe OX dont les extrémités ont pour coordonnées x', y', z' et x'', y', z' : la transforma-

tion (28) transforme cette droite en une autre droite P_1Q_1 également parallèle à OX dont les extrémités ont pour abscisses

$$x'_1 = (1 + A_{11})x', \qquad x''_1 = (1 + A_{11})x''.$$

Le coefficient de dilatation de cette droite est alors

$$\frac{P_1Q_1 - PQ}{PQ} = \frac{x''_1 - x'_1 - (x'' - x')}{x'' - x'},$$

c'est-à-dire A_{11}. Un calcul analogue montre que les droites parallèles à OY et OZ subissent des dilatations de coefficients A_{22} et A_{33}.

On voit d'après cela qu'une *déformation pure* est constituée par un ensemble de trois dilatations effectuées parallèlement à trois axes rectangulaires : ces axes sont les axes principaux de la déformation pure et les trois coefficients de dilatation les coefficients de dilatation principaux.

678. **Détermination des axes et des coefficients d'une déformation pure.** — Étant donnée une déformation homogène définie par les équations (26) ou (27), il s'agit de reconnaître si c'est une *déformation pure* et, dans le cas de l'affirmative, de trouver les directions principales et les coefficients de dilatation principaux.

Théorème. — *Pour qu'une déformation homogène soit une déformation pure, il faut et il suffit que le champ de vecteurs* PP_1 *dérive d'une fonction de vecteurs, c'est-à-dire que* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ *soient les dérivées partielles d'une fonction du second degré de* x, y, z.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de remarquer que la propriété, pour un champ de vecteurs, de dériver d'une fonction est indépendante du choix des axes.

La condition indiquée est nécessaire, car, si la déformation est *pure,* en prenant pour axes les directions principales OXYZ on a, pour définir les coordonnées de P_1 en fonction de celles de P, les formules (28), d'où pour les projections $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ du vecteur PP_1 sur les axes OXYZ

$$\mathbf{u}' = x'_1 - x' = A_{11}x', \qquad \mathbf{v}' = A_{22}y', \qquad \mathbf{w}' = A_{33}z',$$

qu'on peut écrire

$$\mathbf{u}' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'}, \qquad \mathbf{v}' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'}, \qquad \mathbf{w}' = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'},$$

en posant

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}_{11}x'^2 + \mathrm{A}_{22}y'^2 + \mathrm{A}_{33}z'^2).$$

Elle est suffisante : en effet, supposons que dans les formules générales (27) définissant $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ pour une déformation homogène quelconque, par rapport à des axes $Oxyz$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ soient les dérivées partielles d'une même fonction F de x, y, z : ou, ce qui revient au même, supposons que l'on ait $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$, ..., c'est-à-dire

$$a_{12} = a_{21}, \qquad a_{23} = a_{32}, \qquad a_{31} = a_{13}. \tag{29}$$

La fonction F est alors

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy), \tag{30}$$

et l'on a

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}, \qquad \mathbf{w} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}. \tag{31}$$

Les surfaces du second degré ayant pour équation

$$\mathrm{F}(x, y, z) = \text{const.} \tag{32}$$

jouent à l'égard du vecteur $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ le rôle de *surfaces de niveau*. Ces surfaces ont même centre O et mêmes directions d'axes principaux OXYZ. Faisons tourner les axes de façon à prendre comme nouveaux axes OXYZ et appelons x', y', z' les nouvelles coordonnées d'un point P et $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$ les nouvelles projections du vecteur PP_1 : la fonction F prendra la forme réduite

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}_{11}x'^2 + \mathrm{A}_{22}y'^2 + \mathrm{A}_{33}z'^2),$$

et l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x'} = \mathrm{A}_{11}x', \\ \mathbf{v}' &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y'} = \mathrm{A}_{22}y', \\ \mathbf{w}' &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z'} = \mathrm{A}_{33}z' \end{aligned}\right. \tag{33}$$

La déformation est donc *pure*. On voit qu'elle a pour axes les axes des quadriques (32) et pour coefficients de dilatation principaux les doubles des coefficients des carrés des variables dans l'équation de ces quadriques rapportées à leurs axes.

Nous avons vu précédemment (n° 670) comment on peut, connaissant les coefficients ε_i et γ_i, déterminer les directions principales et les coefficients de dilatation principaux en un point P du milieu primitif. On pourrait appliquer, en particulier, cette méthode au cas actuel.

Quand on suppose connus les coefficients $a_{11}, \ldots, a_{12}, \ldots$ d'une déformation pure ($a_{ik} = a_{ki}$) on voit, d'après ce qui précède, que le problème de trouver les axes principaux d'une déformation pure et les coefficients de dilatation principaux peut être ramené au problème classique : *rapporter la surface du second ordre* (32) *à ses axes de symétrie*. On sait que ce problème exige la résolution de l'équation du troisième degré en S

$$\begin{aligned}&(a_{11}-S)(a_{22}-S)(a_{33}-S)-(a_{11}-S)a_{23}^2\\&\quad-(a_{22}-S)a_{13}^2-(a_{33}-S)a_{21}^2+2a_{23}a_{13}a_{21}=0,\end{aligned}$$

qui a toujours ses racines réelles et égales précisément aux coefficients A_{11}, A_{22}, A_{33} de la forme réduite, c'est-à-dire aux coefficients de dilatation principaux.

On peut remarquer que, pour une déformation pure rapportée à ses axes principaux (formules 28), les valeurs des six coefficients ε_i et γ_i sont

$$\varepsilon'_1 = A_{11} + \frac{1}{2}A_{11}^2, \qquad \varepsilon'_2 = A_{22} + \frac{1}{2}A_{22}^2,$$

$$\varepsilon'_3 = A_{33} + \frac{1}{2}A_{33}^2,$$

$$\gamma'_1 = 0, \qquad \gamma'_2 = 0, \qquad \gamma'_3 = 0.$$

L'équation de l'ellipsoïde des dilatations (17) rapporté à ces mêmes axes est donc

$$(1+A_{11})^2x'^2+(1+A_{22})^2y'^2+(1+A_{33})^2z'^2=1,$$

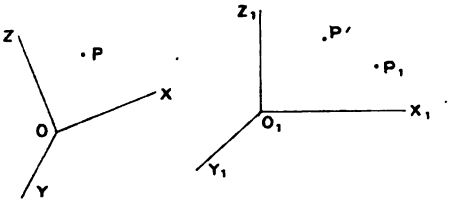
ce qui est une vérification des formules générales du n° 668, car actuellement les coefficients de dilatation des éléments parallèles aux axes de coordonnées étant A_{11}, A_{22}, A_{33}, on doit avoir

par exemple,

$$A_{11} = \sqrt{1 + 2\varepsilon'_1} - 1.$$

679. Théorème. — *Toute déformation homogène peut être obtenue par une translation et une rotation suivies d'une déformation pure.* — En effet, soient OXYZ les axes principaux de l'ellipsoïde des dilatations en un point quelconque O, déter-

Fig. 325.



miné dans le premier milieu $\mathcal{R}$: on sait que la déformation fait correspondre à ces trois droites rectangulaires trois autres droites rectangulaires $O_1X_1Y_1Z_1$.

Considérons le système primitif non déformé $\mathcal{R}$ comme un solide invariablement lié au trièdre OXYZ et transportons ce solide en $\mathcal{R}'$ de façon à faire coïncider le trièdre OXYZ avec le trièdre $O_1X_1Y_1Z_1$, chaque axe se plaçant sur son correspondant. Ce déplacement peut-être réalisé par une *translation* amenant O en O_1 suivie d'une *rotation* autour d'un axe issu de O_1 amenant les deux trièdres en coïncidence.

Une fois ce déplacement effectué, pour passer du milieu continu $\mathcal{R}'$ au milieu continu final $\mathcal{R}_1$, il faut lui faire subir une déformation *pure* d'axes $O_1X_1Y_1Z_1$. En effet, soient P un point quelconque du milieu $\mathcal{R}$, P_1 sa position finale dans le milieu $\mathcal{R}_1$. Après le déplacement d'ensemble du milieu $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$, obtenu par la superposition de OXYZ à $O_1X_1Y_1Z_1$, le point P occupe une position P' dans le milieu $\mathcal{R}'$.

Il faut montrer que la transformation du milieu $\mathcal{R}'$ dans le milieu final $\mathcal{R}_1$, transformation qui fait correspondre à chaque point P' le point P_1, est une *déformation pure* d'axes $O_1X_1Y_1Z_1$. Or cette dernière transformation est évidemment une transformation homogène dans laquelle les axes O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 se cor-

respondent à eux-mêmes, car P' étant sur O_1X_1, P est sur OX et, par suite, P_1 sur O_1X_1. C'est donc une déformation pure d'axes $O_1X_1Y_1Z_1$.

Cette réduction d'une déformation homogène à une translation, suivie d'une rotation, suivie d'une déformation pure est possible d'une infinité de manières, car le choix du point O est arbitraire: mais la translation seule change avec le choix du point O; la rotation et la déformation pure sont inaltérées; ce dernier fait résulte de ce que, quel que soit le choix du point O, les trois droites OXYZ sont parallèles à des directions fixes et que leurs transformées $O_1X_1Y_1Z_1$ sont également parallèles à trois autres directions fixes.

Nous avons (n° 667) considéré comme identiques deux déformations qui peuvent se ramener l'une à l'autre par un déplacement d'ensemble. On peut donc résumer le théorème que nous venons de démontrer en disant que *toute déformation homogène est identique à une déformation pure*.

Remarque I. — Il est évident que, pour amener les axes OXYZ en coïncidence avec $O_1X_1Y_1Z_1$, on pourrait faire *d'abord la rotation* des axes OXYZ de façon à les rendre parallèles aux axes $O_1X_1Y_1Z_1$, *puis la translation* OO_1. On peut donc, dans le théorème qui fait l'objet de ce numéro, faire d'abord la rotation, puis la translation et enfin la déformation pure.

Remarque II. — Dans le cas particulier où la déformation homogène donnée serait *pure*,

$$a_{12} = a_{21}, \qquad a_{23} = a_{32}, \qquad a_{31} = a_{13},$$

les axes $O_1X_1Y_1Z_1$ seraient parallèles aux axes OXYZ et, pour superposer ces deux systèmes d'axes, il suffirait d'une translation. La rotation serait alors *nulle*.

III. — RETOUR A UNE DÉFORMATION QUELCONQUE, DÉFORMATION HOMOGÈNE TANGENTE EN UN POINT.

680. **Déformation quelconque : déformation homogène tangente en un point.** — Si nous revenons au cas général d'une déformation quelconque, cette déformation est caractérisée par les six fonc-

tions ε_i et γ_i des coordonnées x, y, z du point P dans le milieu non déformé $\mathfrak{R}$. Envisageons une portion du milieu non déformé entourant un point P : si cette portion est suffisamment petite, les six fonctions ε_i et γ_i, qui sont des fonctions continues de x, y, z, conserveront, en ses différents points, sensiblement les mêmes valeurs, celles qu'elles ont au point P. Comme une déformation homogène est caractérisée par ce fait que les six fonctions ε_i et γ_i sont constantes, on peut donc dire qu'*une portion suffisamment petite de matière entourant un point* P *du milieu primitif subit une déformation homogène dont les six composantes sont les valeurs que prennent, au point* P, *les six fonctions* ε_i *et* γ_i *caractéristiques de la déformation considérée*. Cette déformation homogène, qui coïncide avec la déformation considérée dans une région très petite entourant P, est appelée *déformation au point* P, ou *déformation homogène tangente à la proposée au point* P.

Si donc on imagine une portion de matière très petite (m) entourant le point P et la portion correspondante (m_1) entourant le point correspondant P_1, la déformation homogène tangente en P transforme (m) en (m_1) : il en résulte qu'on peut faire coïncider (m) avec (m_1) par une translation, suivie d'une rotation, suivie d'une déformation pure. La translation amène P en P_1, la rotation amène les trois éléments linéaires ds, ds', ds'', dirigés suivant les axes PXYZ de l'ellipsoïde des dilatations en P, à coïncider en direction avec les trois éléments transformés ds_1, ds'_1, ds''_1 dirigés suivant trois axes rectangulaires P_1X_1, Y_1Z_1 ; enfin la déformation pure achève d'amener (m) sur (m_1) par trois dilatations rectangulaires suivant les axes P_1X_1, Y_1Z_1, dilatations choisies de telle façon que les éléments ds, ds', ds'' deviennent ds_1, ds'_1, ds''_1.

Cette rotation et cette déformation pure sont bien définies en chaque point P du milieu primitif : on les appelle *rotation au point* P et *déformation pure au point* P.

681. Définition analytique de la déformation homogène tangente en un point. — Prenons dans le milieu primitif, avant la déformation, un point quelconque P de coordonnées x, y, z et imaginons une portion infiniment petite de matière (m) entourant

ce point. Soient $x+dx, y+dy, z+dz$ les coordonnées d'un point P′ de cette portion de matière (m). La déformation fait correspondre au point P un point P_1 de coordonnées

$$(P_1) \qquad x_1 = x + u, \qquad y_1 = y + v, \qquad z_1 = z + w,$$

et au point P′ un point P'_1 infiniment voisin de P_1 ayant pour coordonnées

$$x_1 + dx_1 = x + u + d(x + u), \quad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(P'_1) \qquad \begin{cases} x + u + dx + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz, \\ y + v + dy + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz, \\ z + w + dz + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz. \end{cases}$$

Portons l'origine au point $P(x, y, z)$ et prenons comme nouveaux axes des parallèles Px', Py', Pz' aux anciens.

Appellons x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées des points P′ et P'_1 par rapport à ces axes; on aura

$$(P') \qquad x' = dx, \qquad y' = dy, \qquad z' = dz$$

et, par suite,

$$(P'_1)\ (34) \qquad \begin{cases} x'_1 = u + \left(1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)x' + \dfrac{\partial u}{\partial y}y' + \dfrac{\partial u}{\partial z}z', \\ y'_1 = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}x' + \left(1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)y' + \dfrac{\partial v}{\partial z}z', \\ z'_1 = w + \dfrac{\partial w}{\partial x}x' + \dfrac{\partial w}{\partial y}y' + \left(1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right)z'. \end{cases}$$

Ces dernières formules donnant les coordonnées du point P'_1 en fonction de celles du point P′ définissent la déformation de la région (m) entourant P en une autre région infiniment petite (m_1) entourant P_1. Comme elles sont *linéaires* en x', y', z', elles définissent une déformation homogène; c'est la déformation homogène tangente au point P à la déformation proposée. En identifiant avec les formules (23) on voit qu'il faut faire

$$a_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad a_{12} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad a_{13} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \ldots.$$

682. Conditions pour que les déformations homogènes tangentes en chaque point P à une déformation donnée soient toutes des déformations pures. — Pour que la déformation homogène définie par les formules (34) soit une déformation pure, il faut et il suffit que l'on ait (n° 678) $a_{12} = a_{21}$, etc., c'est-à-dire

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0.$$

Pour que ces conditions aient lieu en chaque point P de l'espace, *il faut et il suffit que le système des vecteurs* $PP_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ *dérive d'une fonction de* x, y, z. Dans ce cas, la rotation en chaque point P est *nulle*. Ce fait résulte de la définition même d'une déformation pure (*voir* Remarque II, n° 679).

IV. — DÉFORMATION INFINIMENT PETITE.

683. Définition. — Imaginons un milieu continu qui se déplace et se déforme d'une manière continue de telle façon que le déplacement PP_1 de chacun de ses points P soit assez petit pour que, dans les mesures, on puisse négliger les carrés et les produits de ces déplacements. La déformation est alors appelée *infiniment petite*. Les projections $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ du déplacement PP_1 sont alors des quantités que nous traiterons, *ainsi que leurs dérivées partielles par rapport* à x, y, z, comme des infiniment petits du premier ordre dont nous négligerons les carrés et les produits. De là résultent dans les formules et les théorèmes généraux des simplifications que nous allons indiquer.

Exemples de déformation infiniment petite. — 1° Dans les vibrations d'un corps élastique rendant un son, les déplacements des points matériels à partir de leurs positions initiales restent ordinairement, pendant toute la durée du mouvement, assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits.

2° Dans le mouvement continu d'un fluide liquide ou gazeux, pour passer des positions des points du fluide à l'instant t aux positions des mêmes points à l'instant infiniment voisin $t + dt$, il faut faire subir au fluide une déformation infiniment petite. Un point qui, à l'instant t, est en P, est, à l'instant $t + dt$, dans une

position infiniment voisine P_1 et son déplacement PP_1 a pour projections

$$u\,dt, \quad v\,dt, \quad w\,dt,$$

u, v, w désignant les projections de la vitesse du point matériel en P. Pour appliquer la théorie générale à ce cas, il faudrait donc faire

$$\mathbf{u} = u\,dt, \qquad \mathbf{v} = v\,dt, \qquad \mathbf{w} = w\,dt.$$

684. Expression des six fonctions caractéristiques. — En se reportant aux formules générales (14) et négligeant les carrés des dérivées partielles de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ par rapport à x, y, z, on a

$$(35)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}. \end{cases}$$

Dilatations linéaires en un point parallèles aux axes de coordonnées. — En chaque point $P(x, y, z)$, ces dilatations ont pour expressions (page 241)

$$\delta_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_1} - 1, \qquad \delta_2 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2} - 1, \qquad \delta_3 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_3} - 1.$$

Mais actuellement ε_1, ε_2, ε_3 sont infiniment petits : en développant par la formule du binome, on a

$$(1 + 2\varepsilon_1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon_1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \dots$$

et en négligeant les carrés, on trouve

$$\delta_1 = \varepsilon_1, \qquad \delta_2 = \varepsilon_2, \qquad \delta_3 = \varepsilon_3.$$

Les coefficients ε_1, ε_2, ε_3 sont les coefficients des dilatations linéaires des éléments parallèles aux axes coordonnés.

Dilatations angulaires, en un point, des angles ayant leurs côtés parallèles aux axes coordonnés. Glissements. — Nous avons vu, dans le cas général, que si l'on considère deux éléments linéaires ds et ds' issus de P parallèlement aux axes Ox et Oy, les deux éléments déformés ds_1 et ds'_1 forment un angle α_1 défini par

$$\gamma_1 = \sqrt{1 + 2\varepsilon_2}\,\sqrt{1 + 2\varepsilon_3}\,\cos\alpha_1.$$

Actuellement l'angle α_1 est infiniment peu différent de $\frac{\pi}{2}$, puisque $\cos\alpha_1$ est infiniment petit comme γ_1. On peut écrire alors en développant en séries :

$$\sqrt{1+2\varepsilon_2} = 1+\varepsilon_2+\dots$$

$$\sqrt{1+2\varepsilon_3} = 1+\varepsilon_3+\dots$$

$$\cos\alpha_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right) = \frac{\pi}{2}-\alpha_1-\frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)^3+\dots,$$

où $\frac{\pi}{2}-\alpha_1$ est infiniment petit. Portant dans la formule et négligeant les termes du deuxième ordre, on a

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{2}-\alpha_1.$$

On a ainsi une signification simple du coefficient γ_1. On obtient des expressions analogues pour γ_2 et γ_3.

On appelle aussi ces quantités γ_1, γ_2, γ_3 les *glissements* parallèles aux plans de coordonnées.

Coefficient de dilatation cubique en un point. — Nous avons vu (n° 665) que ce coefficient est

$$D-1,$$

où D désigne le déterminant (7). En développant ce déterminant et négligeant les carrés et les produits des dérivées partielles de u, v, w, on a

$$D = 1+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Le coefficient de dilatation cubique est donc alors

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}; \tag{36}$$

ce qu'on peut écrire actuellement

$$\theta = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 :$$

on voit que, dans une déformation infiniment petite, le coefficient de dilatation cubique en un point est la somme des trois coefficients des dilatations linéaires parallèles aux axes de coordonnées au même point.

685. Rotation en chaque point. Dilatations principales. — Nous avons vu que, dans une déformation quelconque, si l'on prend une petite région autour d'un point P, on peut la regarder comme soumise à une déformation homogène et, par suite, représenter la déformation de cette petite région par une translation, suivie d'une rotation, suivie d'une déformation pure.

Nous allons calculer les éléments de ces diverses transformations dans le cas d'une déformation infiniment petite.

Prenons dans le milieu, avant la déformation, un point quelconque P de coordonnées x, y, z et imaginons une région infiniment petite (m) entourant ce point. La déformation fait correspondre au point P un certain point P_1, et à la région (m) une région déformée (m_1) également infiniment petite et entourant le point P_1.

Prenons comme axes de coordonnées les parallèles Px', Py', Pz' aux axes primitifs menées par P : soient x', y', z' les coordonnées, par rapport à ces nouveaux axes d'un point P′ du premier milieu pris dans (m), et x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de la nouvelle position P'_1 de ce point après la déformation. Comme nous l'avons vu, n° 681, la déformation homogène tangente en P à la déformation donnée est définie par les formules (34) que nous écrivons

$$(37)\qquad \begin{cases} x'_1 - x' = \mathbf{u} + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}x' + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}y' + \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}z', \\ y'_1 - y' = \mathbf{v} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}x' + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}y' + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}z', \\ z'_1 - z' = \mathbf{w} + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}x' + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}y' + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}z'. \end{cases}$$

Actuellement les coefficients $\mathbf{u}$, $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$, $\cdots$ sont infiniment petits : il est alors aisé de mettre en évidence les éléments de la déformation homogène.

Rappelons d'abord les formules qui donnent les projections du déplacement d'un point dans une rotation infiniment petite. Soient trois axes fixes Px', Py', Pz' et un axe de rotation $P\omega$ issu de l'origine P. Imaginons un système invariable qui tourne d'un angle infiniment petit autour de cet axe : cette rotation peut être décomposée en trois rotations élémentaires d'angles p_1, p_2, p_3 autour des axes Px', Py', Pz'. Calculons les projections du dépla-

cement infiniment petit $P'P'_1$ subi par un point du système de coordonnées x', y', z'. Soient $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_1$ les projections de ce déplacement. On peut toujours imaginer que la rotation considérée ait lieu pendant un intervalle de temps dt : sa vitesse angulaire est alors égale à l'angle de rotation divisé par dt et les vitesses angulaires p, q, r des rotations composantes sont

$$(38) \qquad p = \frac{p_1}{dt}, \qquad q = \frac{p_2}{dt}, \qquad r = \frac{p_3}{dt}.$$

Les projections de la vitesse v du point P' sont alors, d'après les formules élémentaires des rotations,

$$qz' - ry', \quad rx' - pz', \quad py' - qx';$$

et les projections du déplacement $P'P'_1$, égal à $v\,dt$, sont les expressions précédentes multipliées par dt : on a ainsi, d'après (38)

$$\mathbf{u}_1 = p_2 z' - p_3 y', \qquad \mathbf{v}_1 = p_3 x' - p_1 z', \qquad \mathbf{w}_1 = p_1 y' - p_2 x'.$$

Cela posé, dans les formules (37) qui définissent la déformation homogène d'une région infiniment petite (m) entourant P, introduisons les notations

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}, \qquad \varepsilon_3 = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z},$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \qquad \gamma_2 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \qquad \gamma_3 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y},$$

$$2p_1 = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \qquad 2p_2 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}, \qquad 2p_3 = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y};$$

elles prennent la forme

$$\begin{aligned} x'_1 - x' &= \mathbf{u} + p_2 z' - p_3 y' + \varepsilon_1 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_3 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_2 z', \\ y'_1 - y' &= \mathbf{v} + p_3 x' - p_1 z' + \tfrac{1}{2}\gamma_3 x' + \varepsilon_2 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_1 z', \\ z'_1 - z' &= \mathbf{w} + p_1 y' - p_2 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_2 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_1 y' + \varepsilon_3 z'. \end{aligned}$$

Ces formules montrent que le déplacement infiniment petit $P'P'_1$, qui amène le point P' de l'entourage de P sur le point P'_1 de l'entourage de P_1, est la somme géométrique ou résultante des trois déplacements suivants :

1° Le déplacement de projections $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$; ce déplacement est une translation égale à PP_1 ;

2° Le déplacement de projections

$$\mathbf{u}_1 = p_2 z' - p_3 y', \qquad \mathbf{v}_1 = p_3 x' - p_1 z', \qquad \mathbf{w}_1 = p_1 y' - p_2 x';$$

ce déplacement provient d'une rotation élémentaire de composantes p_1, p_2, p_3 autour des axes Px', Py', Pz';

3° Le déplacement de projections

$$\begin{aligned} u_2 &= \varepsilon_1 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_3 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_2 z', \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}\gamma_3 x' + \varepsilon_2 y' + \tfrac{1}{2}\gamma_1 z', \\ w_2 &= \tfrac{1}{2}\gamma_2 x' + \tfrac{1}{2}\gamma_1 y' + \varepsilon_3 z', \end{aligned}$$

qui dérive de la fonction

$$F = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 + \varepsilon_3 z'^2 + \gamma_1 y' z' + \gamma_2 z' x' + \gamma_3 x' y');$$

ce déplacement provient d'une déformation pure dont les axes et les coefficients de dilatation principaux sont les axes de la quadrique $F = \text{const.}$ et les racines de l'équation en S correspondantes. Les axes de cette dernière quadrique $F = \text{const.}$ coïncident avec ceux de l'ellipsoïde des dilatations au point P (n° 668)

$$\begin{aligned} (1 + 2\varepsilon_1)x'^2 + (1 + 2\varepsilon_2)y'^2 + (1 + 2\varepsilon_3)z'^2 \\ + 2\gamma_1 y' z' + 2\gamma_2 z' x' + 2\gamma_3 x' y' = 1. \end{aligned}$$

Ce fait est évident géométriquement : il résulte analytiquement de ce que cette dernière équation peut s'écrire

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2F = 1.$$

Si donc on fait tourner les axes de coordonnées de façon à faire disparaître les termes rectangles dans F, on les fait aussi disparaître dans l'ellipsoïde des dilatations.

Nous avons ainsi mis en évidence les trois éléments de la déformation homogène d'une portion infiniment petite de matière entourant le point P : translation, rotation, déformation pure. Comme nous l'avons dit, dans le cas général, cette rotation (p_1, p_2, p_3) s'appelle *rotation au point* P, et cette déformation pure *déformation pure au point* P.

686. Cas où les rotations sont toutes nulles. Déformation longitudinale. — Si les vecteurs PP_1 définissant la déformation dérivent d'une fonction de vecteurs, la rotation au point P est nulle et réciproquement. C'est là un théorème général vrai pour une déformation quelconque (n° 682). On le vérifie aisément sur les

formules actuelles, car les conditions

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0, \qquad p_3 = 0$$

sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$\mathbf{u}\,dx + \mathbf{v}\,dy + \mathbf{w}\,dz$$

soit une différentielle totale exacte. On dit alors que la déformation infiniment petite est *longitudinale* ou *irrotationnelle*.

687. Cas où la dilatation cubique est nulle en chaque point; déformation transversale. — Lorsqu'une déformation infiniment petite est telle que la dilatation cubique en chaque point est nulle,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0,$$

on dit que la déformation est *transversale*.

Cette circonstance se présente, par exemple, dans la déformation infiniment petite d'un liquide incompressible à température constante.

688. Cas où la déformation est nulle en chaque point. — Nous avons vu, dans le cas général, que, si les six coefficients caractéristiques ε_i et γ_i sont identiquement nuls, la transformation est un simple déplacement. C'est ce qu'il est aisé de vérifier dans le cas actuel. D'après les valeurs des ε_i et γ_i pour une déformation infiniment petite, les équations exprimant que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont nuls s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0.$$

Différentions les équations du deuxième groupe respectivement par rapport à x, y, z; nous aurons (1)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x\,\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

(1) POINCARÉ, *Leçons sur l'Élasticité*, page 14.

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Les relations

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y\,\partial z} = 0$$

montrent, la première que $\mathbf{u}$ ne dépend pas de x et la seconde que $\mathbf{u}$ est la somme d'une fonction de y et d'une fonction de z

$$\mathbf{u} = f_1(y) + \varphi_1(z);$$

on trouve de même

$$\mathbf{v} = f_2(z) + \varphi_2(x),$$
$$\mathbf{w} = f_3(x) + \varphi_3(y)$$

L'équation

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

donne alors

$$\varphi'_3(y) + f'_2(z) = 0.$$

Mais y et z étant indépendants, cette relation ne peut avoir lieu que si

$$\varphi'_3(y) = -f'_2(z) = p_1,$$

p_1 désignant une constante. On a de même

$$\varphi'_1(z) = -f'_3(x) = p_2,$$
$$\varphi'_2(x) = -f'_1(y) = p_3;$$

en intégrant et portant les expressions trouvées pour $f_1(y)$, $\varphi_1(z)$, ... dans $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, on a

$$\mathbf{u} = a_1 + p_2 z - p_3 y,$$
$$\mathbf{v} = a_2 + p_3 x - p_1 z,$$
$$\mathbf{w} = a_3 + p_1 y - p_2 x,$$

a_1, a_2, a_3 étant des constantes d'intégration. Ces formules définissent un déplacement d'ensemble infiniment petit d'un solide invariable : translation (a_1, a_2, a_3) et rotation élémentaire (p_1, p_2, p_3).

689. **Déformation à la fois longitudinale et transversale.** — Pour qu'une déformation infiniment petite soit pure (ou longitudinale) en tous ses points, il faut et il suffit que la rotation soit

nulle en chaque point, on encore que les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dérivent d'une fonction F

$$(39) \qquad \mathbf{u} = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \mathbf{v} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \mathbf{w} = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Pour qu'en même temps la dilatation cubique θ soit nulle en chaque point (déformation transversale), il faut et il suffit que

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0.$$

Remplaçant $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ par leurs expressions, on voit qu'il faut et suffit que $F(x, y, z)$ vérifie l'équation de Laplace

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0.$$

Cette circonstance ne peut pas se présenter pour un milieu limité par une surface S, si on suppose la *déformation nulle à la surface :* car la fonction harmonique F étant finie ainsi que ses dérivées premières et secondes dans l'intérieur de S et les dérivées $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ étant nulles sur la surface, $\frac{dF}{dn}$ est nul sur la surface et F constant dans l'intérieur (n° 594). Le déplacement (39) d'un point quelconque du milieu est alors nul.

EXERCICES.

1. *Équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les six fonctions* ε_i *et* γ_i *dans le cas d'une déformation infiniment petite.* — Il s'agit d'éliminer les trois fonctions u, v, w entre les six équations (35) du n° 684.

Solution. — En introduisant comme fonctions auxiliaires les composantes p_1, p_2, p_3 de la rotation au point P, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_3 + p_3, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\gamma_2 - p_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\gamma_3 - p_3, \qquad \ldots.$$

En éliminant u, v, w on a neuf relations de la forme

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\gamma_3 - p_3\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\gamma_3 - p_3\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\gamma_2 + p_2\right).$$

Résolvant ces équations par rapport aux dérivées partielles de p_1, p_2, p_3, on a

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_3}{\partial z},$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

L'élimination de p_1, p_2, p_3 donne six équations dues à Barré de Saint-Venant : trois de la forme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_3}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z}\right),$$

et trois de la forme

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_3}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_1}{\partial z}\right)$$

(*voir* le Mémoire *Sur la Théorie de l'Élasticité*, par M. M. Cosserat, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1re Partie, p. 36).

2. *Déformation homogène. Extension simple.* — On dit qu'une déformation homogène est une *extension simple* quand toutes les droites parallèles à une certaine direction sont dilatées et que les droites perpendiculaires restent invariables en longueur. On demande quelles conditions doivent remplir les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, relatives à une déformation homogène (n° 675), pour que cette déformation soit une extension simple.

Réponse. — Il faut et il suffit que dans la dilatation pure équivalente (n° 677) deux des coefficients de dilatations principales soient *nuls*, par exemple $\Delta_1 = A_{11} = 0$, $\Delta_2 = A_{22} = 0$, ou encore que dans l'équation en S, relative à l'ellipsoïde des dilatations (n° 670), deux racines S_1 et S_2 soient égales à 1.

On a ainsi les deux conditions

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 0,$$
$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0,$$

dont les premiers membres sont des invariants (n° 671).

Le troisième coefficient de dilatation principal Δ_3 mesure la grandeur e de cette extension simple. Comme dans l'équation en S du n° 670 on a en général

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

on a actuellement

$$e = \Delta_3 = \sqrt{S_3} - 1 = \sqrt{1 + 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)} - 1$$

(*voir* Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, t. I, p. 41, et M. M. Cosserat, *loc. cit.*, p. 27).

3. *Déformation homogène. Glissement simple.* — Une déformation homogène est un glissement simple quand tous les points dans un certain plan P restent dans ce plan en conservant leurs positions primitives, tandis que les points situés dans un plan quelconque Q, parallèle au premier, restent aussi dans leur

plan, mais y sont déplacés, parallèlement à une direction D du plan P, de longueurs proportionnelles à la distance du plan Q au plan P.

Prenons le plan P pour plan des xy et la droite D pour axe des x. Dans les formules générales de la déformation homogène (n° 675), on doit avoir $z_1 = z$; $y_1 = y$;

$$x_1 = x + gz,$$

où g est une constante qui mesure la grandeur du glissement simple. Les composantes de cette déformation sont

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad 2\varepsilon_3 = g^2,$$
$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = g, \quad \gamma_3 = 0.$$

Formant l'équation en S correspondante, on voit que

$$S_1 + S_2 + S_3 = 3 + g^2,$$
$$S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1 - 3(S_1 + S_2 + S_3) + 6 = 0,$$
$$(S_1 - 1)(S_2 - 1)(S_3 - 1) = 0.$$

D'après les relations entre les coefficients et les racines d'une équation du troisième degré, on a, en écrivant les équations précédentes, pour une déformation homogène rapportée à des axes quelconques, les deux conditions

$$4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2 = 0,$$
$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2) = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

qui expriment que la déformation est un glissement simple, et la formule

$$g = \sqrt{2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)},$$

qui donne la grandeur du glissement (*Ibid.*).

4. *Courbes correspondantes dans le milieu primitif et le milieu déformé.* — Soient dans un milieu non déformé des courbes en nombre doublement infini, ayant pour équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}, \tag{1}$$

X, Y, Z étant des fonctions données de x, y, z. Par la déformation du milieu, telle qu'elle est définie au n° 662, ces courbes se transforment en courbes ayant pour équations différentielles

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dz_1}{Z_1}. \tag{2}$$

Démontrer que l'on a

$$\begin{cases} X_1 = \lambda\left(X\dfrac{\partial x_1}{\partial x} + Y\dfrac{\partial x_1}{\partial y} + Z\dfrac{\partial x_1}{\partial z}\right), \\ Y_1 = \lambda\left(X\dfrac{\partial y_1}{\partial x} + Y\dfrac{\partial y_1}{\partial y} + Z\dfrac{\partial y_1}{\partial z}\right), \\ Z_1 = \lambda\left(X\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + Y\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + Z\dfrac{\partial z_1}{\partial z}\right), \end{cases} \tag{3}$$

λ étant un facteur de proportionnalité quelconque.

Réciproquement les conditions (3) sont suffisantes pour que les courbes (2) soient les transformées de (3). [*Voir* APPELL, *Lignes qui se correspondent dans la déformation d'un milieu, extension des théorèmes sur les tourbillons* (*Journ. de Math.* de M. Jordan, fasc. II; 1899).]

5. Trouver dans la déformation d'un milieu les lignes dont la longueur *n'est pas altérée* par la déformation (KŒNIGS).

6. Dans une transformation, ou dans une déformation finie quelconque, il y a en général trois éléments linéaires infiniment petits partant d'un point quelconque qui sont parallèles à leurs homologues.

7. Parmi les déformations, dépourvues de rotation, en existe-t-il pour lesquelles les faces du trièdre principal relatif à chaque point de l'espace s'ordonnent suivant les plans tangents à trois familles de surfaces, qui seront nécessairement deux à deux rectangulaires?

(DARBOUX, *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXXII, n° 733.)

CHAPITRE XXXIII.

CINÉMATIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

690. **Objet du Chapitre.** — Nous avons dans le Chapitre précédent étudié le déplacement et la déformation d'un milieu continu à un point de vue purement géométrique, sans nous préoccuper des vitesses, des accélérations, etc., que prennent les points du milieu dans le déplacement et la déformation. Dans le Chapitre actuel, nous montrons comment l'on peut représenter à chaque instant l'état des vitesses et des accélérations des divers points du milieu continu en mouvement.

Les résultats que nous obtiendrons s'appliqueront donc au mouvement d'un milieu continu quelconque, que ce soit un fluide visqueux ou non, un corps élastique, ou même un corps solide.

C'est Cauchy qui doit être regardé comme le fondateur de la cinématique des matières continues : Cauchy a montré que, par le seul fait de la continuité supposée à un milieu matériel en mouvement, de la continuité et de l'uniformité supposées aux vitesses de ses différents points, découlent dans la répartition des vitesses autour de chaque point des propriétés générales et rigoureuses de la même nature que celles qu'enseigne la théorie de la courbure des surfaces; elles se classent en deux espèces, comme nous l'avons déjà montré dans le Chapitre précédent : celles qui se rapportent à la *déformation* et celles qui se rapportent au *déplacement* d'une particule fluide. C'est à cette occasion que Cauchy introduit la notion de la *rotation moyenne en un point,* qui est quelque chose comme la rotation instantanée de la particule fluide entourant ce point. C'est cette rotation moyenne, introduite par Cauchy, que Helmholtz, dans ses belles recherches sur la théorie des tourbillons, a considérée sous le nom de *tourbillon* (*Wirbel*).

Cette notion de rotation moyenne joue un rôle essentiel dans la démonstration que Cauchy a donnée d'un théorème célèbre de Lagrange sur les cas où il existe ce qu'on appelle un *potentiel des vitesses*. L'ensemble de ces travaux se trouve dans le Mémoire de Cauchy, présenté à l'Académie des Sciences de Paris en 1815 et imprimé dans le *Recueil des Savants étrangers* en 1827; ce Mémoire, intitulé : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie*, est reproduit dans le premier Volume (1re série) des *Œuvres complètes de Cauchy*, imprimé chez Gauthier-Villars en 1882 (2e Partie, section première).

Mais il y a plus; M. Maurice Lévy a remarqué (1) que les équations données par Cauchy à cette occasion renferment tous les éléments de la théorie des tourbillons et sont analogues à celles que Kirchhoff a employées plus tard sans connaître le Mémoire de Cauchy.

Les deux systèmes principaux de variables employés dans l'étude du mouvement des milieux continus portent les noms de *variables de Lagrange* et *variables d'Euler*, quoique Euler ait employé les deux systèmes de variables en 1755 et 1757 et que Lagrange les ait également donnés tous deux dans sa *Mécanique analytique* (2).

Nous exposerons successivement ces deux systèmes de variables.

I. — VARIABLES DE LAGRANGE.

691. Définition. — Imaginons un milieu continu, par exemple un fluide, animé d'un mouvement continu. Un élément déterminé dm du milieu, dont les coordonnées sont x, y, z à l'instant t, occupait, à l'instant initial $t = 0$, une certaine position $(dm)_0$ de coordonnées a, b, c. Dans le mouvement, l'élément considéré part de la position initiale $(dm)_0$, suit une certaine trajectoire et

(1) *Voir* un article de M. Maurice Lévy : *L'Hydrodynamique moderne et l'hypothèse des actions à distance* (*Revue générale des Sciences pures et appliquées*, 15 décembre 1890).

Voir également un excellent Travail historique de M. Brillouin, publié dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* en 1885.

(2) MAURICE LÉVY, *loc. cit.*

se trouve, à l'instant t, dans la position dm sur cette trajectoire : un autre élément partira de même d'une autre position initiale, suivra une autre trajectoire et se trouvera à l'instant t dans une certaine position sur cette trajectoire. De cette façon, si l'on considère l'ensemble des éléments $(dm)_0$ du milieu à l'instant $t = 0$, ils occupent une certaine région continue $\mathcal{R}_0$ de l'espace : ces éléments se mettent en mouvement d'une manière continue et, à l'instant t, ils occupent des positions dm situées dans une certaine région continue $\mathcal{R}$.

Les coordonnées x, y, z de chaque élément dm à l'instant t sont des fonctions uniformes et continues de ses coordonnées initiales a, b, c et du temps t :

$$(1) \qquad x = f(a, b, c, t), \qquad y = f_1(a, b, c, t), \qquad z = f_2(a, b, c, t),$$

fonctions qui se réduisent respectivement à a, b, c pour $t = 0$.

Les variables indépendantes choisies par Lagrange sont les quatre quantités a, b, c, t.

On voit que, par le fait même du mouvement d'un milieu continu et en particulier d'un fluide, se trouve réalisée la déformation continue d'une certaine région continue $\mathcal{R}_0$ de l'espace occupée par le fluide à l'instant initial en une autre région $\mathcal{R}$ occupée par le fluide à l'instant t. Cette déformation rentre dans celles qui ont été étudiées en détail dans le Chapitre précédent, et l'on pourra lui appliquer tout ce que nous avons dit dans ce Chapitre.

Par exemple si de l'eau, primitivement en équilibre dans un réservoir, se met en mouvement à l'instant $t = 0$ par suite de l'ouverture d'un robinet, la région $\mathcal{R}_0$ sera constituée par la partie du réservoir occupée primitivement par l'eau, et la région $\mathcal{R}$ par la partie de l'espace où se trouve l'eau au temps t. Dans cet exemple le milieu continu part du repos : c'est là une circonstance particulière.

En général, à l'instant $t = 0$, les éléments fluides occupent une certaine région $\mathcal{R}_0$ et possèdent des vitesses initiales déterminées : on peut d'ailleurs considérer comme instant initial un instant quelconque du mouvement.

692. Vitesse d'un élément. — Soient W la vitesse d'un élément dm de coordonnées x, y, z à l'instant t, u, v, w les projections de

cette vitesse sur les axes : d'après les formules (1) qui permettent de suivre chaque élément dans son mouvement, on a évidemment

$$(2) \qquad u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt},$$

les dérivées *étant prises en regardant* a, b, c *comme constants*, c'est-à-dire en suivant l'élément dans son mouvement.

693. **Accélération d'un élément.** — Les projections de l'accélération J du même élément sont

$$(3) \qquad J_x = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad J_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad J_z = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

694. **Équation de continuité.** — Appelons ρ_0 la densité de l'élément (dm) de coordonnées a, b, c à l'instant initial $t = 0$, et ρ la densité du même élément dm de coordonnées x, y, z à l'instant t. En écrivant que la masse de cet élément ne change pas, on obtient comme dans le Chapitre précédent l'équation de continuité (n° 664). Il suffit pour appliquer cette équation au cas actuel d'y remplacer x, y, z par a, b, c et x_1, y_1, z_1 par x, y, z. On a ainsi, en posant

$$(4) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

l'équation de continuité

$$(5) \qquad \rho D = \rho_0.$$

II. — VARIABLES D'EULER.

695. **Définition.** — Considérons, dans l'espace où se meut le milieu continu, un point géométrique déterminé P de coordonnées x, y, z. A l'instant t, il passe en ce point un élément dm du milieu qui possède une vitesse déterminée W. Lorsque t est donné,

la vitesse W est bien définie en chaque point P (x, y, z); ses projections u, v, w sont donc des fonctions uniformes de x, y, z.

Inversement quand x, y, z sont donnés, c'est-à-dire quand on fixe son attention sur un point géométrique donné P, à chaque instant t il passe par ce point un nouvel élément matériel qui possède une vitesse W, variable avec t; les projections u, v, w du vecteur W sont donc aussi des fonctions de t. En définitive, u, v, w sont des *fonctions des quatre variables indépendantes* x, y, z, t. Ces quatre variables sont les variables indépendantes choisies par Euler.

Si l'on connaissait u, v, w, en fonction des quatre variables indépendantes x, y, z, t, on connaîtrait, à chaque instant, la distribution des vitesses aux divers points de la masse continue en mouvement.

696. **Projections de l'accélération d'un élément.** — Nous obtiendrons ces projections en nous reportant à la définition même de l'accélération d'un point mobile.

Pour mettre les variables en évidence nous représenterons par

$$(6) \qquad u = u(x, y, z, t), \qquad v = v(x, y, z, t), \qquad w = w(x, y, z, t)$$

les projections sur les axes de la vitesse W de l'élément dm qui, à l'instant t, passe au point géométrique P(x, y, z). Suivons cet élément dans son mouvement.

A l'instant $t_1 = t + dt$, il s'est avancé sur sa trajectoire d'une longueur W dt et est arrivé dans une position P_1 de coordonnées

$$x_1 = x + u\,dt, \qquad y_1 = y + v\,dt, \qquad z_1 = z + w\,dt.$$

D'après les formules générales (6), la vitesse (W_1) que possède le même élément dans sa nouvelle position à l'instant t_1 a pour projections

$$(W_1) \qquad u_1 = u(x_1, y_1, z_1, t_1), \qquad \ldots,$$

ou encore

$$u_1 = u(x + u\,dt, y + v\,dt, z + w\,dt, t + dt),$$
$$v_1 = v(x + u\,dt, y + v\,dt, z + w\,dt, t + dt),$$
$$w_1 = w(x + u\,dt, y + v\,dt, z + w\,dt, t + dt).$$

Les projections de l'accélération de l'élément dm sont alors

$$(J) \qquad \frac{u_1 - u}{dt}, \quad \frac{v_1 - v}{dt}, \quad \frac{w_1 - w}{dt}.$$

Or $u_1 - u$ est la différentielle de $u(x, y, z, t)$ quand x, y, z t croissent respectivement de $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, dt :

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} u\,dt + \frac{\partial u}{\partial y} v\,dt + \frac{\partial u}{\partial z} w\,dt + \frac{\partial u}{\partial t} dt;$$

on a de même $v_1 - v$, $w_1 - w$, et les projections de l'accélération sont

$$(7) \qquad \begin{cases} J_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} u + \dfrac{\partial u}{\partial y} v + \dfrac{\partial u}{\partial z} w + \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ J_y = \dfrac{\partial v}{\partial x} u + \dfrac{\partial v}{\partial y} v + \dfrac{\partial v}{\partial z} w + \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ J_z = \dfrac{\partial w}{\partial x} u + \dfrac{\partial w}{\partial y} v + \dfrac{\partial w}{\partial z} w + \dfrac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

697. Autre méthode : dérivée prise par rapport au temps en suivant un élément dans son mouvement. — On peut présenter le calcul précédent d'une autre manière. Suivons un élément le long de sa trajectoire; les coordonnées x, y, z de cet élément deviennent des fonctions déterminées du temps

$$x = f(t), \qquad y = f_1(t), \qquad z = f_2(t),$$

dont les dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ par rapport à t sont précisément les projections u, v, w de la vitesse de l'élément considéré. Or ces projections sont, par hypothèse, données en fonction du temps par les formules (6)

$$u = u(x, y, z, t), \qquad \ldots,$$

où x, y, z seraient remplacés par les fonctions $f(t), f_1(t), f_2(t)$: dès lors, la projection de l'accélération de l'élément sur l'axe des x est

$$J_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

c'est-à-dire

$$J_x = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

On retrouve ainsi les expressions J_x, J_y, J_z données plus haut.

On peut résumer ce qui précède en disant que J_x est la *dérivée de u prise par rapport au temps en suivant un élément matériel dans son mouvement.*

Nous emploierons cette locution dans les cas analogues. Ainsi, étant donnée une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ des variables d'Euler, on pourra en prendre la dérivée par rapport à t en regardant x, y, z comme *constants;* nous désignerons cette dérivée partielle par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Mais on pourra aussi prendre la dérivée de φ par rapport au temps en y regardant x, y, z comme les coordonnées d'un élément matériel *dm suivi dans son mouvement,* c'est-à-dire comme certaines fonctions du temps. Ce nouveau genre de dérivée que nous désignerons par $\frac{d\varphi}{dt}$ a pour expression

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}u + \frac{\partial \varphi}{\partial y}v + \frac{\partial \varphi}{\partial z}w + \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

698. Résumé des notations pour les dérivées. — Dans les équations figurent, comme nous venons de le voir, deux espèces de dérivées par rapport au temps. Si une fonction φ est exprimée en x, y, z, t, la dérivée partielle prise par rapport à t en regardant x, y, z comme *constants* sera désignée par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ avec un ∂ de ronde; si au contraire on considère x, y, z comme les coordonnées d'un élément fluide, φ devient une fonction du temps par l'intermédiaire de x, y, z et la dérivée de φ par rapport au temps, *prise en suivant la molécule dans son mouvement* sera désignée par $\frac{d\varphi}{dt}$. Ce second genre de dérivées par rapport au temps est celui qu'on prend dans le système de Lagrange en considérant a, b, c comme constants : en effet, les coordonnées d'un élément fluide sont données en fonction de t par les formules (1), où a, b, c sont des constantes : si donc on veut prendre la dérivée de φ par rapport à t en suivant l'élément, il faut regarder φ comme une fonction de a, b, c, t par l'intermédiaire de x, y, z et

prendre la dérivée par rapport à t en regardant a, b, c comme constants.

699. Équation de continuité. — A l'instant t, les divers points du milieu en mouvement occupent des positions $P(x, y, z)$: à l'instant $t + dt$ chaque point s'est avancé dans le sens de sa vitesse W d'une longueur égale à W dt : les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la nouvelle position du point qui était en x, y, z sont donc

$$x_1 = x + u\,dt, \qquad y_1 = y + v\,dt, \qquad z_1 = z + w\,dt. \tag{8}$$

Ces formules montrent que dans l'espace de temps dt, le milieu a subi une *déformation infiniment petite* (n° 683) dont les composantes suivant les axes sont

$$\mathbf{u} = u\,dt, \qquad \mathbf{v} = v\,dt, \qquad \mathbf{w} = w\,dt.$$

Le coefficient de *dilatation cubique* dans cette déformation infiniment petite a pour valeur en chaque point (n° 683)

$$\theta = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z},$$

$$\theta = dt\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \tag{9}$$

Cela posé, considérons autour d'un point $P(x, y, z)$ un élément matériel infiniment petit dm de volume τ : la masse de cet élément est $\rho\tau$, ρ étant la densité en P, densité qui est fonction de x, y, z, t.

La masse de cet élément étant invariable, sa différentielle pendant le temps dt *prise en suivant l'élément dans son mouvement* est nulle. On a ainsi, en annulant la différentielle du produit $\rho\tau$:

$$\frac{d\rho}{dt}\tau\,dt + \rho\,d\tau = 0;$$

mais $\frac{d\tau}{\tau}$ est le *coefficient de dilatation cubique* θ au point P : la relation ci-dessus devient donc

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0; \tag{10}$$

c'est là l'équation de continuité dans laquelle $\frac{d\rho}{dt}$ désigne la déri-

vée de ρ prise en suivant un élément fluide dans son mouvement (n° 697), de sorte que, en explicitant, on a

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Remplaçant $\frac{d\rho}{dt}$ par cette expression dans (10), on peut écrire cette équation sous une autre forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

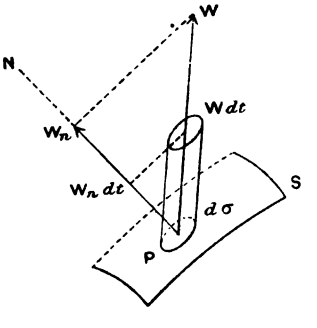
Cas d'un liquide incompressible — Dans le cas d'un liquide incompressible à température constante, ρ est constant et l'équation de continuité s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \tag{12}$$

elle exprime que le coefficient de dilatation cubique est *nul* en chaque point à chaque instant.

700. Flux de matière à travers une portion de surface S pendant le temps *dt*. — Traçons dans le milieu une surface géométrique *fixe* S, non matérielle, et cherchons quelle est la masse de matière qui traverse cette surface de l'instant t à l'instant $t + dt$ dans un sens déterminé. Soient P un point quelconque de la surface, PN la normale menée à la surface en ce point dans le sens considéré et α, β, γ les cosinus directeurs de cette normale (*fig.* 326). Pre-

Fig. 326.



nons un élément superficiel infiniment petit $d\sigma$ entourant P : appelons W la vitesse de l'élément matériel qui se trouve à l'instant t

en P, W_n sa projection sur la normale PN :

$$W_n = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{13}$$

Au bout du temps dt, les éléments matériels placés à l'instant t sur $d\sigma$ se sont avancés de $W\,dt$ dans la direction W, de sorte que le volume de la matière qui, pendant le temps dt, a traversé l'élément $d\sigma$ est un cylindre oblique de base $d\sigma$ et d'arête latérale $W\,dt$: la hauteur de ce cylindre est $W_n\,dt$ et son volume $d\sigma W_n\,dt$. La masse qui a traversé $d\sigma$ pendant le temps dt est donc

$$\rho W_n\,d\sigma\,dt.$$

Quand W_n est positif, cette expression est positive (cas de la *fig.* 326); si W_n était négatif, cette expression serait négative, mais alors la matière aurait traversé l'élément $d\sigma$ dans le sens opposé à celui qui a été choisi. On peut donc dire que $\rho W_n\,d\sigma\,dt$ est la *valeur algébrique* de la masse qui a traversé l'élément $d\sigma$ dans le sens PN. En appliquant ces considérations à chaque élément $d\sigma$ de la surface S, on voit que la valeur algébrique $d\mathrm{M}$ de la masse totale qui traverse S pendant le temps dt dans le sens positif choisi est

$$d\mathrm{M} = dt \int\int_{\mathrm{S}} \rho W_n\,d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à la surface S. Cette formule donne ce qu'on appelle le *flux de matière à travers* S pendant le temps dt, dans le sens PN. Remplaçant W_n par son expression (13) $\alpha u + \beta v + \gamma w$, on a

$$d\mathrm{M} = dt \int\int_{\mathrm{S}} \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,d\sigma. \tag{14}$$

Il est évident que le flux à travers la même surface, pendant le même temps dt, *dans le sens contraire ou sens négatif*, est égal et de signe contraire : il est donc

$$-dt \int\int_{\mathrm{S}} \rho(\alpha u - \beta v + \gamma w)\,d\sigma.$$

Application. — On peut déduire de là une autre démonstration de l'équation de continuité. Considérons dans le milieu en

mouvement une surface géométrique *fermée fixe* S et soient PN la normale *extérieure* à cette surface, α, β, γ les cosinus directeurs de cette normale. Nous allons évaluer de deux façons différentes l'accroissement algébrique $d\mathrm{M}$ que subit pendant le temps dt la masse totale de matière M contenue dans la surface S.

Une première expression de cet accroissement est précisément le flux de matière à travers la surface S, de l'extérieur vers l'intérieur, c'est-à-dire dans le sens opposé à PN. On a donc

$$d\mathrm{M} = -dt \iint_{\mathrm{S}} \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w)\, d\sigma.$$

D'autre part, si l'on appelle V le volume limité par la surface S et $d\tau$ un élément de ce volume, la masse totale contenue dans S à l'instant t est

$$\mathrm{M} = \iiint_{\mathrm{V}} \rho\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue au volume V. Cette masse M varie avec t parce que, en chaque point déterminé x, y, z, ρ est une fonction de t : pendant le temps dt, ρ subit l'accroissement $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$, on a donc pour M l'accroissement

$$d\mathrm{M} = dt \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Égalant ces deux expressions de $d\mathrm{M}$ et supprimant le facteur dt, on a l'équation

$$\iiint_{\mathrm{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_{\mathrm{S}} (\alpha \rho u + \beta \rho v + \gamma \rho w)\, d\sigma = 0.$$

L'intégrale double se transforme par la formule de Green (n° 534)

$$\iint_{\mathrm{S}} (\alpha \mathrm{F} + \beta \mathrm{G} + \gamma \mathrm{H})\, d\sigma = \iiint_{\mathrm{V}} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z} \right) d\tau.$$

Après cette transformation, on a, en réunissant les deux termes sous un même signe d'intégration,

$$\iiint_{\mathrm{V}} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] d\tau = 0. \tag{15}$$

Cette intégrale est étendue au volume V limité par la surface S tracée arbitrairement dans le fluide : elle doit être nulle *quel que soit ce volume,* ce qui exige que l'élément placé sous le signe d'intégration soit identiquement nul : on a ainsi l'équation de continuité sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

701. Comparaison des deux équations de continuité — L'équation de continuité dans la méthode de Lagrange est

$$\rho D = \rho_0,$$

D étant le déterminant considéré au n° **694**. Dans cette équation ρ, x, y, z sont considérés comme fonctions de a, b, c, t : ρ_0 est indépendant de t. L'équation exprime donc que ρD est indépendant de t; on pourrait exprimer ce fait en écrivant que la dérivée de ρD par rapport à t est *nulle*. La nouvelle équation que l'on obtiendrait ainsi est précisément l'équation de continuité dans le système des variables d'Euler. En effet, soit dm un élément matériel qui, à l'instant initial $t = 0$, a pour volume τ_0 et pour densité ρ_0; ce même élément, à l'instant t, possède un volume τ et une densité ρ, et l'on a

$$\rho\tau = \rho_0\tau_0;$$

en comparant avec l'équation de continuité de Lagrange, on voit que

$$D = \frac{\tau}{\tau_0};$$

par conséquent, si l'on égale à zéro la dérivée de ρD par rapport au temps, on obtient la même équation qu'en égalant à zéro la dérivée de $\rho\tau$; or c'est précisément ce que nous avons fait plus haut pour obtenir l'équation de continuité d'Euler (n° **699**).

702. Passage d'un des systèmes de variables à l'autre. — Si, dans le mouvement d'un milieu continu, on connaît les coordonnées d'un élément quelconque à l'instant t en fonction de ses

coordonnées initiales a, b, c et du temps :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(a, b, c, t), \\ y = f_1(a, b, c, t), \\ z = f_2(a, b, c, t), \end{cases}$$

il est facile d'en déduire les expressions de u, v, w en fonction de x, y, z et t. Pour cela, on écrira

$$(2)\qquad \begin{cases} u = f'_t(a, b, c, t), \\ v = f'_{1t}(a, b, c, t), \\ w = f'_{2t}(a, b, c, t), \end{cases}$$

les seconds membres désignant les dérivées de f, f_1, f_2 par rapport à t. En tirant a, b, c des équations (1) pour les porter dans les expressions (2), on aura u, v, w en fonction de x, y, z, t.

Pour passer inversement des variables d'Euler à celles de Lagrange, il faut intégrer un système d'équations différentielles du premier ordre, de façon à déterminer les *trajectoires*.

Trajectoires des éléments matériels dans le système d'Euler. — Supposons que l'on connaisse, dans le mouvement d'un fluide, u, v, w en fonction de x, y, z, t, fonctions que nous appellerons $u(x, y, z, t)$, ... Proposons-nous de trouver les trajectoires des divers éléments matériels du milieu continu. Le long d'une trajectoire, les coordonnées x, y, z d'un élément dm suivi dans son mouvement sont des fonctions de t, dont les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ sont les projections u, v, w de la vitesse de l'élément; on a donc les équations :

$$(1\text{bis})\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \\ \dfrac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \\ \dfrac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \end{cases}$$

Ces équations sont trois équations différentielles du premier ordre définissant x, y, z en fonction du temps et de trois constantes arbitraires qui seront, pour fixer les idées, les valeurs a,

b, c de x, y, z pour $t = 0$. On aura ainsi, par l'intégration de ces équations :

$$x = f(a, b, c, t), \qquad y = f_1(a, b, c, t), \qquad z = f_2(a, b, c, t),$$

et l'on sera revenu aux variables de Lagrange.

703. **Lignes de courant ou de flux à un instant.** — Adoptons les variables d'Euler. A l'instant t, l'élément dm qui passe au point $P(x, y, z)$ a une vitesse W dont les projections u, v, w sont fonctions de x, y, z, t. L'ensemble de ces vitesses au temps t forme ainsi un *champ de vecteurs*.

On appelle *lignes de courant* ou *lignes de flux à l'instant t les lignes de vecteurs* de ce champ, c'est-à-dire les lignes telles que la tangente en chacun de leur point P soit le vecteur correspondant W.

Ces lignes ont pour équations différentielles les équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{17}$$

dans lesquelles t a une valeur numérique correspondant à l'instant considéré. L'intégration de ces équations donne un système de courbes dont les équations sous forme finie

$$\Phi(x, y, z, t) = C, \qquad \Phi_1(x, y, z, t) = C_1,$$

contiennent deux constantes arbitraires C et C_1 et la lettre t qui est supposée avoir une valeur déterminée. Ces lignes varient avec l'instant considéré t.

Les lignes de courant sont distinctes des trajectoires. — En effet, les trajectoires sont définies par les équations différentielles (16), où t est variable, tandis que les lignes de courant à un instant t sont définies par les équations (17) où t a une valeur numérique déterminée.

Ainsi, pour prendre un exemple tout à fait élémentaire, imaginons un *corps solide* en mouvement. C'est là un milieu continu en mouvement; seulement ce mouvement a lieu sans déformation. Les trajectoires sont les courbes suivies par les divers points matériels du corps, courbes qui peuvent être de natures très

diverses suivant le mouvement du corps solide. Mais cherchons les lignes de courant à un instant t; nous allons voir que ce sont des *hélices*. En effet, à l'instant t, l'état des vitesses W des divers points du solide est le même que si ce solide était animé d'un certain mouvement hélicoïdal appelé *mouvement hélicoïdal tangent* (Chapitre II). Chaque vecteur W est donc tangent en son point d'application à l'hélice que décrirait ce point dans le mouvement hélicoïdal tangent; les courbes auxquelles les vecteurs W sont tangents, en leurs points d'application, sont donc des *hélices*. C'est ce qu'il serait aisé de vérifier analytiquement d'après les formules

$$(18)\qquad \begin{cases} u = \alpha + qz - ry, \\ v = \beta + rx - pz, \\ w = \gamma + py - qx, \end{cases}$$

qui donnent les projections, sur les axes fixes $Oxyz$, de la vitesse W d'un point $P(x, y, z)$ d'un corps solide, α, β, γ, p, q, r étant des fonctions du temps t (Chapitre II).

Il est cependant un cas particulier où les lignes de courant se confondent avec les trajectoires : c'est le cas du *mouvement permanent*.

704. Mouvement permanent au point de vue cinématique. — On dit que le mouvement est permanent quand le champ de vecteurs représentant l'état des vitesses du milieu à un instant quelconque *t reste le même quel que soit t*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les projections u, v, w de la vitesse de l'élément qui, à l'instant t, passe au point x, y, z soient *indépendantes* de t. Dans ce cas, u, v, w dépendent uniquement de x, y, z. Par exemple, dans un jet d'eau alimenté d'une façon régulière, si l'on porte son attention sur un point géométrique déterminé P choisi dans le jet, la vitesse de l'élément fluide qui passe en ce point est toujours la même : à chaque instant, un nouvel élément passe en P, mais il y passe constamment avec la même vitesse; le mouvement est *permanent*.

Dans ce cas, *les lignes de courant* à un instant quelconque *se confondent avec les trajectoires*, car u, v, w ne contenant pas t, les équations différentielles (16) des trajectoires peuvent être dé-

barrassées du temps et être écrites

$$\frac{dx}{u(x,y,z)} = \frac{dy}{v(x,y,z)} = \frac{dz}{w(x,y,z)};$$

elles sont identiques à celles des lignes de courant (17).

Dans le cas général, quand le mouvement n'est pas permanent, les trajectoires forment un système de courbes dont les équations dépendent de *trois constantes arbitraires*, à savoir les coordonnées initiales a, b, c des divers points P_0 du fluide; c'est ce qu'on appelle un système *triplement infini de courbes*. Mais lorsque le mouvement est permanent, les trajectoires se confondent avec les lignes de courant, et leurs équations ne dépendent plus que de *deux constantes arbitraires; elles forment un système de courbes doublement infini*. Cela tient à ce qu'une même trajectoire est alors suivie par une infinité simple de points matériels, car les points qui, à un certain instant, se trouvent sur une trajectoire déterminée, suivent tous cette trajectoire.

Nous avons pris tout à l'heure, comme exemple, un corps solide en mouvement; le mouvement d'un corps solide est permanent quand c'est le mouvement d'une vis dans un écrou fixe; tous les points du corps décrivent alors des hélices de même pas qui se confondent avec les lignes de courant. Au point de vue analytique, le mouvement d'un corps solide est permanent quand les valeurs de u, v, w données par les formules (18) sont indépendantes de t, c'est-à-dire quand α, β, γ, p, q, r sont des *constantes*.

Nous reviendrons sur la question du mouvement permanent dans la dynamique des milieux continus.

705. Rotation moyenne ou tourbillon en un point, à un instant. — En adoptant les variables d'Euler, on appelle *rotation moyenne* en un point P à l'instant t, ou encore *tourbillon au point* P à l'instant t, le *vecteur* Ω ayant pour origine le point P et pour projections sur les axes les quantités ξ, η, ζ définies par les formules

$$(19) \qquad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les vitesses $W(u, v, w)$ à l'instant t forment un champ de vecteurs appliqués aux divers points P pris dans la masse fluide : les

vecteurs tourbillons Ω forment au même instant un nouveau champ de vecteurs que nous avons déjà considéré d'une manière générale dans le premier chapitre de ce Volume.

Voici la raison de cette dénomination de *rotation moyenne* ou *tourbillon* donnée au vecteur Ω.

Considérons la déformation infiniment petite par laquelle on passe, des positions des points du milieu à l'instant t, aux positions des mêmes points à l'instant $t_1 = t + dt$. Si x, y, z sont les coordonnées d'un point du milieu placé en P à l'instant t, ce même point matériel à l'instant $t_1 = t + dt$ occupe une position infiniment voisine P_1 de coordonnées

$$x_1 = x + u\,dt,$$
$$y_1 = y + v\,dt,$$
$$z_1 = z + w\,dt.$$

Ces formules définissent une déformation infiniment petite du système des points P dans le système des points P_1 : les fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ définissant cette déformation (n° 683) sont ici

$$\mathbf{u} = u\,dt, \qquad \mathbf{v} = v\,dt, \qquad \mathbf{w} = w\,dt. \tag{20}$$

D'après ce que nous avons vu dans l'étude d'une déformation infiniment petite, si l'on prend un élément fluide dm entourant le point P à l'instant t, cet élément, à l'instant $t_1 = t + dt$, prend une nouvelle forme et une nouvelle position dm_1 entourant P_1, et l'on peut passer de dm à dm_1, en faisant subir à dm :

1° Une translation PP_1 ;

2° Une rotation élémentaire effectuée autour d'un axe $P\omega$ issu de P et obtenue en faisant tourner l'élément des angles infiniment petits

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right), \qquad p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\right), \qquad p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)$$

autour des parallèles aux axes issues de P;

3° Une déformation pure, composée de trois dilatations rectangulaires suivant les trois directions principales en P.

Dans le cas actuel, d'après les valeurs (20) de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, les

angles élémentaires de rotation p_1, p_2, p_3 sont

$$(21)\qquad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dt, \\ p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) dt, \\ p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dt. \end{cases}$$

Comme ces diverses transformations, dont est composée la transformation totale, se font dans le temps dt, on peut dire que l'élément dm possède à l'instant t :

1° Une vitesse de translation égale à la grandeur PP_1 de la translation divisée par dt, c'est-à-dire à $W(u, v, w)$;

2° Une *vitesse angulaire de rotation* $P\Omega$ dont les composantes suivant les axes sont les angles élémentaires de rotation p_1, p_2, p_3 divisés par dt, c'est-à-dire, d'après (21), les quantités

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ou encore ξ, η, ζ ;

3° Une vitesse de déformation caractérisée par trois vitesses de dilatation rectangulaires dirigées suivant les directions principales en P, et égales aux quotients des coefficients de dilatation principaux par dt ; nous ne calculerons pas actuellement ces dernières vitesses. (*Voir* aux Exercices.)

Ces considérations justifient les noms de *rotation moyenne au point* P *à l'instant t* ou de *vecteur tourbillon en* P donnés au vecteur $P\Omega$ de projections ξ, η, ζ.

On peut remarquer, avec M. Boussinesq, que la rotation $P\Omega$ est la rotation instantanée du trièdre trirectangle fluide formé par les directions principales en P ; cela résulte de ce que la translation PP_1 et la rotation élémentaire de composantes p_1, p_2, p_3 ont pour effet d'amener les trois directions principales en P sur les trois directions principales en P_1.

Nous appliquerons plus loin ces considérations au mouvement des fluides. Prenons encore, comme exemple élémentaire, le cas d'un corps solide en mouvement. Alors, le *vecteur tourbillon en*

chaque point à l'instant t est égal à la *rotation instantanée* du corps. Cela résulte de ce qu'un élément *dm* du corps à l'instant *t* peut être amené dans sa nouvelle position dm_1 à l'instant $t+dt$ par une translation suivie d'une rotation égale à la rotation instantanée. Analytiquement, les formules (18) qui donnent les projections sur les axes de la vitesse d'un point x, y, z d'un corps solide montrent également que le vecteur tourbillon (ξ, η, ζ) en chaque point est égal à la rotation instantanée (p, q, r). On a, en effet, d'après ces formules,

$$\frac{\partial w}{\partial y} = p, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -p, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = p;$$

on trouve de même

$$\eta = q, \qquad \zeta = r.$$

706. Définition mécanique du tourbillon en un point à un instant. — Soit un point P (x, y, z) à l'instant t : considérons la portion de matière contenue dans une sphère infiniment petite s de centre P et supposons qu'à l'instant t toute la matière extérieure à cette sphère soit *anéantie* et la matière intérieure brusquement *solidifiée*. Alors, la rotation instantanée initiale que prendra cette sphère solide sera précisément le tourbillon au point considéré. [STOKES, *On the friction of fluids in motion* (*Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VIII).]

En effet, soient, avant la solidification, u, v, w les projections de la vitesse du point matériel placé en P (x, y, z) et u', v', w' celles de la vitesse d'un point infiniment voisin P′ de coordonnées $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$, les quantités infiniment petites x', y', z', étant les coordonnées de P′ par rapport à des axes Px', Py', Pz' menés par P parallèlement aux axes fixes. On aura

$$u' = u(x+x', y+y', z+z', t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire, en développant par la formule de Taylor et se bor-

nant aux termes du premier ordre

$$(22)\qquad \begin{cases} u' = u + \dfrac{\partial u}{\partial x}x' + \dfrac{\partial u}{\partial y}y' + \dfrac{\partial u}{\partial z}z', \\ v' = v + \dfrac{\partial v}{\partial x}x' + \dfrac{\partial v}{\partial y}y' + \dfrac{\partial v}{\partial z}z', \\ w' = w + \dfrac{\partial w}{\partial x}x' + \dfrac{\partial w}{\partial y}y' + \dfrac{\partial w}{\partial z}z'. \end{cases}$$

Soient, d'autre part, immédiatement après la solidification, u_1, v_1, w_1 les projections de la vitesse du centre P de la sphère solide s, p, q, r les composantes de la rotation instantanée de cette sphère; les projections u'_1, v'_1, w'_1 de la vitesse du point de cette sphère qui est en P′ sont

$$(23)\qquad \begin{cases} u'_1 = u_1 + qz' - ry', \\ v'_1 = v_1 + rx' - pz', \\ w'_1 = w_1 + py' - qx'. \end{cases}$$

Au moment où la solidification a lieu, le milieu extérieur étant supprimé, des percussions se produisent entre les divers points matériels qui constituent la sphère. Mais ces percussions sont toutes *intérieures* à la sphère.

Or on sait que, si un système matériel subit des percussions *intérieures*, la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe *est la même* après et avant la percussion, ainsi que la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe. Appliquons ces théorèmes à la sphère infiniment petite s en remarquant que cette sphère étant homogène et ayant pour densité la densité en P, on a, par raison de symétrie,

$$(24)\qquad \begin{cases} \Sigma m x' = \Sigma m y' = \Sigma m z' = 0, \\ \Sigma m y' z' = \Sigma m z' x' = \Sigma m x' y' = 0, \\ \Sigma m x'^2 = \Sigma m y'^2 = \Sigma m z'^2 = \mathrm{M}k^2, \end{cases}$$

ces sommes étant étendues à tous les points matériels P′ de masse m qui forment la sphère, et M désignant la masse totale Σm de cette sphère.

D'abord, en écrivant que la somme des projections des quantités de mouvement sur l'axe des x est la même après et avant la solidification, on a

$$\Sigma m u'_1 = \Sigma m u'.$$

ou

$$u_1 \Sigma m + q \Sigma m z' - \ldots = u \Sigma m + \frac{\partial u}{\partial x} \Sigma m x' + \ldots,$$

c'est-à-dire, d'après (24),

$$u_1 = u.$$

On trouve de même

$$v_1 = v, \qquad w_1 = w.$$

Ainsi la vitesse du point P, centre de la sphère, ne change pas.

Écrivons ensuite que la somme des moments des quantités de mouvement reste la même par rapport à l'axe Px'; nous aurons

$$\Sigma m (y' w_1' - z' v_1') = \Sigma m (y' w' - z' v'),$$

ou, d'après les expressions (22) et (23),

$$\begin{aligned} &w_1 \Sigma m y' - v_1 \Sigma m z' + p \Sigma m (y'^2 + z'^2) - \ldots \\ &\quad = w \Sigma m y' - v \Sigma m z' + \frac{\partial w}{\partial y} \Sigma m y'^2 - \frac{\partial v}{\partial z} \Sigma m z'^2 + \ldots; \end{aligned}$$

en vertu des relations (24), cette équation se réduit à

$$2 k^2 p = k^2 \frac{\partial w}{\partial y} - k^2 \frac{\partial v}{\partial z},$$

d'où

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right);$$

on trouverait de même

$$q = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

La rotation instantanée de la sphère, immédiatement après la solidification, est donc égale au tourbillon au point P.

707. Lignes de tourbillon. — A un instant déterminé t, les *tourbillons* Ω forment un champ de vecteurs déterminé dans toute l'étendue du fluide en mouvement : on appelle *lignes de tourbillon* à l'instant t les lignes de vecteurs de ce champ, c'est-à-dire les lignes telles que la tangente en chacun de leurs points coïncide avec le tourbillon en ce point.

Les équations différentielles des lignes de tourbillon à l'instant t

sont donc

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta} \tag{25}$$

où ξ, η, ζ sont les quantités (19), t ayant une valeur déterminée. L'intégration de ces équations donne les équations des lignes de tourbillon sous forme finie

$$\Psi(x, y, z, t) = C_1,$$
$$\Psi_1(x, y, z, t) = C_2$$

avec deux constantes arbitraires C_1 et C_2. Ces équations contiennent la lettre t, qui figure dans les équations différentielles (25), mais qui y est traitée comme une constante : quand on fait varier t, les lignes de tourbillon changent.

Par exemple, dans un corps solide en mouvement, les lignes de tourbillon à l'instant t sont les droites parallèles à l'axe instantané : cela résulte de ce que tous les vecteurs tourbillons sont parallèles à cet axe.

Lorsque le mouvement est permanent, u, v, w et, par suite, ξ, η, ζ sont indépendants du temps; dans ce cas, les lignes de tourbillon ne varient pas avec t.

708. **Potentiel des vitesses; mouvement irrotationnel ou non tourbillonnaire.** — Portons notre attention sur une portion continue du milieu matériel en mouvement. A un instant t, les vitesses W des divers points de cette portion du milieu forment un champ continu de vecteurs : on dit qu'il existe à l'instant t, pour cette portion du milieu, un *potentiel* des vitesses, ou une *fonction* des vitesses quand ce champ de vecteurs dérive d'une fonction. Analytiquement, il existe, à l'instant t, un potentiel des vitesses quand on a identiquement à cet instant

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

φ étant une fonction de x, y, z pour tous les points considérés. Cette propriété est spéciale à un instant : il peut se faire qu'elle ait lieu à un instant t sans avoir lieu après ou avant. Pour que cette circonstance se présente à un instant t, il faut et il suffit

qu'à cet instant

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz \tag{26}$$

soit une différentielle exacte dans la portion considérée du milieu, c'est-à dire que la *rotation moyenne* Ω de projections ξ, η, ζ soit nulle à cet instant en tous les points de cette partie du milieu continu. Cela tient à ce que les conditions pour que l'expression (26) soit différentielle totale sont précisément

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \ldots.$$

Il existe des cas étendus, comme nous le verrons plus loin, où il y a, pour une portion déterminée du milieu, un potentiel des vitesses *à chaque instant pendant toute la durée du mouvement*. Dans ce cas, la rotation moyenne Ω, de projections ξ, η, ζ, est nulle, quel que soit t; on dit que le mouvement de la portion considérée du milieu est *irrotationnel* (¹) ou *non tourbillonnaire*. Les composantes u, v, w sont alors, à chaque instant t, les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ qui contient en général le temps : quand le mouvement irrotationnel est *permanent*, u, v, w, étant indépendants du temps, pourront être considérés comme les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(x, y, z)$, également indépendante de t.

A chaque instant t, la vitesse W en un point P est normale à la surface équipotentielle

$$\varphi = \text{const.}$$

dirigée par rapport à cette surface du côté où φ croît et égale à $\frac{d\varphi}{dn}$, la dérivée étant prise suivant la normale à la surface équipotentielle.

709. Flux à travers une surface dans le cas d'un potentiel de vitesses. — Quand les vitesses W dérivent d'un potentiel φ, la composante

$$\alpha u + \beta v + \gamma w$$

(¹) Nous empruntons cette expression aux excellents Traités de Basset (Cambridge, 1888 et 1890).

de la vitesse d'un élément situé en P, suivant une droite PD de cosinus directeurs α, β, γ, est égale à la *dérivée de* φ *prise suivant* PD (Chap. IV). En particulier, si l'on prend un élément superficiel $d\sigma$ placé en P et la normale PN à cet élément dans un certain sens, la composante W_n de la vitesse suivant PN est la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ de φ suivant cette normale, et le flux de matière à travers cet élément pendant le temps dt est

$$\rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma\, dt.$$

Le flux $d\mathrm{M}$, à travers une surface S pendant le même temps, est

$$d\mathrm{M} = dt \int\int_{\mathrm{S}} \rho \frac{d\varphi}{dn} d\sigma.$$

Équation de continuité. — Si u, v, w sont les dérivées partielles d'une fonction $\varphi(x, y, z, t)$ par rapport à x, y, z, l'équation de continuité (10) s'écrit

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0$$

ou, d'après la notation déjà employée dans la théorie de l'attraction,

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\Delta\varphi = 0. \tag{27}$$

Si le milieu en mouvement est un liquide incompressible à température constante, ρ est constant et l'équation de continuité s'écrit

$$\Delta\varphi = 0. \tag{28}$$

710. Flux et circulation le long d'une courbe donnée à l'instant t. — Étant tracée dans le milieu à l'instant t une courbe C d'extrémités A et B, on appelle *flux* le long de cette courbe l'intégrale

$$\int_{(\mathrm{A})}^{(\mathrm{B})} (u\,dx + v\,dy + w\,dz),$$

prise le long de la courbe, ou encore l'intégrale

$$\int W\,ds\cos\widehat{W,ds},$$

prise le long de la courbe. Dans le calcul de cette intégrale, t a une valeur constante, correspondant à l'instant considéré. Cette intégrale est analogue à un travail : ce serait le travail d'une force fictive W de projections u, v, w agissant sur un point matériel fictif qui suivrait la courbe d'une extrémité A à l'autre B. Quand, à l'instant t, il existe un potentiel φ des vitesses, cette intégrale est

$$\int_{(A)}^{(B)} d\varphi = \varphi_B - \varphi_A.$$

φ_B et φ_A désignant les valeurs de φ aux deux points A et B. On peut répéter sur cette intégrale tout ce qu'on a dit du travail dans le cas où il existe une fonction des forces uniforme ou non.

Si les points A et B coïncident, l'intégrale donne la *circulation* le long de la courbe fermée C. Deux cas sont à distinguer : 1° si la fonction φ, suivie par continuité, n'a qu'une valeur en chaque point du fluide, la circulation le long d'une courbe fermée quelconque est *nulle*, car A coïncidant avec B, on a $\varphi_A = \varphi_B$; 2° si la fonction φ est à déterminations multiples, la valeur de la circulation le long d'une courbe fermée dépend de la position de la courbe : elle peut être nulle pour certaines courbes, différente de zéro pour d'autres.

Dans le premier cas le mouvement irrotationnel est dit *acyclique;* dans le deuxième, il est *cyclique*.

711. Un liquide incompressible ne peut pas prendre un mouvement irrotationnel acyclique dans un vase fixe et complètement clos qu'il remplit entièrement. — En effet, si un pareil mouvement existait, le potentiel φ des vitesses devrait, à l'intérieur du vase S, vérifier l'équation de Laplace (équation de continuité)

$$\Delta\varphi = 0;$$

il devrait, en tous les points de la surface S du vase, vérifier la

condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

la dérivée étant prise suivant la normale à cette surface; cela résulte de ce que le flux à travers un élément quelconque de la surface du vase est évidemment *nul*. En outre φ serait uniforme.

Mais nous avons vu, dans le Chapitre XXIX, n° 594, que, si ces conditions sont remplies, φ est *constant* dant tout l'intérieur de la surface S; on a donc alors

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

et le liquide est immobile.

Dans les mêmes conditions, il peut exister un mouvement cyclique : par exemple, dans un tore de révolution autour de Oz, un liquide peut prendre un mouvement irrotationnel dans lequel $\varphi = \text{arc tang}\frac{y}{x}$. Dans ce mouvement, la circulation le long d'une courbe fermée entourant une fois Oz serait 2π.

III. — SUR LA PROPAGATION DES ONDES; DISCONTINUITÉS DANS LE MOUVEMENT DES FLUIDES.

712. Indications bibliographiques. — Nous nous proposons d'exposer, dans ce paragraphe, la théorie de la propagation des ondes à laquelle s'attache le nom de Hugoniot. Ce savant a, le premier, défini et étudié la propagation d'un mouvement dans un autre, et cela non seulement pour les mouvements infiniment petits, mais pour les mouvements d'amplitude quelconque. Il a, le premier, introduit explicitement la notion de *compatibilité* de deux mouvements, et en a même donné une définition précise pour le cas du mouvement rectiligne. Dans le cas du mouvement à trois dimensions, au contraire, cette notion est beaucoup moins complètement dégagée; aussi l'auteur se place-t-il dès l'abord dans l'hypothèse où il y a compatibilité, sans rechercher les conditions pour qu'il en soitainsi. (Voir *Comptes rendus*, t. CI, 1885; *Journal de l'École Polytechnique*, Cahiers VII et VIII, 1887; et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série,

t. III et IV. *Voir* aussi DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique;* 1891.)

A la vérité, l'origine de cette théorie doit être cherchée un peu plus haut; il faut, semble-t-il, la faire remonter à deux Mémoires de M. Christoffel, insérés aux *Annali di Matematica* (1), et dans lesquels l'auteur prend pour point de départ le Mémoire de Riemann : *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*. Cette circonstance se trouve, en l'espèce, avoir un inconvénient : M. Christoffel s'attache, en effet, aux ondes de choc, dont l'existence a été découverte par Riemann. Or celles-ci constituent un cas singulier dont l'étude doit logiquement suivre et non précéder celle des ondes d'accélération. En raison même de la difficulté particulière offerte par le cas qu'il traite, l'auteur est conduit à se limiter aux discontinuités infiniment petites, ce qui diminue la portée de son analyse. Par contre, M. Christoffel se préoccupe de la signification géométrique des résultats, laquelle a été laissée de côté par Hugoniot. Mais une notion fondamentale appartient à ce dernier : c'est celle de *compatibilité*, dont la nécessité ne paraît pas avoir été aperçue par M. Christoffel (2). Seulement Hugoniot s'était borné, pour étudier les conditions complètes de compatibilité, au cas des ondes planes.

C'est à M. Hadamard que l'on doit l'extension de ces résultats au mouvement à trois dimensions; dans le Cours que M. Hadamard a professé au Collège de France, en 1898-1899 et 1899-1900, il a nettement séparé les faits d'ordre dynamique des faits d'origine cinématique. Ce sont ces derniers que nous exposons ici : nous montrerons comment M. Hadamard a établi les conditions de compatibilité et en a donné une interprétation géométrique remarquable. Les recherches de M. Hadamard sont résumées dans une Note *Sur la propagation des ondes,* insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1er fascicule 1901); elles seront développées dans un Ouvrage qui paraîtra prochainement.

(1) 2e série, t. VIII; 1877.

(2) *Notice sur les travaux scientifiques de M. Hadamard*, p. 15 et 41; 1901. (Gauthier-Villars.)

713. **Discontinuités des divers ordres.** — Jusqu'à présent, nous avons supposé que les coordonnées x, y, z d'un élément matériel du milieu à l'instant t étaient, ainsi que leurs dérivées premières et deuxièmes, des fonctions continues des coordonnées initiales a, b, c et du temps t. Nous continuerons à supposer que x, y, z sont des fonctions continues de a, b, c, t, mais nous admettrons que certaines de leurs dérivées, tout en restant finies, sont discontinues dans les conditions suivantes :

Imaginons qu'à l'instant t il existe, dans le milieu continu en mouvement, une surface S divisant le milieu en deux régions que nous appellerons les régions 1 et 2. Nous supposons : 1° que, dans chacune des régions 1 et 2, les coordonnées x, y, z soient des fonctions continues, tant des coordonnées initiales a, b, c que du temps t, et qu'il en est de même de leurs dérivées jusqu'à un ordre déterminé n; 2° que, au contraire, lorsqu'on traverse S, l'une au moins des dérivées d'ordre n éprouve une variation brusque, toutes les dérivées d'ordre inférieur à n restant d'ailleurs continues.

Nous dirons alors que la surface S est une surface de discontinuité de l'*ordre n*.

Dans cette définition, il est entendu qu'on appelle *ordre* d'une dérivée quelconque l'*ordre total* de dérivation par rapport à a, b, c et t indistinctement. Nous nommerons, par exemple, *dérivées du second ordre* les dérivées des trois catégories suivantes :

1° Dérivées du second ordre par rapport à a, b, c,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial a^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial c^2};$$

2° Dérivées du premier ordre par rapport à a, b ou c et du premier ordre par rapport à t,

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{dz}{dt}\right);$$

3° Dérivées du second ordre par rapport à t,

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

(la première catégorie comprenant 18 dérivées, la seconde 9, la troisième 3 seulement).

D'une manière générale, les dérivées d'ordre n se distribueront en $n+1$ catégories analogues aux précédentes.

Cette surface S change de forme et de position avec le temps, non seulement dans l'espace absolu, mais aussi dans le fluide, de sorte que ce sont, à chaque instant, de nouvelles particules fluides qui se trouvent sur la surface de discontinuité S; l'équation de cette surface est donc de la forme

$$(S) \qquad F_1(x, y, z, t) = 0.$$

Soient a, b, c les coordonnées initiales des particules qui, à l'instant t, se trouvent sur la surface de discontinuité S; ces particules forment, dans le milieu initial, une surface S_0 dont l'équation

$$(S_0) \qquad F(a, b, c, t) = 0,$$

dépend aussi du temps, car ce sont à chaque instant de nouvelles particules qui se trouvent sur S et, par suite, sur S_0.

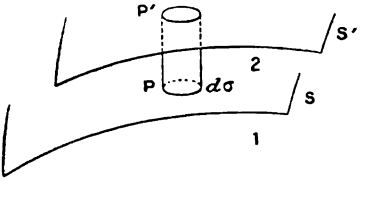
Ces deux surfaces se correspondent point par point à l'instant t; en outre, S_0 divise l'ensemble des particules dans leurs positions initiales en deux régions 1 et 2 qui correspondent point par point aux deux régions dans lesquelles S divise l'ensemble des particules dans leurs positions à l'instant t.

A l'instant initial, x, y, z sont identiques à a, b, c, les deux surfaces se confondent, $F_1(x, y, z, t)$ devient identique à $F(a, b, c, t)$.

714. Vitesse de propagation de l'onde. — La surface de discontinuité S forme une onde qui se propage en chacun de ses points, à chaque instant, avec une certaine vitesse.

Prenons un point $P(x, y, z)$, sur la surface S, à l'instant t

Fig. 327.



(*fig.* 327); menons, en ce point, la normale PN à S, et appelons $P'(x', y', z')$ le point où cette normale rencontre la position S' de

la surface à l'instant infiniment voisin $t + dt$; désignons par dn le segment de normale PP′ : la vitesse de propagation G de l'onde, au point P, à l'instant t, est égale, en grandeur et direction, au segment PP′ divisé par dt

$$G = \frac{dn}{dt}.$$

Il est aisé d'évaluer cette vitesse, connaissant l'équation de la surface S. En appelant α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs de la normale en P à la surface

$$(S) \qquad F_1(x, y, z, t) = 0,$$

on a

$$\alpha_1 = \frac{1}{k}\frac{\partial F_1}{\partial x}, \qquad \beta_1 = \frac{1}{k}\frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{k}\frac{\partial F_1}{\partial z},$$

$$k = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)^2}.$$

Les coordonnées du point P′ sont alors

$$x' = x + \alpha_1\, dn, \qquad y' = y + \beta_1\, dn, \qquad z' = z + \gamma_1\, dn,$$

et, en écrivant que ce point est sur la surface de l'onde à l'instant $t + dt$,

$$F_1(x', y', z', t + dt) = 0,$$

on a

$$F_1(x + \alpha_1\, dn,\ y + \beta_1\, dn,\ z + \gamma_1\, dn,\ t + dt) = 0.$$

Développons par la formule de Taylor, en remarquant que $F_1(x, y, z, t)$ est nul, et conservons, dans le développement, les seuls termes du premier ordre; nous aurons

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\alpha_1\, dn + \frac{\partial F_1}{\partial y}\beta_1\, dn + \frac{\partial F_1}{\partial z}\gamma_1\, dn + \frac{\partial F_1}{\partial t}\, dt = 0;$$

d'après les valeurs de α_1, β_1, γ_1, k, on tire de là, pour la vitesse G, l'expression

$$(1) \qquad G = \frac{1}{k}\frac{\partial F_1}{\partial t}.$$

On a ainsi la valeur de la vitesse : sa direction et son sens sont déterminés par la direction et le sens du segment PP′.

En particulier, à l'instant initial, x, y, z deviennent a, b, c, F, devient F, et la vitesse de propagation est

$$G = \frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{2}$$

en posant

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2}.$$

715. Conditions de compatibilité. — L'existence même, à un instant t, d'une discontinuité affectant la forme d'une surface, entraîne certaines relations qu'on peut appeler, avec M. Hadamard, *conditions identiques;* le fait que cette discontinuité persiste, quand t varie, *sous la forme d'une surface unique,* entraîne d'autres conditions qui sont les conditions cinématiques de compatibilité. Nous allons établir ces conditions pour les discontinuités du premier et du deuxième ordre.

Nous aurons à nous appuyer sur la remarque suivante : *Si une fonction des coordonnées est définie d'un côté d'une surface et sur la surface, on peut lui appliquer, sur la surface, les règles de dérivation des fonctions composées.*

716. Discontinuité du premier ordre. — Soit S la surface de discontinuité à l'instant t : les particules qui sont sur cette surface se trouvaient, à l'instant initial, sur la surface correspondante

$$F(a, b, c, t) = 0. \tag{S_0}$$

Par hypothèse, x, y, z sont des fonctions continues de a, b, c, t, mais les douze dérivées premières telles que $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}, \frac{dx}{dt}$ subissent des variations brusques quand le point a, b, c traverse la surface S_0 de la région 1 à la région 2 ou, ce qui revient au même, quand le point correspondant x, y, z traverse S de la région 1 à la région 2.

Pour désigner ces variations brusques nous emploierons la notation suivante. Si une fonction φ prend à l'instant t la valeur φ_1 en un point de la région 1 infiniment voisin de la surface de discontinuité et la valeur φ_2 au point de la région 2 infiniment

voisin du premier, nous poserons

$$\delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Si φ_2 et φ_1 sont continus et admettent des dérivées dans les milieux 1 et 2, $\delta\varphi$ regardé comme fonction de a, b, c sera continu sur la surface S_0 et pourra être différentié sur cette surface.

Remarquons, au sujet de ces différentiations, que l'on a identiquement

$$\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial a} = \delta\frac{\partial\varphi}{\partial a}, \qquad \ldots; \tag{3}$$

en effet, le premier membre est égal à $\frac{\partial\varphi_2}{\partial a} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial a}$, et le deuxième a la même signification.

Conditions identiques. — Par hypothèse, à l'instant t, l'abscisse x est une fonction de a, b, c continue quand on traverse la surface S_0 : on a donc, le long de cette surface,

$$\delta x = x_2 - x_1 = 0.$$

La différentielle totale de δx le long de la surface S_0, dans la position qu'elle occupe à l'instant t, est donc nulle, et l'on a, en remarquant que $\frac{\partial\,\delta x}{\partial a} = \delta\frac{\partial x}{\partial a}$, ...,

$$\delta\frac{\partial x}{\partial a}\,da + \delta\frac{\partial x}{\partial b}\,db + \delta\frac{\partial x}{\partial c}\,dc = 0, \tag{4}$$

pour tous les déplacements da, db, dc effectués sur S_0, c'est-à-dire vérifiant la condition

$$\frac{\partial F}{\partial a}\,da + \frac{\partial F}{\partial b}\,db + \frac{\partial F}{\partial c}\,dc = 0. \tag{5}$$

Les deux relations (4) et (5) devant être vérifiées pour les mêmes valeurs de da, db, dc les coefficients de ces quantités dans les deux équations, doivent être proportionnels.

Géométriquement, cela revient à dire que le vecteur ayant pour projections $\delta\frac{\partial x}{\partial a}$, $\delta\frac{\partial x}{\partial b}$, $\delta\frac{\partial x}{\partial c}$ est normal à la surface S_0. Appelons α, β, γ les cosinus directeurs de cette normale; on aura, en

posant $h = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial c}\right)^2}$,

$$(6) \qquad \alpha = \frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}, \qquad \beta = \frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial b}, \qquad \gamma = \frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial c}.$$

Exprimons maintenant que le vecteur $\delta\frac{\partial x}{\partial a}$, $\delta\frac{\partial x}{\partial b}$, $\delta\frac{\partial x}{\partial c}$ est normal à la surface : nous aurons, en désignant par λ un facteur de proportionnalité,

$$\delta\frac{\partial x}{\partial a} = \lambda\alpha, \qquad \delta\frac{\partial x}{\partial b} = \lambda\beta, \qquad \delta\frac{\partial x}{\partial c} = \lambda\gamma,$$

ou

$$(7) \qquad \delta\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a}, \qquad \delta\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial b}, \qquad \delta\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial c}.$$

On trouve, de même, en désignant par μ et ν deux autres facteurs,

$$(7)' \quad \begin{cases} \delta\dfrac{\partial y}{\partial a} = \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial a}, & \delta\dfrac{\partial y}{\partial b} = \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b}, & \delta\dfrac{\partial y}{\partial c} = \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}, \\ \delta\dfrac{\partial z}{\partial a} = \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial a}, & \delta\dfrac{\partial z}{\partial b} = \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b}, & \delta\dfrac{\partial z}{\partial c} = \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}. \end{cases}$$

D'après cela, il suffirait en chaque point de S_0 de connaître les trois quantités λ, μ, ν, ou le vecteur ayant pour projections λ, μ, ν, pour connaître les variations des neuf dérivées partielles de x, y, z par rapport à a, b, c.

Conditions cinématiques de compatibilité. — Les relations précédentes s'appliquent à un instant déterminé t; si maintenant on admet que, t variant, cette discontinuité se propage, en n'affectant jamais que les points d'une surface unique variable avec t, on obtiendra de nouvelles conditions.

Les valeurs x_1 et x_2 de x en deux points a, b, c infiniment voisins l'un de l'autre, placés de part et d'autre de la surface S_0, restent égales, par hypothèse, quand t varie; cela veut dire, analytiquement, que l'on a

$$\delta x = 0$$

pour toutes les valeurs de a, b, c, t vérifiant la relation

$$F(a, b, c, t) = 0.$$

Si donc on fait varier a, b, c, t de da, db, dc, dt, ces accroissements étant assujettis à la seule condition de laisser la fonction F nulle,

$$\frac{\partial F}{\partial a}\,da + \frac{\partial F}{\partial b}\,db + \frac{\partial F}{\partial c}\,dc + \frac{\partial F}{\partial t}\,dt = 0, \tag{8}$$

on devra avoir aussi

$$d\,\delta x = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial\,\delta x}{\partial a}\,da + \frac{\partial\,\delta x}{\partial b}\,db + \frac{\partial\,\delta x}{\partial c}\,dc + \frac{d\,\delta x}{dt}\,dt = 0.$$

ou

$$\delta\,\frac{\partial x}{\partial a}\,da + \delta\,\frac{\partial x}{\partial b}\,db + \delta\,\frac{\partial x}{\partial c}\,dc + \delta\,\frac{dx}{dt}\,dt = 0. \tag{9}$$

Dans cette dernière équation, pour nous conformer aux conventions faites plus haut pour les dérivées partielles, nous désignons par $\frac{d\,\delta x}{dt}$ ou $\delta\,\frac{dx}{dt}$ la dérivée partielle de δx par rapport à t, prise en regardant a, b, c comme constants.

Les deux relations (8) et (9) devant être vérifiées par les mêmes valeurs de da, db, dc, dt, les coefficients de ces quantités, dans les deux relations, doivent être *proportionnels*. Il faudra donc joindre, aux conditions (7) déjà écrites, la suivante :

$$\delta\,\frac{dx}{dt} = \frac{\lambda}{h}\,\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{10}$$

On peut appliquer le même raisonnement à y et z, et l'on trouve à côté des conditions (7)′ les deux suivantes :

$$\delta\,\frac{dy}{dt} = \frac{\mu}{h}\,\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \delta\,\frac{dz}{dt} = \frac{\nu}{h}\,\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{10}'$$

Pour que ces nouvelles équations soient compatibles avec les précédentes, il faut que le vecteur λ, μ, ν précédemment défini et le vecteur $\delta\,\frac{dx}{dt}$, $\delta\,\frac{dy}{dt}$, $\delta\,\frac{dz}{dt}$ *aient même direction*. Ce dernier vecteur représente la variation géométrique de la vitesse d'un élément quand on traverse la surface : en effet, les projections u, v, w de la vitesse d'un élément sont $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; on a donc

$$\delta\,\frac{dx}{dt} = \delta u, \qquad \delta\,\frac{dy}{dt} = \delta v, \qquad \delta\,\frac{dz}{dt} = \delta w.$$

Le rapport des longueurs des deux vecteurs est égal à $\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial t}$; on peut toujours supposer que l'instant considéré a été pris pour instant initial, on a alors pour expression de ce rapport la quantité G définie au n° 714, comme étant la *vitesse de propagation de l'onde*.

La direction commune de ces deux vecteurs s'appelle la *direction de la discontinuité :* la discontinuité du premier ordre sera appelée *longitudinale* ou *transversale,* suivant que cette direction est *normale* ou *tangente* à la surface de l'onde S.

Si les deux vecteurs (λ, μ, ν), $(\delta u, \delta v, \delta w)$ n'avaient pas la même direction, la propagation d'une discontinuité unique du premier ordre serait cinématiquement impossible : la discontinuité, à partir de l'instant considéré, cesserait alors d'affecter une surface unique et devrait, pour le moins, se dédoubler en deux discontinuités distinctes.

En général, au cours d'un mouvement déterminé, les conditions de compatibilité seront évidemment vérifiées, car il ne peut y avoir constamment dédoublement de la discontinuité : on aurait alors, non des discontinuités isolées, mais des tranches de discontinuité, ce que nous ne supposons pas.

En résumé, une discontinuité du premier ordre est caractérisée, en chacun de ses points à chaque instant, *par un vecteur* λ, μ, ν *et par un nombre* G qui est la vitesse de propagation.

717. **Variation de densité dans une discontinuité du premier ordre.** — Il existe une relation simple entre le saut de vitesse normale, le saut de densité en un point de la surface S et la vitesse de propagation G de la discontinuité en ce point. Pour l'obtenir, considérons une position S de la surface à l'instant t, et la position S′ de la surface à l'instant $t + dt$: puis construisons (*fig.* 327) le cylindre droit ayant pour base un élément $d\sigma$ de S et limité à S′. La hauteur PP′ de ce cylindre est $G\,dt$, d'après la définition même de la vitesse de propagation G (n° 714); son volume est $G\,dt\,d\sigma$.

Nous allons évaluer de deux façons la variation que subit pendant le temps dt la masse totale de matière contenue dans ce cylindre :

1° Appelons ρ_1 la densité au-dessous de S et ρ_2 au-dessus,

dans le voisinage immédiat de S. A l'instant t, la matière qui remplit le cylindre a pour densité ρ_2, sa masse est $\rho_2 G\,dt\,d\sigma$; à l'instant $t + dt$, la matière qui remplit le cylindre a pour densité ρ_1, car, la discontinuité étant venue en S′, le cylindre est au-dessous de S′; la masse contenue dans le cylindre est donc $\rho_1 G\,dt\,d\sigma$. D'où une première expression de la variation de masse

$$(\rho_1 - \rho_2) G\,dt\,d\sigma. \tag{11}$$

2° Appelons W_1 la vitesse des particules fluides au-dessous de S, et W_2 la vitesse au-dessus, dans le voisinage immédiat de S. La variation de la masse contenue dans le cylindre est égale à l'excès des masses entrées sur les masses sorties dans le temps dt. Appelons W_{1n} et W_{2n} les projections de W_1 et W_2 sur la normale PP′ à la surface S et W_{1t}, W_{2t} leurs projections sur le plan tangent à S : ce sont les vitesses normales et tangentielles des particules sur les deux côtés de la discontinuité.

Pour évaluer les masses liquides entrant dans le cylindre ou en sortant par la surface latérale, il faut tenir compte de la vitesse tangentielle; pour évaluer les masses traversant les bases, il faut, au contraire, tenir compte de la vitesse normale. Les vitesses tangentielles, à chaque instant, diffèrent infiniment peu les unes des autres sur une même section droite du cylindre; la masse liquide qui entre par la surface latérale est donc égale à celle qui sort par cette surface. Mais il n'en est pas de même pour les bases; par la base inférieure il entre, pendant le temps dt, une masse liquide $\rho_1 W_{1n}\,dt\,d\sigma$; par la base supérieure il sort, pendant le même temps, une masse liquide $\rho_2 W_{2n}\,dt\,d\sigma$. En effet, pendant que la discontinuité se transporte de S en S′, le cylindre restant immobile, la base inférieure du cylindre est plongée dans le milieu 1 et la supérieure dans le milieu 2. On a donc une seconde expression de la variation de la masse contenue dans le cylindre

$$(\rho_1 W_{1n} - \rho_2 W_{2n})\,dt\,d\sigma. \tag{12}$$

Égalant ces deux expressions, on a

$$\begin{aligned} G(\rho_1 - \rho_2) &= \rho_1 W_{1n} - \rho_2 W_{2n}, \\ \rho_2(G - W_{2n}) &= \rho_1(G - W_{1n}). \end{aligned} \tag{13}$$

On peut dire que $G - W_{2n}$ est la vitesse de propagation G_2 de

la discontinuité par rapport au milieu 2, et que $G - W_{1n}$ est la vitesse de propagation G_1 par rapport au milieu 1 : la relation s'écrit alors

$$\rho_2 G_2 = \rho_1 G_1.$$

Cas d'un fluide incompressible. — Si le milieu matériel est un fluide incompressible, on a $\rho_2 = \rho_1$, et la relation (13) montre que l'on a aussi

$$W_{2n} = W_{1n}.$$

Donc, *dans un fluide incompressible, la variation brusque de vitesse affecte seulement la composante tangentielle; la composante normale ne subit pas de saut brusque.* Ce fait paraît d'ailleurs évident : si, dans un fluide incompressible, il se produisait un saut brusque de vitesse normale, les éléments fluides primitivement en contact se sépareraient.

Inversement, si la discontinuité est tangentielle, c'est-à-dire si $W_{2n} - W_{1n}$ est nul, la densité ne varie pas d'un côté à l'autre de S; on a $\rho_2 = \rho_1$.

718. Discontinuités du deuxième ordre. — Supposons maintenant que les dérivées premières de x, y, z par rapport à a, b, c, t soient continues quand on traverse la surface S formée, à l'instant t, par les molécules qui, à l'instant initial, étaient sur la surface

$$F(a, b, c, t) = 0.$$

Alors, en employant la même notation que plus haut, on a

$$\delta \frac{\partial x}{\partial a} = 0, \qquad \delta \frac{\partial x}{\partial b} = 0, \qquad \delta \frac{\partial x}{\partial c} = 0, \tag{14}$$

$$\delta \frac{dx}{dt} = 0, \tag{15}$$

avec des conditions analogues pour y et z.

Conditions identiques. — Donnons à t une valeur numérique; comme les quantités $\delta \frac{\partial x}{\partial a}, \cdots$ sont nulles tout le long de S, leurs différentielles totales prises le long de S sont nulles. Donc, en désignant par da, db, dc un déplacement arbitraire sur S, on a, par

différentiation totale des relations (14),

$$(16)\qquad \begin{cases} \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a^2}\,da+\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}\,db+\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}\,dc=0,\\ \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}\,da+\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial b^2}\,db+\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c}\,dc=0,\\ \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}\,da+\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c}\,db+\delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial c^2}\,dc=0. \end{cases}$$

Nous écrivons ces relations en nous appuyant sur ce que

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\delta\frac{\partial x}{\partial a}\right)=\delta\frac{\partial^2 x}{\partial a^2},\qquad \frac{\partial}{\partial b}\left(\delta\frac{\partial x}{\partial a}\right)=\delta\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b},\qquad \ldots.$$

Chacune de ces relations (16) devant avoir lieu pour tous les déplacements da, db, dc vérifiant la condition

$$(17)\qquad \frac{\partial F}{\partial a}\,da+\frac{\partial F}{\partial b}\,db+\frac{\partial F}{\partial c}\,dc=0,$$

les coefficients de da, db, dc dans chacune des trois relations (16) doivent être proportionnels à $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$. En écrivant que $\delta\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$, $\delta\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}$, $\delta\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial c}$ sont égaux à $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$ multipliés par le facteur de proportionnalité $\frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial F}{\partial a}$, on voit que les coefficients des deux autres relations (16) sont égaux à ces mêmes quantités multipliées respectivement par $\frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial F}{\partial b}$ et $\frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial F}{\partial c}$, et l'on a les relations

$$(18)\qquad \begin{cases} \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a^2}=\dfrac{\lambda}{h^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial a}\right)^2, & \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial b^2}=\dfrac{\lambda}{h^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial b}\right)^2, & \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial c^2}=\dfrac{\lambda}{h^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial c}\right)^2,\\ \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial c}=\dfrac{\lambda}{h^2}\dfrac{\partial F}{\partial b}\dfrac{\partial F}{\partial c}, & \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial a}=\dfrac{\lambda}{h^2}\dfrac{\partial F}{\partial c}\dfrac{\partial F}{\partial a}, & \delta\dfrac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial b}=\dfrac{\lambda}{h^2}\dfrac{\partial F}{\partial a}\dfrac{\partial F}{\partial b}. \end{cases}$$

On trouve, pour la variation brusque des dérivées secondes de y et z par rapport à a, b, c, des expressions analogues dans lesquelles le facteur λ serait remplacé par μ, puis par ν,

$$(18)'\qquad \begin{cases} \delta\dfrac{\partial^2 y}{\partial a^2}=\dfrac{\mu}{h^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial a}\right)^2, & \ldots, & \delta\dfrac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial c}=\dfrac{\mu}{h^2}\dfrac{\partial F}{\partial b}\dfrac{\partial F}{\partial c}, & \ldots,\\ \delta\dfrac{\partial^2 z}{\partial a^2}=\dfrac{\nu}{h^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial a}\right)^2, & \ldots, & \delta\dfrac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial c}=\dfrac{\nu}{h^2}\dfrac{\partial F}{\partial b}\dfrac{\partial F}{\partial c}, & \ldots. \end{cases}$$

Dans ces relations h désigne la même quantité $\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2 + \dots}$ que plus haut, de façon à mettre en évidence les cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité.

On peut donc dire que les variations des dérivées secondes par rapport à a, b, c sont définies par un certain vecteur de projections λ, μ, ν.

Passons maintenant aux variations des dérivées de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ou de u, v, w par rapport à a, b, c. Comme par hypothèse δu, δv, δw sont nuls le long de S, leurs différentielles totales le sont. On en conclut qu'en appelant λ_1, μ_1, ν_1 trois facteurs de proportionnalité, on a

$$(19)\quad \begin{cases} \delta\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}, & \delta\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial F}{\partial b}, & \delta\frac{\partial u}{\partial c} = \frac{\lambda_1}{h}\frac{\partial F}{\partial c}, \\ \delta\frac{\partial v}{\partial a} = \frac{\mu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}, & \delta\frac{\partial v}{\partial b} = \frac{\mu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial b}, & \delta\frac{\partial v}{\partial c} = \frac{\mu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial c}, \\ \delta\frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\nu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}, & \delta\frac{\partial w}{\partial b} = \frac{\nu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial b}, & \delta\frac{\partial w}{\partial c} = \frac{\nu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial c}. \end{cases}$$

Ces variations sont donc encore définies par un certain vecteur $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

Enfin, les trois dérivées secondes de x, y, z par rapport au temps $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ ou $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ subissent, quand on traverse la surface, des variations que nous appellerons λ_2, μ_2, ν_2,

$$(20)\qquad \delta\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda_2, \qquad \delta\frac{d^2y}{dt^2} = \mu_2, \qquad \delta\frac{d^2z}{dt^2} = \nu_2;$$

on peut écrire aussi

$$(20)'\qquad \delta\frac{du}{dt} = \lambda_2, \qquad \delta\frac{dv}{dt} = \mu_2, \qquad \delta\frac{dw}{dt} = \nu_2;$$

ces variations sont définies par le vecteur $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ qui est la variation géométrique de l'accélération d'un côté à l'autre de S.

Conditions de compatibilité cinématique. — Faisons maintenant varier t, et écrivons que la discontinuité subsiste sous forme de surface.

La quantité $\delta\frac{\partial x}{\partial a}$ est une fonction de a, b, c, t qui reste nulle

quand a, b, c, t varient de façon à vérifier l'équation

$$F(a, b, c, t) = 0.$$

Faisons varier a, b, c, t de da, db, dc, dt, on aura donc

$$d\left(\delta \frac{\partial x}{\partial a}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\, da + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial b}\, db + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial a\, \partial c}\, dc + \delta \frac{\partial u}{\partial a}\, dt = 0, \tag{21}$$

sous la condition

$$\frac{\partial F}{\partial a}\, da + \frac{\partial F}{\partial b}\, db + \frac{\partial F}{\partial c}\, dc + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt = 0. \tag{22}$$

En écrivant cette relation (21) nous nous appuyons sur ce que

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\delta \frac{\partial x}{\partial a}\right) = \delta \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}, \quad \ldots,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\delta \frac{\partial x}{\partial a}\right) = \delta\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}\right) = \delta\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt}\right) = \delta \frac{\partial u}{\partial a}.$$

Les relations (21) et (22) devant avoir lieu pour les mêmes valeurs de da, db, dc, dt, les coefficients de ces quantités dans les deux relations doivent être proportionnels

$$\frac{\delta \dfrac{\partial^2 x}{\partial a^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial a}} = \ldots = \frac{\delta \dfrac{\partial u}{\partial a}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

Mais, d'après (18), les trois premiers rapports sont égaux à $\frac{\lambda}{h^2}\frac{\partial F}{\partial a}$ et, d'après (19), le dernier est $\frac{\lambda_1}{h}\frac{\dfrac{\partial F}{\partial a}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}}$. On a donc

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{23}$$

On trouve de même

$$\mu_1 = \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \nu_1 = \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial t}. \tag{23'}$$

Prenons maintenant la relation

$$\delta u = 0,$$

et différentions-la totalement en y faisant varier a, b, c, t sous la condition $F(a, b, c, t) = 0$. Nous aurons

$$\delta \frac{\partial u}{\partial a}\, da + \delta \frac{\partial u}{\partial b}\, db + \delta \frac{\partial u}{\partial c}\, dc + \delta \frac{du}{dt}\, dt = 0, \tag{24}$$

sous la condition

$$\frac{\partial F}{\partial a}\, da + \frac{\partial F}{\partial b}\, db + \frac{\partial F}{\partial c}\, dc + \frac{\partial F}{\partial t}\, dt = 0.$$

Les coefficients de da, db, dc, dt dans ces deux relations sont donc proportionnels. En écrivant ce fait et tenant compte des relations (19) et (20)′, on a

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{h} \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{25}$$

On trouve de même

$$\mu_2 = \frac{\mu_1}{h} \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \nu_2 = \frac{\nu_1}{h} \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{25′}$$

Nous avons ainsi établi les conditions (23) et (23)′ d'une part, (25) et (25)′ d'autre part, qui expriment la compatibilité. Ces conditions ont une interprétation géométrique simple : elles montrent que les trois vecteurs (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ ont à chaque instant, en chaque point de la discontinuité, *la même direction* et que *leurs longueurs forment une progression géométrique de raison* $\frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial t}$. Comme on peut toujours supposer qu'on a pris l'instant actuel pour instant initial, on voit que *cette raison est égale à la vitesse de propagation* G *de la discontinuité.*

En résumé, quand la compatibilité existe, et c'est ce qu'on doit admettre comme le cas général pour un mouvement déterminé quelconque, une discontinuité du second ordre est caractérisée par un vecteur (λ, μ, ν) et un nombre G, la vitesse de propagation : les deux autres vecteurs $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ ont même direction que le premier (λ, μ, ν) et sont égaux au premier multiplié respectivement par G et G^2. On peut appeler la direction

commune de ces trois vecteurs la *direction de la discontinuité*.

On peut, en particulier, classer les discontinuités en discontinuités purement longitudinales dans lesquelles la direction de la discontinuité est, en chaque point, normale à la surface S, et en discontinuités purement transversales dans lesquelles la direction de la discontinuité est, en chaque point, tangente à la surface S.

Comme l'a montré M. Hadamard, les mêmes propriétés s'étendent aux discontinuités d'ordre n. (*Voyez* aux exercices.)

719. **Variation des dérivées de la densité dans une discontinuité du deuxième ordre.** — Nous avons indiqué (n° 717) la méthode directe par laquelle M. Hadamard trouve la variation de densité dans une discontinuité du premier ordre. Pour résoudre le même problème, dans les discontinuités d'ordre supérieur, M. Hadamard emploie la méthode analytique suivante :

Partons de l'équation de continuité

$$\rho D = \rho_0,$$

où D désigne le déterminant fonctionnel du n° 694, de x, y, z par rapport à a, b, c.

Prenons les logarithmes népériens

$$L\rho - L\rho_0 = -LD,$$

puis les dérivées des deux membres par rapport à a,

$$\frac{\partial L\rho}{\partial a} - \frac{\partial L\rho_0}{\partial a} = -\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial a}. \tag{26}$$

A l'instant t, la surface de discontinuité a pour équation dans le milieu primitif

$$F(a, b, c, t) = 0; \tag{S}$$

quand on passe d'un côté à l'autre de cette surface, ρ_0 varie d'une manière continue ainsi que ses dérivées, car les discontinuités de ρ_0 affectent une autre surface. Les dérivées premières de x, y, z étant continues, ρ varie d'une manière continue d'un côté à l'autre de S. Mais quand on traverse cette surface S, la dérivée $\frac{\partial L\rho}{\partial a}$

subit une variation brusque qui, d'après (26), est donnée par la formule

$$\delta\left(\frac{\partial L\rho}{\partial a}\right) = -\frac{1}{D}\,\delta\left(\frac{\partial D}{\partial a}\right); \tag{27}$$

dans le deuxième membre de cette formule, nous faisons sortir le déterminant D du signe δ, car les dérivées premières de x, y, z par rapport à a, b, c sont continues d'un côté à l'autre de la surface S. Calculons $\frac{\partial D}{\partial a}$. Nous trouverons

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial a} = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial a^2}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\right) + \dots \\ & + \frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}\left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \dots \\ & + \frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right) + \dots,\end{aligned}$$

où il y a neuf termes analogues à ceux qui sont écrits. Quand on traverse la surface, les dérivées premières de x, y, z ne varient pas; les seuls termes $\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial b}$, ... subissent des variations que nous avons calculées plus haut (équations 18 et 18′).

On a donc

$$\left\{\begin{aligned}\delta\left(\frac{\partial D}{\partial a}\right) = {} & \frac{\lambda}{h^2}\left(\frac{\partial F}{\partial a}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}\right) + \dots \\ & + \frac{\mu}{h^2}\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial b}\left(\frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial e}\frac{\partial z}{\partial a}\right) + \dots \\ & + \frac{\nu}{h^2}\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right) + \dots.\end{aligned}\right. \tag{28}$$

En portant cette expression dans la relation (27) nous aurons la variation de la dérivée de $L\rho$ par rapport à a. Mais on peut simplifier la formule en imaginant que l'instant actuel ait été pris pour instant initial. Alors x, y, z se réduisent identiquement à a, b, c : les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$, $\frac{\partial z}{\partial c}$ deviennent égales à 1 et les autres dérivées du premier ordre deviennent nulles. Dans ces conditions, tous les termes non écrits dans (28) deviennent nuls et l'on trouve

$$\delta\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c}\right). \tag{29}$$

Comme, d'autre part, $D = 1$ quand on est à l'instant initial, la formule (27) devient

$$(30) \qquad \delta\left(\frac{\partial L\rho}{\partial a}\right) = -\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c}\right).$$

On trouvera, de même,

$$(30)' \qquad \begin{cases} \delta\left(\dfrac{\partial L\rho}{\partial b}\right) = -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b}\left(\dfrac{\lambda}{h}\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b} + \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}\right), \\ \delta\left(\dfrac{\partial L\rho}{\partial b}\right) = -\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}\left(\dfrac{\lambda}{h}\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b} + \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}\right). \end{cases}$$

Ces trois variations sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité, le facteur de proportionnalité

$$-\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c}\right)$$

représentant, au signe près, la projection du vecteur caractéristique (λ, μ, ν) sur la normale à la discontinuité. Les variations des dérivées de densité dépendent donc seulement de la composante normale du vecteur λ, μ, ν. Si la discontinuité était purement tangentielle, les trois variations (30) et (30′) seraient nulles. Réciproquement si ces variations sont nulles, la discontinuité est tangentielle : c'est ce qui a lieu, en particulier, pour un liquide incompressible.

On a ainsi, pour le second ordre, des résultats analogues à ceux du n° 717. Ces résultats s'étendent, avec les mêmes conclusions, comme l'a montré M. Hadamard, aux discontinuités d'ordre supérieur. (*Voyez* aux exercices.)

720. Variation de la rotation moléculaire instantanée dans une discontinuité du second ordre. — Soit comme plus haut Ω la rotation instantanée en un point : cette rotation est un vecteur ayant pour projections les quantités

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \ldots$$

qui dépendent de dérivées du second ordre des coordonnées. Voyons quel est le saut brusque que subit cette rotation quand on traverse la surface S. Pour simplifier, nous pouvons toujours

supposer que l'instant actuel a été pris comme instant initial; alors x, y, z sont égaux à a, b, c, et l'on a

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial c}\right), \ldots.$$

Mais les formules du numéro précédent donnent

$$\delta\frac{\partial w}{\partial b} = \frac{\nu_1}{h}\frac{\partial F}{\partial b} = \frac{\nu}{h^2}\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial b} = \nu G\beta,$$

en appelant G la vitesse de propagation $\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial t}$ et β le cosinus de l'angle de la normale à la surface avec Ox, $\beta = \frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial b}$. On a pour les autres variations des expressions analogues, et l'on trouve finalement

$$\delta\xi = \tfrac{1}{2}G(\nu\beta - \mu\gamma),$$
$$\delta\eta = \tfrac{1}{2}G(\lambda\gamma - \nu\alpha),$$
$$\delta\zeta = \tfrac{1}{2}G(\mu\alpha - \lambda\beta).$$

Donc le vecteur $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ représentant la variation brusque de la rotation moléculaire instantanée est le *demi-moment de la vitesse de propagation portée sur la normale par rapport à l'extrémité du segment* (λ, μ, ν) *représentatif de la discontinuité.*

On peut remarquer que la composante tangentielle du vecteur (λ, μ, ν) intervient seule ici : en laissant à cette composante la même valeur et faisant varier la composante normale, on n'altérerait pas $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$.

Au contraire, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent, la composante normale du vecteur (λ, μ, ν) intervient seule dans la variation brusque de la densité d'un côté à l'autre de la surface de l'onde.

EXERCICES.

1. Vérifier effectivement par le calcul que si l'on prend la dérivée de ρD par rapport au temps, en suivant un élément dans son mouvement, on obtient l'équation de continuité d'Euler (n° 701).

Réponse. — Développant D et appelant $\frac{dyz}{dab}$ les mineurs tels que

$$\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b},$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{dD}{dt} = &\frac{\partial u}{\partial a}\frac{dyz}{dbc} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{dyz}{dca} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{dyz}{dab}\\ &+ \frac{\partial v}{\partial a}\frac{dzx}{dbc} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{dzx}{dca} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{dzx}{dab}\\ &+ \frac{\partial w}{\partial a}\frac{dxy}{dbc} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{dxy}{dca} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{dxy}{dab},\end{aligned}$$

car $d\dfrac{\partial x}{\partial a} = \dfrac{\partial u}{\partial a}$, ...

Mais u étant supposé exprimé en x, y, z devient une fonction de a, b, c par l'intermédiaire de x, y, z (formules 1 du n° 691); donc

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a};$$

on calcule de même $\dfrac{\partial u}{\partial b}$, $\dfrac{\partial u}{\partial c}$, $\dfrac{\partial v}{\partial a}$, ... On a alors, après réductions,

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) D,$$

et l'équation $\dfrac{d}{dt}(\rho D) = 0$ donne bien l'équation de continuité d'Euler.

2. Vérifier analytiquement que, dans un corps solide en mouvement, les lignes de courant à un instant t sont les hélices que décriraient les points du corps dans le mouvement hélicoïdal tangent.

Réponse. — Prenant comme axe Oz l'axe du mouvement hélicoïdal tangent à l'instant considéré t, on a, pour les proportions u, v, w de la vitesse d'un point x, y, z du corps $u = -ry$, $v = rx$, $w = \gamma$, r étant la rotation instantanée autour de Oz à l'instant considéré et γ la vitesse de glissement le long de Oz. Les équations des lignes de courant à l'instant t sont alors

$$\frac{dx}{-ry} = \frac{dy}{rx} = \frac{dz}{\gamma}.$$

On peut les écrire

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

$$dz = \frac{\gamma}{r}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

et, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = C,$$

$$z + \frac{\gamma}{r}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x} = C_1.$$

Ces équations définissent un système d'hélices toutes de même pas autour de Oz.

3. *Discontinuités d'ordre supérieur.* — Soit une discontinuité d'ordre n : rangeons les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de chacune des coordonnées, de x, par exemple, sur $n+1$

lignes d'après l'ordre de dérivation par rapport à t,

$$\begin{array}{lllll}
0\ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial^n x}{\partial a^n}, & \dfrac{\partial^n x}{\partial a^{n-1}\partial b}, & \ldots, & \dfrac{\partial^n x}{\partial c^n}, \\
1\ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial^{n-1} x'}{\partial a^{n-1}}, & \dfrac{\partial^{n-1} x'}{\partial a^{n-2}\partial b}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} x'}{\partial c^{n-1}}, \\
2\ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial^{n-2} x''}{\partial a^{n-2}}, & \ldots\ldots, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-2} x''}{\partial c^{n-2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
n-1\ldots\ldots & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial a}, & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial b}, & \ldots, & \dfrac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c}, \\
n\ldots\ldots\ldots & & x^n, & &
\end{array}$$

où x', x'', ..., $x^{(n)}$ sont les dérivées premières, secondes, ... $n^{\text{ièmes}}$ de x par rapport à t.

Chacune de ces lignes définit un facteur de proportionnalité, la première λ, la deuxième λ_1, ..., la $(n+1)^{\text{ième}}$ λ_n. On aura un Tableau analogue pour y et z avec $n+1$ facteurs correspondants μ_i et ν_i. On a ainsi, en définitive, $n+1$ vecteurs (λ, μ, ν), $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, ..., $(\lambda_n, \mu_n, \nu_n)$.

Les conditions de compatibilité cinématique exigent que tous ces vecteurs aient même direction et que leurs longueurs forment une progression géométrique dont la raison est la vitesse G. (HADAMARD.)

4. *Variation de la densité dans une discontinuité d'ordre n.* — En employant la méthode du n° 719, on démontrera que les variations brusques des dérivées d'ordre $n-1$ de $\log\rho$, par rapport à a, b, c sont proportionnelles aux termes du développement de

$$-\frac{1}{h^{n-1}}\left(\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}+\frac{\partial F}{\partial c}\right)^{n-1},$$

le facteur de proportionnalité étant

$$\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b}+\frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c},$$

c'est-à-dire la *projection du vecteur caractéristique de la discontinuité* (λ, μ, ν) *sur la normale à la surface.* (HADAMARD.)

5. *Dilatations principales dans une déformation infiniment petite.* — Démontrer que les coefficients des dilatations principales en un point pour une déformation infiniment petite (n° 685) sont les racines de l'équation du troisième degré en δ (n° 670) :

$$\begin{vmatrix}
2\dfrac{\partial u}{\partial x}-2\delta & \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} \\
\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y} & 2\dfrac{\partial v}{\partial y}-2\delta & \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z} \\
\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z} & 2\dfrac{\partial w}{\partial z}-2\delta
\end{vmatrix}=0.$$

6. *Vitesses de dilatations principales en un point dans un fluide en mouvement* (n° 705). — Remplaçant, dans la formule précédente, u, v, w par $u\,dt$,

$v\,dt$, $w\,dt$, et faisant $\frac{\delta}{dt} = s$, on obtient une équation de troisième degré en s dont les racines sont les vitesses demandées.

7. *Théorème de Bertrand.* — En tout point d'une particule fluide en mouvement, il y a au moins un élément superficiel fluide dont le plan reste parallèle à lui-même pendant le temps dt (*Comptes rendus*, 1868, 1er semestre, p. 1227).

CHAPITRE XXXIV.

DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS. THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

721. **Objet du Chapitre.** — Nous nous occuperons, dans ce Chapitre, des équations du mouvement des fluides dits *parfaits*. Ces équations doivent être modifiées quand on tient compte de la viscosité.

I. — FLUIDES PARFAITS. — ÉQUATIONS.

722. **Définition; pression en un point.** — Un fluide est *parfait* quand sa *viscosité est nulle,* c'est-à-dire quand il n'existe aucune résistance au glissement des particules fluides les unes sur les autres. D'après cela, *dans un fluide parfait en mouvement tous les efforts sont des pressions* NORMALES *aux éléments plans sur lesquels ils s'exercent.* Les efforts sont *normaux* pour qu'il n'y ait pas de résistance au glissement; ce sont des *pressions* pour que les molécules fluides au contact ne se séparent pas.

Si nous appliquons à un fluide parfait en mouvement les formules générales du Chapitre XXX, applicables à l'équilibre et au mouvement d'un milieu continu quelconque, nous obtiendrons les résultats suivants :

A un instant t, en chaque point $P(x, y, z)$ du fluide parfait, les composantes tangentielles de l'effort T_1, T_2, T_3 sont *nulles:* les projections T_x, T_y, T_z de l'effort, rapporté à l'unité de surface, s'exerçant sur la face négative d'un élément quelconque $d\sigma$, sont alors

$$T_x = N_1\alpha, \qquad T_y = N_2\beta, \qquad T_z = N_3\gamma.$$

Cet effort devant être normal à l'élément $d\sigma$, on doit avoir

$$\frac{T_x}{\alpha} = \frac{T_y}{\beta} = \frac{T_z}{\gamma},$$

ce qui exige

$$N_1 \equiv N_2 = N_3.$$

En outre, l'effort devant toujours être une *pression,* les projections T_x, T_y, T_z doivent être de mêmes signes que α, β, γ; la valeur commune de N_1, N_2, N_3 est donc une quantité positive p, que l'on appelle *pression au point* P *à l'instant* t. Cette quantité est une fonction uniforme p des coordonnées x, y, z du point P et du temps t. Sur tout élément $d\sigma$ passant par P, s'exerce un effort qui est une pression normale $p\,d\sigma$.

D'après cela, dans un fluide parfait en mouvement, la quadrique directrice et l'ellipsoïde des efforts sont, en chaque point, à chaque instant, des sphères.

Il faut bien remarquer qu'il n'existe pas de fluides parfaits; les fluides les plus mobiles ont une certaine viscosité. Ainsi l'eau est un liquide visqueux : c'est ce qui résulte de ce fait que de l'eau coulant sous l'action de la pesanteur dans un canal rectiligne de pente constante prend un mouvement qui est loin d'être un mouvement uniformément accéléré, comme il devrait arriver évidemment si les molécules d'eau glissaient sans résistance les unes sur les autres.

Néanmoins, quand il s'agit de fluides très mobiles, on peut, comme première approximation, les traiter comme des fluides parfaits.

723. **Équations du mouvement d'un fluide parfait.** — Soient, comme dans le Chapitre XXX, X, Y, Z les projections des forces, rapportées à l'unité de masse, agissant sur les éléments de volume du fluide; ρ la densité du fluide et J l'accélération de l'élément fluide placé à l'instant t au point

$$P(x, y, z);$$

les équations générales du n° 616, dans lesquelles on fait

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = p,$$

deviennent

$$(1)\qquad \frac{\partial p}{\partial x}=\rho(X-J_x),\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=\rho(Y-J_y),\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=\rho(Z-J_z).$$

Telles sont les équations du mouvement des fluides parfaits. Dans ces équations X, Y, Z, p et ρ sont des fonctions uniformes et finies de x, y, z et t dans toute l'étendue du fluide. La fonction p est assujettie à être *continue* en tous les points du fluide, puisque ses dérivées partielles sont finies, d'après les équations (1); en outre, cette fonction doit rester *positive* ou *nulle* dans le fluide. La densité ρ est également positive, mais peut-être discontinue. Il faudra adjoindre à ces trois équations (1) l'*équation caractéristique* du fluide

$$(2)\qquad \mathcal{F}(p,\rho,\tau)=0$$

entre la pression, la densité et la température τ (n° 627), et l'*équation de continuité*. On devra demander à une hypothèse nouvelle une autre relation entre τ et les autres fonctions inconnues. (*Voyez* DUHEM, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. I, p. 99.)

724. Équation caractéristique. — Nous signalerons pour l'équation caractéristique trois cas simples, très importants au point de vue des applications :

Premier cas. — Le fluide est un liquide incompressible à température constante; alors on a

$$\rho=\text{const.}$$

Deuxième cas. — Le fluide est un gaz parfait suivant les lois de Mariotte et de Gay-Lussac : alors

$$\frac{p}{\rho(1+\alpha\tau)}=\text{const.},$$

α étant égal au coefficient de dilatation des gaz $\frac{1}{273}$.

Troisième cas. — Transformation adiabatique d'un gaz. — Si le mouvement d'un gaz est tel que les éléments en mouvement sont subitement dilatés ou comprimés, leur température change; mais si l'on admet, comme il arrive, par exemple, dans la propagation du son, que cette dilatation ou cette compression sont suffisamment rapides pour que chaque élément fluide ne perde ni ne gagne de chaleur, la transformation de chaque élément dm est

dite *adiabatique* et la relation entre la densité et la pression de l'élément est de la forme

$$p = k\rho^{\gamma},$$

k et γ désignant des constantes dont la seconde, γ, est le rapport de la chaleur spécifique du gaz sous pression constante à sa chaleur spécifique sous volume constant, $\gamma = 1,408$.

Pour l'étude des difficultés qui se présentent dans des cas plus généraux, nous renverrons à une Note de M. Duhem (*Comptes rendus*, 21 janvier 1901, p. 117).

725. Discontinuités dans le mouvement d'un fluide. — A chaque instant t, la pression est une fonction uniforme, continue et positive dans toute l'étendue du fluide.

Les autres éléments peuvent subir des discontinuités. Le cas le plus simple est le cas où la discontinuité affecte la forme d'une surface S variable avec t. La discontinuité est alors une onde qui se propage dans le fluide.

Nous avons, à la fin du Chapitre précédent, étudié en détail ce genre de discontinuités et nous les avons classées en discontinuités des divers ordres, d'après M. Hadamard (¹).

En particulier, pour les discontinuités du premier et du deuxième ordre, nous avons étudié les variations brusques de la densité, de la vitesse, de l'accélération, du tourbillon, quand on passe d'un côté à l'autre de la surface S.

II. — ÉQUATIONS DU MOUVEMENT AVEC LES VARIABLES DE LAGRANGE.

726. Équations du mouvement. — Soient a, b, c les coordonnées initiales d'un élément fluide à l'instant $t = 0$, x, y, z ses coordonnées à l'instant t; pour connaître le mouvement, il faudrait connaître x, y, z, ρ et p en fonction de a, b, c, t.

$$(3)\qquad \begin{cases} x = f(a, b, c, t), \\ y = f_1(a, b, c, t), \\ z = f_2(a, b, c, t), \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

(¹) *Voir* HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*. Hermann, éditeur.

Les projections de la vitesse sont alors

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

et celles de l'accélération

$$J_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad J_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad J_z = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Les équations du mouvement (1) s'écrivent donc

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Il faut joindre à ces équations l'équation *de continuité* et l'équation *caractéristique*

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho D = \rho_0, \\ \mathcal{F}(p, \rho, \tau) = 0. \end{cases}$$

On a ainsi cinq équations pour déterminer x, y, z, p et ρ en fonction de a, b, c et t.

Dans les équations (4), p et ρ sont supposés exprimés en fonction de x, y, z, t. Si l'on veut mettre en évidence les variables indépendantes de Lagrange a, b, c, t, il suffit de remarquer que p et ρ, étant fonctions de x, y, z, deviennent fonctions de a, b, c par l'intermédiaire de x, y, z qui, d'après (3), sont des fonctions de a, b, c. On a donc, en particulier, pour p,

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial a} = \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial a} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial a}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial b} = \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial b} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial b}, \\ \dfrac{\partial p}{\partial c} = \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial c} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial c}. \end{cases}$$

En multipliant ces équations par $\frac{1}{\rho}$ et remplaçant $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ par leurs expressions tirées des équations du mouvement, on a les trois équations

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial a} = \left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)\dfrac{\partial z}{\partial a}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial b} = \left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial b} + \ldots, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial c} = \left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial c} + \ldots. \end{cases}$$

qui, jointes à l'équation de continuité et à l'équation caractéristique (5), déterminent les cinq fonctions x, y, z, p et ρ des variables indépendantes a, b, c, t.

727. Conditions initiales et conditions aux limites. Discontinuités. — Dans l'intégration, il faudra tenir compte de deux espèces de conditions : les conditions initiales ayant lieu pour $t = 0$, et les conditions aux limites ayant lieu aux limites du fluide, quel que soit t.

1° *Conditions initiales.* — On donne à l'instant $t = 0$ la région R_0 de l'espace occupée par le fluide, la pression et la densité p_0 et ρ_0 en chaque point a, b, c du fluide et les projections des vitesses initiales u_0, v_0, w_0 de chaque élément. Donc pour $t = 0$, $p_0, \rho_0, u_0, v_0, w_0$ sont des fonctions données de a, b, c dans la région R_0.

2° *Conditions aux limites.* — D'autres conditions sont imposées au fluide pendant son mouvement : ce sont les conditions aux limites ou à la surface.

Le cas le plus simple est le cas où le fluide est assujetti à rester dans un espace limité par des surfaces fixes données; c'est le cas d'un gaz ou d'un liquide assujetti à rester dans un vase fixe qu'il remplit entièrement, ou à couler dans un tube fixe dont il touche les parois. Il faudra alors exprimer qu'à un instant quelconque t les éléments fluides qui touchent la surface fixe donnée ont une vitesse *tangente à cette surface.* Soit $\Psi(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface fixe; il faut que l'on ait identiquement, quel que soit t,

$$u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0$$

pour tous les éléments liquides pour lesquels $\Psi(x, y, z)$ est nul.

Plus généralement il pourrait arriver qu'un fluide fût assujetti à rester en contact avec une surface matérielle dont la forme et la position dépendent du temps,

$$\Psi(x, y, z, t) = 0; \tag{8}$$

tel serait le cas d'un fluide contenu dans un vase animé d'un mouvement donné. Il faut alors écrire que l'élément fluide dm de

coordonnées x, y, z, qui, à l'instant t, est sur la surface (8), glisse le long de cette surface, c'est-à-dire que sa position $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ à l'instant $t+dt$ est encore sur la surface ; on a ainsi la condition

$$\Psi(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) = 0.$$

Développant et tenant compte de $\Psi = 0$, on a

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Psi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Psi}{\partial t}dt = 0;$$

mais dx, dy, dz, étant les projections du déplacement de l'élément dm pendant le temps dt, sont égaux respectivement à $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, et la condition devient

$$u\frac{\partial\Psi}{\partial x} + v\frac{\partial\Psi}{\partial y} + w\frac{\partial\Psi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

Quand il s'agit d'un liquide, il peut exister une surface libre : si cette surface libre confine au vide, la pression sur la surface libre devra être *nulle;* si la surface libre est en contact avec l'air regardé comme immobile, la pression sur cette surface est constante et égale à la pression atmosphérique. La surface libre a alors pour équation $p - p_a = 0$, p_a étant constant; en outre, comme les particules qui sont à la surface libre restent en contact avec cette surface pendant le temps dt, on a, sur cette surface, d'après (9)

$$u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Dans certains cas les deux sortes de conditions aux limites existent à la fois pour un liquide : par exemple, un liquide coulant dans un canal fixe à ciel ouvert est assujetti à rester en contact avec des surfaces fixes et en même temps à avoir sa pression constante sur la surface libre.

Il peut arriver que, pour satisfaire à ces diverses conditions aux limites, il faille admettre dans le fluide l'existence de certaines discontinuités du genre de celles que nous avons signalées à la fin du Chapitre précédent.

728. Cas où la densité est fonction de la pression. — Les équations se simplifient quand la densité est fonction de la seule pression

$$\rho = f(p).$$

Ce cas se présenterait en particulier si la température τ restait *constante* en tous les points et pendant toute la durée du mouvement; car, dans cette hypothèse, l'équation caractéristique entre p, ρ et τ deviendrait une relation entre p et ρ.

Il se présente aussi quand chaque élément subit une transformation adiabatique (724).

Supposons donc $\rho = f(p)$ et introduisons, au lieu de la pression, la fonction

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{f(p)},$$

où p_0 est une constante quelconque : P est une fonction uniforme de p définie à une constante près, car la limite inférieure de l'intégrale p_0 est arbitraire.

Comme p est une fonction des coordonnées x, y, z de l'élément dm et du temps t, il en est de même de P, et l'on a évidemment

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Les équations sont alors

$$(10) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{\partial P}{\partial z};$$

on a ainsi, avec l'équation de continuité, quatre équations définissant x, y, z, P en fonction de a, b, c, t.

Les équations sont écrites en regardant P comme une fonction de x, y, z, t; mais x, y, z étant des fonctions de a, b, c, t, P est fonction de a, b, c par l'intermédiaire de x, y, z, et l'on a

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$
$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \ldots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial c} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial c} + \ldots,$$

Remplaçant, dans ces identités, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ par leurs valeurs tirées de (10), on aurait les quatre équations du mouvement sous la forme

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial a} = \left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \dfrac{d^2z}{dt^2}\right)\dfrac{\partial z}{\partial a}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial b} = \left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial b} + \ldots, \\ \dfrac{\partial P}{\partial c} = \left(X - \dfrac{d^2x}{dt^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial c} + \ldots, \\ \rho D - \rho_0 = 0, \end{cases}$$

où les variables indépendantes a, b, c, t sont mises en évidence.

729. Cas où, la densité étant fonction de la pression, il existe en outre une fonction des forces. — Soit, comme dans le numéro précédent, $\rho = f(p)$, mais supposons, en outre, que la force X, Y, Z rapportée à l'unité de masse dérive d'une fonction de forces $U(x, y, z)$ ou, plus généralement, que X, Y, Z soient les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une fonction $U(x, y, z, t)$ pouvant contenir le temps :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

les équations (10) du mouvement peuvent alors être écrites sous une forme encore plus simple, si l'on introduit la fonction de x, y, z, t

$$Q(x, y, z, t) = U - P = U - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Elles deviennent, en effet,

$$(12)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

On peut interpréter ces équations en disant que, dans le cas considéré, *il existe un potentiel des accélérations ou une fonction des accélérations.*

En effet, les équations du mouvement expriment qu'à chaque instant t, dans toute l'étendue du fluide, les projections du vecteur

accélération sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une certaine fonction Q de x, y, z, t.

730. **Cas où il existe un potentiel des vitesses pour une partie de la masse fluide; théorème de Lagrange; démonstration de Cauchy.** — A chaque instant t, les projections u, v, w de la vitesse d'un élément fluide quelconque dm sont déterminées : ce sont donc des fonctions uniformes du temps t et des coordonnées x, y, z de l'élément à l'instant considéré. En supposant u, v, w exprimés de cette façon, on emploie le système des variables d'Euler.

Comme nous l'avons vu au n° 708, on dit qu'il existe, à l'instant t, un potentiel des vitesses pour une certaine portion du fluide, quand, à cet instant, les valeurs de u, v, w relatives à cette portion du fluide sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une fonction φ de x, y, z :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Le champ des vecteurs vitesses W, réduit à la portion de fluide considérée, dérive alors de la fonction φ. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le tourbillon Ω de projections (ξ, η, ζ) soit *nul* à l'instant t en chaque point de cette portion du fluide.

Cette propriété des vitesses peut exister pour une certaine valeur numérique de t, c'est-à-dire à un instant déterminé. Mais peut-elle avoir lieu quel que soit t, c'est-à-dire pendant toute la durée du mouvement? En d'autres termes, un mouvement peut-il être constamment irrotationnel pour tous les éléments d'une certaine partie du fluide? Le théorème suivant, dû à Lagrange, donne un cas très général dans lequel il en est ainsi :

Théorème de Lagrange. — *Supposons que, dans un fluide parfait en mouvement, la force rapportée à l'unité de masse dérive d'une fonction* $U(x, y, z, t)$, *et que la densité soit fonction de la seule pression; alors, si, à un instant déterminé, les vitesses d'une portion du fluide dérivent d'un potentiel, il en est de même à tout autre instant pour cette portion du fluide.*

Pour démontrer ce théorème, il faut montrer que, si le tour-

billon est nul dans une partie de la masse fluide à l'instant initial $t = 0$, il l'est dans cette même partie à un instant quelconque t, et, réciproquement, si le tourbillon est nul dans une partie du fluide à l'instant t, il l'est, dans cette même partie, à l'instant initial.

A l'instant initial, $t = 0$, u, v, w prennent des déterminations u_0, v_0, w_0 qui sont fonctions des coordonnées initiales a, b, c des éléments fluides dans la région $\mathcal{R}_0$; les projections ξ, η, ζ du vecteur tourbillon Ω (n° 710) prennent donc, pour $t = 0$, les valeurs initiales données par les formules

$$(13)\qquad 2\xi_0 = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}, \qquad 2\eta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}, \qquad 2\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}.$$

A l'instant t, l'élément fluide parti du point a, b, c occupe une position x, y, z et possède une rotation moyenne (ou tourbillon) de projections

$$(14)\qquad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Il faut montrer que, si, dans une partie du fluide, ξ_0, η_0, ζ_0 sont nuls, il en est de même de ξ, η, ζ et inversement. C'est ce que Cauchy a établi d'une manière simple en montrant que ξ, η, ζ sont des fonctions linéaires et homogènes de ξ_0, η_0, ζ_0 et inversement.

Démonstration de Cauchy. — D'après les hypothèses faites dans l'énoncé du théorème, on peut, comme nous l'avons vu dans le numéro précédent, écrire les équations du mouvement

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

en posant

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho}.$$

Nous désignerons, pour abréger, par u', v', w' les dérivées $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, et nous écrirons les équations du mouvement

$$(15)\qquad u' = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Dans ces équations, Q est regardé comme fonction de x, y, z, t,

mais x, y, z sont des fonctions de a, b, c, t. On a donc

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

ou, d'après (15),

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = u'\frac{\partial x}{\partial a} + v'\frac{\partial y}{\partial a} + w'\frac{\partial z}{\partial a};$$

on trouve de même

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = u'\frac{\partial x}{\partial b} + v'\frac{\partial y}{\partial b} + w'\frac{\partial z}{\partial b}.$$

Éliminant Q entre ces deux relations à l'aide de la relation

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial Q}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right) = 0,$$

on a l'équation

$$(16)\quad \frac{\partial u'}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u'}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v'}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v'}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w'}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w'}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} = 0.$$

Si maintenant on remarque que, d'après les théorèmes élémentaires sur l'interversion des dérivations partielles, on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right) = \frac{\partial u'}{\partial a}, \quad \ldots, \quad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right) = \frac{\partial u}{\partial a}, \quad \ldots,$$

on reconnaît sans peine que le premier membre de (16) est la dérivée partielle, par rapport à t, de la quantité

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Cette quantité, ayant sa dérivée par rapport à t nulle, est donc indépendante du temps t : elle est égale, pendant toute la durée du mouvement, à sa valeur initiale; or, à l'époque $t = 0$, on a

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad x = a, \quad y = b, \quad z = c$$

et, par suite, toujours pour $t = 0$,

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1, \quad \ldots;$$

la valeur initiale de la quantité considérée est donc

$$\frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}.$$

On en conclut l'équation

$$(17)\quad \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b},$$

et deux équations analogues obtenues en permutant a, b, c et u_0, v_0, w_0. Nous écrirons ces trois équations en introduisant la notation des tourbillons (13) : nous aurons ainsi

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b} - \dfrac{\partial u}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial v}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b} - \dfrac{\partial v}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial a} + \dfrac{\partial w}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial b} - \dfrac{\partial w}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial a} = 2\zeta_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial c} - \dfrac{\partial u}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \dfrac{\partial v}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial c} - \dfrac{\partial v}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial b} + \dfrac{\partial w}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c} - \dfrac{\partial w}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial b} = 2\xi_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial a} - \dfrac{\partial u}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \dfrac{\partial v}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial a} - \dfrac{\partial v}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial c} + \dfrac{\partial w}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial a} - \dfrac{\partial w}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial c} = 2\eta_0. \end{cases}$$

Introduisons maintenant dans les premiers membres de ces équations les dérivées partielles de u, v, w par rapport à x, y, z. Pour cela, il suffit de remarquer que, à l'instant t, la vitesse de l'élément dm qui est au point x, y, z est bien déterminée : les projections u, v, w de cette vitesse sont donc des fonctions de x, y, z; d'autre part, on peut regarder ces projections comme fonctions de a, b, c par l'intermédiaire de x, y, z, qui sont fonctions de a, b, c : on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$
$$\frac{\partial u}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial b};$$

en portant dans la première des formules (18), on voit que le premier terme de cette formule devient

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\right) + \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right).$$

On calcule de même les deux autres termes dans la première formule (18), en permutant x, y, z et u, v, w,

$$\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right) + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right),$$
$$\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right) + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\right).$$

Ajoutant ces trois quantités pour les égaler à $2\zeta_0$, d'après la pre-

mière formule (18), on a

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial a}-\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right) \\ +\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial a}-\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial b}\right) \\ +\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial a}-\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)=2\zeta_0. \end{array}\right.$$

On transformerait de même la deuxième et la troisième des équations (18), et l'on obtiendrait ainsi les trois équations suivantes, dans lesquelles nous remplaçons les quantités $\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}$, ... par 2ξ, 2η, 2ζ,

$$(20)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi\left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial a}-\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right)+\eta\left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial a}-\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial b}\right)+\zeta\left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial a}-\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right)=\zeta_0, \\ \xi\left(\dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial b}-\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial c}\right)+\eta\left(\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial b}-\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c}\right)+\zeta\left(\dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial b}-\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial c}\right)=\xi_0, \\ \xi\left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\dfrac{\partial y}{\partial c}-\dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial a}\right)+\eta\left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial c}-\dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial a}\right)+\zeta\left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial x}{\partial c}-\dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial a}\right)=\eta_0. \end{array}\right.$$

On obtient des formules équivalentes plus simples en résolvant ces trois équations du premier degré par rapport à ξ, η, ζ. Pour avoir ξ, on multipliera la première de ces équations par $\frac{\partial x}{\partial c}$, la deuxième par $\frac{\partial x}{\partial a}$, la troisième par $\frac{\partial x}{\partial b}$ et l'on ajoutera. Le coefficient de ξ dans la somme est alors le développement du déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

par rapport aux éléments de la première ligne : les coefficients de η et ζ sont nuls, comme on le vérifie immédiatement. On a donc

$$(21)\qquad D\xi=\xi_0\frac{\partial x}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial x}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial x}{\partial c};$$

on trouve de même, en multipliant les équations (20) par $\frac{\partial y}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$,

$\frac{\partial y}{\partial b}$ et ajoutant, puis par $\frac{\partial z}{\partial c}$, $\frac{\partial z}{\partial a}$, $\frac{\partial z}{\partial b}$ et ajoutant, les deux autres relations

$$(21') \qquad \begin{cases} D\eta = \xi_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial y}{\partial c}, \\ D\zeta = \xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c}. \end{cases}$$

D'après l'équation de continuité, le déterminant D n'est pas nul, il est égal à $\frac{\rho_0}{\rho}$; dans le cas où le fluide est un liquide incompressible à température constante, $D = 1$.

Ces équations de Cauchy rendent maintenant le théorème de Lagrange évident. En effet, si à l'instant $t = 0$, pour un élément fluide déterminé, le tourbillon $\Omega_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ est nul, les équations (21) et (21') montrent que, pour ce même élément, le tourbillon $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ est nul à un instant postérieur quelconque t. Inversement, d'après les formules (20), si Ω est nul, Ω_0 l'est. Le théorème de Lagrange est donc démontré.

Les relations établies par Cauchy sont d'une importance capitale : elles montrent que le *tourbillon* est un élément cinématique qui est *indestructible* par les forces de la nature, par les forces conservatives qui agissent sur le fluide, aussi bien que par les pressions de celui-ci. Si la rotation d'un élément n'existe pas, elle ne naîtra pas et, si elle est née, elle subsistera. Elle ne peut naître ou s'éteindre que par l'action du frottement ou de forces non conservatives (1).

Le théorème de Lagrange s'applique en particulier d'une manière simple, quand le liquide en mouvement *part du repos*. Alors on a en tous les points a, b, c du liquide dans sa position initiale

$$u_0 = 0, \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = 0;$$

par suite, le tourbillon initial est nul en chaque point

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 = 0, \qquad \zeta_0 = 0.$$

Donc, à un instant quelconque du mouvement, les projections

(1) MAURICE LÉVY, *L'hydrodynamique moderne, etc.* (*Revue des Sciences*, p. 724; 1890).

ξ, η, ζ du tourbillon sont nulles, et les vitesses dérivent d'un potentiel.

731. Interprétation des équations de Cauchy. Généralisation du théorème de Lagrange. Équations de Weber. — Les équations de Cauchy ont évidemment une portée plus générale que la conclusion spéciale que nous en avons tirée. Nous y reviendrons à propos de la théorie des tourbillons. On peut les interpréter de la façon suivante :

Considérons l'expression différentielle

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc), \tag{22}$$

où t est regardé comme une constante, et x, y, z comme des fonctions de a, b, c, t correspondant au mouvement du fluide. Les équations de Cauchy telles que (18) signifient que, *pour chaque valeur de t, l'expression* (22) *est une différentielle totale exacte.*

En effet, t étant regardé comme une constante, on a

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial a}\,da + \frac{\partial x}{\partial b}\,db + \frac{\partial x}{\partial c}\,dc, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial a}\,da + \frac{\partial y}{\partial b}\,db + \frac{\partial y}{\partial c}\,dc, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial a}\,da + \frac{\partial z}{\partial b}\,db + \frac{\partial z}{\partial c}\,dc. \end{aligned}$$

L'expression (22) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \left(u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} - u_0\right)da + \left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} - v_0\right)db \\ + \left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0\right)dc, \end{aligned}$$

expression de la forme

$$\mathrm{A}\,da + \mathrm{B}\,db + \mathrm{C}\,dc;$$

et les relations telles que (18) signifient, comme on le verra immédiatement,

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial a} = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial b}, \qquad \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial b} = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial c}, \qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial c} = \frac{\partial \mathrm{C}}{\partial a};$$

la quantité considérée est donc bien une différentielle exacte d'une

fonction

$$F(a, b, c, t)$$

et l'on a, pendant tout le mouvement,

$$(23)\qquad \begin{cases} u\dfrac{\partial x}{\partial a} + v\dfrac{\partial y}{\partial a} + w\dfrac{\partial z}{\partial a} - u_0 = \dfrac{\partial F}{\partial a}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial b} + v\dfrac{\partial y}{\partial b} + w\dfrac{\partial z}{\partial b} - v_0 = \dfrac{\partial F}{\partial b}, \\ u\dfrac{\partial x}{\partial c} + v\dfrac{\partial y}{\partial c} + w\dfrac{\partial z}{\partial e} - w_0 = \dfrac{\partial F}{\partial c}, \end{cases}$$

équations que l'on peut résumer dans l'équation unique

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = dF.$$

D'après ces équations (23), les trois dérivées $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$ s'annulent pour $t = 0$, car u, v, w prennent alors les valeurs u_0, v_0, w_0 et x, y, z les valeurs a, b, c. Donc pour $t = 0$, F se réduit à une constante indépendante de a, b, c.

Dans cette manière d'interpréter le calcul de Cauchy, le théorème de Lagrange sur le potentiel des vitesses devient évident : *si*

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc$$

est une différentielle totale exacte d'une fonction $\varphi_0(a, b, c)$,

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

est également une différentielle exacte à chaque instant t. On a en effet

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + dF;$$

si donc

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = d\varphi_0,$$

on a

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d(\varphi_0 + F),$$

et le théorème de Lagrange est démontré.

Différentions la première des équations (23) par rapport à t en remarquant que $\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial a}$, $\cdots$; il vient

$$\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial a} + u\frac{\partial u}{\partial a} + v\frac{\partial v}{\partial a} + w\frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{dF}{dt}.$$

Mais, d'après les équations du mouvement (12), l'ensemble des trois premiers termes s'écrit

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

ce qui est identique à $\frac{\partial Q}{\partial a}$. On a donc

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[Q+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{dF}{dt}\right]=0.$$

On trouverait de même

$$\frac{\partial}{\partial b}\left[Q+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{dF}{dt}\right]=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\left[Q+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{dF}{dt}\right]=0.$$

La fonction entre crochets est donc indépendante de a, b, c et ne dépend plus que de t. D'où

$$Q+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)-\frac{dF}{dt}=\chi(t).$$

Comme jusqu'ici la fonction F a simplement été définie par la condition que ses dérivées partielles par rapport à a, b, c aient des valeurs données, elle n'est déterminée qu'à une fonction de t près et l'on peut faire rentrer $\int\chi(t)\,dt$ dans F en remplaçant F par $F+\int\chi(t)\,dt$; on a donc enfin

$$Q+\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)=\frac{dF(a,b,c,t)}{dt}, \tag{24}$$

où la fonction F est maintenant complètement déterminée à une constante additive près. On peut convenir de déterminer cette constante de façon que F s'annule avec t, car, pour $t=0$, F est indépendant de a, b, c.

Les équations (23) et (24) ont été données par Weber dans le Tome 68 du *Journal de Crelle* en 1868; avec l'équation de continuité et l'équation $\rho=f(p)$, elles forment un système de six équations du premier ordre déterminant x, y, z, ρ, p, F en fonction de a, b, c, t. Dans ces équations, il faut imaginer u, v, w remplacés par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

732. Propagation d'une discontinuité du deuxième ordre dans un gaz; vitesse du son; théorème de Hugoniot. — Supposons que, dans un fluide au repos, ayant en chaque point une densité ρ_0 et une pression p_0, on produise un ébranlement initial donnant naissance à une discontinuité du second ordre limitée par une surface. Supposons de plus que cette discontinuité se propage en continuant à affecter la forme d'une surface S, comme nous l'avons expliqué dans le dernier paragraphe du précédent Chapitre. C'est ce qui a lieu pour la propagation d'une onde sonore dans un gaz : en effet, dans ce cas, l'onde affecte la forme d'une surface S et, d'un côté à l'autre de cette surface, les dérivées secondes des coordonnées x, y, z d'un élément et particulièrement l'accélération d'un élément subissent des variations brusques.

Il est très remarquable, comme l'a montré Hugoniot (*Comptes rendus,* t. CI) que l'on puisse calculer la vitesse de propagation G de cette onde, en chaque point, à chaque instant, sans intégration, en employant simplement les conditions de compatibilité précédemment indiquées.

Les équations du mouvement sont de la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{du}{dt},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Les forces X, Y, Z sont supposées quelconques, mais finies et continues en tous les points du fluide, comme, par exemple, la pesanteur. Nous supposons en outre qu'il y ait une relation entre la pression p et la densité ρ, relation que nous écrirons

$$p = \Psi(\rho).$$

On a alors

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \Psi'(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}, \qquad \dots,$$

et les trois équations du mouvement peuvent s'écrire

$$\text{(A)} \qquad \Psi'(\rho)\frac{\partial \mathrm{L}\rho}{\partial x} = X - \frac{du}{dt},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où $\mathrm{L}\rho$ est le logarithme népérien de ρ.

Ceci posé, désignons, comme plus haut, par $\delta\varphi$ la différence des

valeurs que prend une fonction quelconque φ de part et d'autre de la surface de discontinuité. La densité ρ est continue à travers cette surface : donc sur la surface elle est égale à ρ_0, puisque, au moment où l'onde arrive dans une certaine position, la partie du fluide située du côté de la surface de discontinuité non encore atteint par l'onde est au repos dans l'état d'équilibre considéré au début. Les quantités X, Y, Z sont également continues, mais $\frac{\partial L\rho}{\partial x}$ et $\frac{du}{dt}$ sont discontinues à travers S.

L'équation du mouvement (A) donne donc, si l'on égale les variations des deux membres, d'une face à l'autre de la discontinuité,

$$\Psi'(\rho)\,\delta\frac{\partial L\rho}{\partial x} = -\,\delta\frac{du}{dt}, \qquad (B)$$

.....,

car $\delta X = 0$.

On peut toujours imaginer que l'instant actuel soit l'instant initial; on a alors $x = a$, $y = b$, $z = c$, ... et, d'après les résultats du n° 719,

$$\delta\frac{\partial L\rho}{\partial x} = \delta\frac{\partial L\rho}{\partial a} = -\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c}\right),$$

$F(a, b, c, t) = 0$ étant l'équation de la surface de discontinuité. D'autre part, on a, d'après les conclusions du n° 718,

$$\delta\frac{du}{dt} = \lambda_2 = \lambda_1 G = \lambda G^2,$$

G désignant la vitesse de propagation de l'onde.

L'équation (B) donne donc, puisque $\rho = \rho_0$ sur la surface,

$$\Psi'(\rho_0)\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c}\right) = \lambda G^2. \qquad (C)$$

On a, de même, en prenant les deux autres équations du mouvement,

$$\begin{cases} \Psi'(\rho_0)\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b}\left(\dfrac{\lambda}{h}\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b} + \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}\right) = \mu G^2, \\ \Psi'(\rho_0)\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}\left(\dfrac{\lambda}{h}\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\mu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial b} + \dfrac{\nu}{h}\dfrac{\partial F}{\partial c}\right) = \nu G^2. \end{cases} \qquad (C)$$

Ajoutons ces trois équations, après avoir multiplié la première par $\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial a}$, la deuxième par $\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial b}$, la troisième par $\frac{1}{h}\frac{\partial F}{\partial c}$. Comme la somme des carrés de ces trois multiplicateurs est égale à 1, puisque ce sont les cosinus directeurs de la normale à la surface de discontinuité, on obtient la relation

$$[\Psi'(\rho_0) - G^2]\left(\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\mu}{h}\frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\nu}{h}\frac{\partial F}{\partial c}\right) = 0.$$

L'un des deux facteurs de ce produit doit être nul. En égalant le deuxième facteur $\frac{\lambda}{h}\frac{\partial F}{\partial a} + \ldots$ à zéro, on exprime que la discontinuité est *transversale;* mais une discontinuité de ce genre ne peut pas se propager dans un gaz, car les équations (C) donnent alors G = 0. C'est donc le premier facteur qui est nul, et l'on a

$$G^2 = \Psi'(\rho_0) = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0,$$

d'où, pour la vitesse de propagation,

$$G = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}.$$

Comme le remarque M. Hadamard (*Bulletin de la Société mathématique,* 1901) le signe de G, c'est-à-dire le sens de la propagation, est défini par la connaissance des deux vecteurs λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 dont le quotient est G.

La discontinuité est *longitudinale,* car les équations (C) montrent que λ, μ, ν sont proportionnels aux cosinus directeurs de la normale à la surface de l'onde.

Cas d'un gaz parfait. — Dans le cas où la conductibilité du gaz pour la chaleur peut être négligée, la transformation subie par chaque élément du gaz est *adiabatique :* si donc le fluide est un gaz parfait, la relation entre p et ρ est (n° 724)

$$p = k\rho^\gamma,$$

où k est une constante et γ le rapport des deux chaleurs spécifiques sous pression constante et sous volume constant. On a alors

$$\frac{dp}{d\rho} = k\gamma\rho^{\gamma-1} = \gamma\frac{p}{\rho};$$

d'où, pour la vitesse du son,

$$G = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}.$$

Cette formule, qui attribue à la vitesse du son dans l'air une valeur théorique exactement égale à celle que donne l'expérience, a été obtenue par Poisson en 1808 par une méthode qui consiste à intégrer les équations de l'hydrodynamique dans un cas particulier, en ayant égard, suivant une remarque antérieurement faite par Laplace, *au développement de chaleur qui accompagne la compression de l'air*.

Newton, qui avait abordé le premier, suivant une analyse d'ailleurs obscure et défectueuse, le problème de la vitesse du son, ayant implicitement supposé que la détente était isothermique et non adiabatique, c'est-à-dire s'effectuait suivant la loi de Mariotte $p = k\rho$, avait trouvé la valeur $G = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$ qui est, dans l'air, beaucoup trop faible (¹).

733. Équations du mouvement dans un système quelconque de coordonnées. — L'artifice de calcul qui permet de passer des équations du mouvement d'un point en coordonnées cartésiennes aux équations du mouvement en coordonnées quelconques (*Équations de Lagrange pour un point libre*, t. I) s'applique identiquement à la transformation des équations (4).

Supposons qu'au lieu de définir la position d'un point par ses coordonnées cartésiennes x, y, z on la définisse dans un système quelconque de coordonnées q_1, q_2, q_3 liées à x, y, z par des formules

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3), \qquad y = \psi(q_1, q_2, q_3), \qquad z = \varpi(q_1, q_2, q_3);$$

il s'agit d'écrire les équations du mouvement dans le nouveau système de coordonnées. La méthode que nous suivrons s'applique même au cas où les coordonnées cartésiennes seraient des fonctions données, non seulement de trois nouvelles coordonnées q_1, q_2, q_3, mais aussi du temps : cela revient, au point de vue géo-

(¹) SARRAU, *Cours de l'École Polytechnique*, 1re division, 1899-1900, p. 137.

métrique, à dire qu'elle s'applique même si le nouveau système de coordonnées est mobile et animé d'un mouvement connu.

Nous supposerons donc, pour traiter le cas le plus général, que x, y, z soient des fonctions données de q_1, q_2, q_3 et de t :

$$(25)\quad x=\varphi(q_1,q_2,q_3,t),\qquad y=\psi(q_1,q_2,q_3,t),\qquad z=\varpi(q_1,q_2,q_3,t).$$

Reprenons les équations du mouvement (4) sous la forme

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\ \dfrac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z}-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}; \end{cases}$$

dans ces équations, x, y, z sont des fonctions de a, b, c, t qui se réduisent à a, b, c, pour $t=0$; d'après les formules (25), on voit que q_1, q_2, q_3 sont de même des fonctions de t et de a, b, c; mais en appelant q_1^0, q_2^0, q_3^0 les valeurs des coordonnées d'une particule à l'instant $t=0$, on a, d'après les formules (25),

$$\begin{aligned} a&=\varphi(q_1^0,q_2^0,q_3^0,0),\\ b&=\psi(q_1^0,q_2^0,q_3^0,0),\\ c&=\varpi(q_1^0,q_2^0,q_3^0,0); \end{aligned}$$

on pourra donc aussi regarder q_1, q_2, q_3 comme fonctions de t et de q_1^0, q_2^0, q_3^0.

Cela posé, reproduisons textuellement le calcul employé dans le premier Volume pour obtenir les équations de Lagrange : multiplions les équations (26) respectivement par $\dfrac{\partial x}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial y}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial q_1}$ et ajoutons. Nous aurons

$$(27)\quad x''\frac{\partial x}{\partial q_1}+y''\frac{\partial y}{\partial q_1}+z''\frac{\partial z}{\partial q_1}=\mathrm{Q}_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_1},$$

en désignant par x'', y'', z'' les dérivées secondes de x, y, z, par rapport au temps dans le mouvement, par Q_1 la quantité

$$\mathrm{X}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\mathrm{Y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial q_1},$$

et en remarquant que l'on a

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q_1}=\frac{\partial p}{\partial q_1},$$

On peut écrire l'équation (27)

$$(28)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(x'\dfrac{\partial x}{\partial q_1}+y'\dfrac{\partial y}{\partial q_1}+z'\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)\\ \quad-\left(x'\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial x}{\partial q_1}+y'\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial y}{\partial q_1}+z'\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)\\ \quad=\mathrm{Q}_1-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial q_1}.\end{array}\right.$$

Or x', dérivée première par rapport au temps, peut, d'après (25), s'écrire

$$x'=\frac{\partial x}{\partial q_1}q_1'+\frac{\partial x}{\partial q_2}q_2'+\frac{\partial x}{\partial q_3}q_3'+\frac{\partial x}{\partial t}.$$

On en conclut

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{\partial x'}{\partial q_1'},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_1}=\frac{\partial x'}{\partial q_1},$$

et deux formules analogues pour y et z. Posons alors

$$\mathrm{T}=\tfrac{1}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=\tfrac{1}{2}(u^2+v^2+w^2);$$

l'équation du mouvement (28) devient

$$(29)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1'}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1}=\mathrm{Q}_1-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_1};$$

on obtiendra de même deux autres équations

$$(29')\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2'}\right)-\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2}=\mathrm{Q}_2-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial q_2},\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_3'}\right)-\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_3}=\mathrm{Q}_3-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial q_3}.\end{array}\right.$$

Ces trois équations remplacent les trois équations (26).

Les quantités Q_1, Q_2, Q_3 s'obtiennent comme nous l'avons vu dans le premier Volume. Pour avoir Q_1, imaginons le déplacement virtuel δx, δy, δz déduit des formules (25) en y supposant q_2, q_3 et t constants et faisant varier q_1 de δq_1; pour ce déplacement, le travail de la force X, Y, Z est

$$\mathrm{X}\,\delta x+\mathrm{Y}\,\delta y+\mathrm{Z}\,\delta z=\mathrm{Q}_1\,\delta q_1.$$

On a de même Q_2 et Q_3.

Dans le cas où les forces X, Y, Z dérivent d'une fonction $U(x, y, z, t)$ pouvant contenir t, on a

$$(30)\qquad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial q_1} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial q_1} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial q_1} = \dfrac{\partial U}{\partial q_1}, \\ Q_2 = \dfrac{\partial U}{\partial q_2}, \qquad Q_3 = \dfrac{\partial U}{\partial q_3}. \end{cases}$$

Comme application, il serait facile d'écrire les équations du mouvement d'un fluide en coordonnées polaires dans l'espace : il suffirait de reprendre les calculs faits dans le premier Volume pour obtenir, à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'un point en coordonnées polaires dans l'espace.

Les équations (29) du second ordre en q_1, q_2, q_3 contribuent à définir ces paramètres ainsi que p et ρ en fonction de t et de q_1^0, q_2^0, q_3^0.

Équation de continuité analogue à celle de Lagrange. — Il faut joindre à ces équations, l'équation de continuité écrite dans le nouveau système de coordonnées. C'est ce qu'il est facile de faire en s'appuyant sur les propriétés des déterminants fonctionnels. Employons la notation classique

$$\frac{D(f, \varphi, \psi)}{D(x, y, z)},$$

pour désigner le déterminant fonctionnel de f, φ, ψ regardés comme fonctions de x, y, z.

Dans le calcul précédent, x, y, z peuvent être regardés comme des fonctions de q_1, q_2, q_3 et de t; q_1, q_2, q_3 comme des fonctions de q_1^0, q_2^0, q_3^0 et de t; enfin q_1^0, q_2^0, q_3^0 comme des fonctions de a, b, c. On a alors, pour le déterminant appelé D,

$$(31)\qquad D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)}\,\frac{D(q_1, q_2, q_3)}{D(q_1^0, q_2^0, q_3^0)}\,\frac{D(q_1^0, q_2^0, q_3^0)}{D(a, b, c)}.$$

Comme le dernier des trois déterminants ci-dessus est constant, l'équation de continuité qui consiste à écrire que ρD est constant pour une même particule fluide, revient à écrire que

$$(32)\qquad \rho\,\frac{D(x, y, z)}{D(q_1, q_2, q_3)}\,\frac{D(q_1, q_2, q_3)}{D(q_1^0, q_2^0, q_3^0)}$$

est *constant* pour une même particule fluide.

Par exemple, en coordonnées polaires dans l'espace r, θ, ω

$$(33)\qquad x = r\sin\theta\cos\omega, \qquad y = r\sin\theta\sin\omega, \qquad z = r\cos\theta,$$

on a

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \omega)} = r^2 \sin\theta.$$

On aura donc pour l'équation de continuité

$$\rho r^2 \sin\theta \frac{D(r, \theta, \omega)}{D(r_0, \theta_0, \omega_0)} = \text{const.}; \tag{34}$$

à l'instant initial ρ, r, θ, ω deviennent ρ_0, r_0, θ_0, ω_0; la constante est donc $\rho_0 r_0^2 \sin\theta_0$.

III. — VARIABLES D'EULER.

734. Équations du mouvement. — En appelant u, v, w les projections de la vitesse de l'élément fluide qui, à l'instant t, passe au point géométrique x, y, z, nous avons vu (n° 696) que les projections de l'accélération J de cet élément sont

$$J_x = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

.....

Les équations générales du mouvement des fluides parfaits (n° 723) deviennent donc dans ce système :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= X - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= Y - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= Z - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Ces équations, jointes à l'équation de continuité (n° 699)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{36}$$

et à l'équation caractéristique

$$\mathcal{F}(p, \rho, \tau) = 0, \tag{37}$$

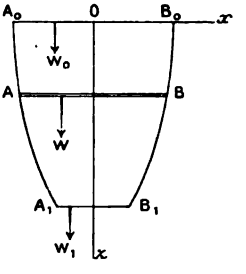
forment un système de cinq équations contribuant à définir u, v, w, p et ρ en fonction des variables indépendantes x, y, z, t. Les conditions initiales et les conditions aux limites s'expriment comme nous l'avons vu plus haut (n° 727).

735. **Exercice.** — *Mouvement d'un liquide pesant s'écoulant par le fond d'un vase de révolution d'axe vertical; hypothèse du mouvement par tranches parallèles.* — Soit un vase de révolution autour de la verticale descendante Oz : ce vase est plein d'un liquide pesant immobile jusqu'au niveau Ox : nous prendrons ce niveau pour plan des xy, l'axe Oz étant dirigé vers le bas. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on débouche une large ouverture circulaire horizontale $A_1 B_1$ dans le fond du vase et imaginons que le vase soit alimenté de façon que le niveau reste horizontal et constant. On demande de trouver le mouvement du liquide.

Nous donnerons une solution approchée de ce problème, fondée sur l'hypothèse du mouvement par tranches parallèles (1).

Le mouvement étant évidemment symétrique autour de Oz, la vitesse W d'un élément peut être décomposée en deux composantes, l'une w parallèle à Oz, l'autre s dirigée suivant le rayon perpendiculaire à Oz. Nous admettrons que la forme du vase est telle que s soit négligeable par rapport à w; cette hypothèse exige que les parois du vase soient peu inclinées sur la verticale, puisque, sur la paroi, la vitesse W doit être tangente à la paroi.

Fig. 328.



Nous supposerons donc s nul et nous admettrons de plus que, en tous les points d'une même section S perpendiculaire à l'axe, toutes les vitesses w sont les mêmes. D'après cela, w est une fonction de z et t. Pour $z = 0$, w prend une valeur w_0 qui est la vitesse des points de la surface libre $A_0 B_0$ et, pour une certaine valeur $z = h$ égale à la profondeur du vase, w prend une valeur w_1 qui est la vitesse des points de la tranche $A_1 B_1$ constituant l'ouverture, c'est-à-dire la vitesse d'écoulement. Appelons S_0, S et S_1 les aires des sections $A_0 B_0$, AB et $A_1 B_1$: S_0 et S_1 sont constants, S est fonction de z (*fig.* 328).

Actuellement l'équation de continuité est remplacée par cette condition que le volume liquide qui, dans le temps dt, traverse une section droite

(1) Voir : *Hydromechanics* de Besant, et *Elementary Treatise on Hydrodynamics* de Basset.

quelconque AB est le même pour toutes les sections : on a donc

$$S_0 w_0 = S w = S_1 w_1. \tag{38}$$

D'après nos hypothèses, u, v sont nuls, w est une fonction de z et t : la seule force appliquée est la pesanteur, $X = Y = 0$, $Z = g$. Sur les trois équations d'Euler (35), les deux premières montrent que $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ sont nuls; p est donc fonction de z et t seulement; la troisième donne

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{\partial w}{\partial t} - w\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{39}$$

D'après les conditions (38) on a

$$w = \frac{S_0}{S} w_0,$$

où S est fonction de z seul et w_0 de t seul : donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{S_0}{S}\frac{dw_0}{dt}.$$

L'équation (39) est alors

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = g - \frac{S_0}{S}\frac{dw_0}{dt} - w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Donnons à t une valeur constante, multiplions par dz et intégrons; nous avons

$$\frac{1}{\rho}p = gz - S_0\frac{dw_0}{dt}\int_0^z \frac{dz}{S} - \frac{1}{2}w^2 + F(t),$$

où $F(t)$ désigne la constante d'intégration qui peut dépendre de t.

Pour $z = 0$, la pression p est la pression atmosphérique Π et la vitesse w la vitesse w_0 à la surface libre : donc

$$\frac{1}{\rho}\Pi = -\frac{1}{2}w_0^2 + F(t).$$

De même pour $z = h$, la pression p à l'orifice d'écoulement est sensiblement égale à la pression atmosphérique Π, et w à w_1 :

$$\frac{1}{\rho}\Pi = gh - S_0\frac{dw_0}{dt}\int_0^h \frac{dz}{S} - \frac{1}{2}w_1^2 + F(t).$$

Retranchons ces deux relations membre à membre, en désignant par a

l'intégrale $\int_0^h \frac{dz}{S}$ qui dépend de la forme du vase : nous aurons

$$a S_0 \frac{dw_0}{dt} = gh + \frac{1}{2}(w_0^2 - w_1^2),$$

c'est-à-dire d'après (38)

$$a S_0 \frac{dw_0}{dt} = gh + \frac{1}{2} w_0^2 \left(1 - \frac{S_0^2}{S_1^2}\right).$$

Comme S_0 est, par la nature même de la question, supérieur à S_1, le coefficient de w_0^2 est négatif, et l'on peut écrire

$$\frac{dw_0}{dt} = k(\lambda^2 - w_0^2),$$

en posant

$$k = \frac{1}{2aS_0}\left(\frac{S_0^2}{S_1^2} - 1\right), \qquad \lambda^2 = \frac{gh}{aS_0 k}.$$

On en déduit

$$k\,dt = \frac{1}{2\lambda}\left[\frac{dw_0}{\lambda - w_0} + \frac{dw_0}{\lambda + w_0}\right].$$

D'où, en intégrant et remarquant que, pour $t = 0$, $w_0 = 0$, car le liquide part du repos

$$2\lambda k t = \operatorname{Log}\frac{\lambda + w_0}{\lambda - w_0},$$

$$w_0 = \lambda \frac{e^{\lambda k t} - e^{-\lambda k t}}{e^{\lambda k t} + e^{-\lambda k t}}.$$

La vitesse d'une tranche quelconque w et la vitesse d'écoulement w_1 sont ensuite données par les relations (38).

Quand t augmente indéfiniment, w_0 tend vers la limite λ; w et w_1 tendent vers les limites $\lambda \frac{S_0}{S}$, $\lambda \frac{S_0}{S_1}$. Le mouvement tend donc vers un état permanent. La limite de la vitesse d'écoulement est, d'après les valeurs de λ et k,

$$\lim w_1 = \lambda \frac{S_0}{S_1} = S_0 \sqrt{\frac{2gh}{S_0^2 - S_1^2}}.$$

Dans le cas particulier où S_1 est petit par rapport à S_0, cette limite est voisine de $\sqrt{2gh}$.

Nous retrouverons ce résultat directement dans l'étude du mouvement permanent (n° 744).

736. Autre forme des équations du mouvement. — On peut écrire autrement les équations du mouvement (35) en faisant apparaître les composantes ξ, η, ζ du vecteur tourbillon au point (x, y, z) à l'instant t.

Pour cela remarquons que, W^2 désignant le carré de la vitesse d'un élément

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

on a identiquement

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right) = u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}$$

et, par suite,

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right) = v\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

d'où, d'après la notation employée pour les tourbillons (n° 706),

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right) + 2(\eta w - \zeta v).$$

Transformant de même les quantités analogues qui figurent dans les équations du mouvement (35), on voit que ces équations peuvent s'écrire

$$(40)\qquad \begin{cases} \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2\right) - 2(\eta w - \zeta v) - \frac{\partial u}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}W^2\right) - 2(\zeta u - \xi w) - \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}W^2\right) - 2(\xi v - \eta u) - \frac{\partial w}{\partial t}. \end{cases}$$

737. Cas où ρ étant fonction de p les forces dérivent d'un potentiel. — Nous avons déjà étudié ce cas avec les variables de Lagrange (n° 730) et nous avons, pour ce cas, démontré le théorème de Lagrange d'après Cauchy. Avec les variables d'Euler, on peut retrouver les mêmes résultats comme il suit :

Supposons que $\rho = f(p)$ et posons, comme plus haut,

$$P = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho};$$

supposons, en outre, que l'on ait

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

U étant fonction de x, y, z, t. Les équations (40) pourront

s'écrire

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + 2(\zeta u - \xi w) = -\dfrac{\partial H}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + 2(\xi v - \eta u) = -\dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{cases}$$

où H désigne la quantité

$$(42)\qquad H = \tfrac{1}{2}W^2 + P - U = \tfrac{1}{2}W^2 - Q,$$

en désignant, comme plus haut (n° 730), par Q la différence U — P.

Équations de Helmholtz. — En éliminant la fonction H entre ces équations, nous obtiendrons trois relations, équivalentes à celles que, d'après Cauchy, nous avons déduites de l'élimination de Q entre les équations (15) du n° 730.

Écrivons, par exemple,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0.$$

Nous aurons

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z} + 2\frac{\partial}{\partial y}(\xi v - \eta u) - 2\frac{\partial}{\partial z}(\zeta u - \xi w) = 0.$$

D'après la valeur de ξ, l'ensemble des deux premiers termes est égal à $2\frac{\partial \xi}{\partial t}$; on a donc, en développant,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} + \xi\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \eta\frac{\partial u}{\partial y} - \zeta\frac{\partial u}{\partial z} - u\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) = 0.$$

Mais on a identiquement

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

et, d'après l'équation de continuité,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Remplaçons alors, dans l'équation ci-dessus, $\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ par $-\frac{\partial \xi}{\partial x}$

et $\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ par $-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, elle devient

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\xi}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z};$$

les quatre premiers termes forment la dérivée de ξ par rapport au temps, prise en suivant l'élément fluide dans son mouvement, c'est-à-dire $\frac{d\xi}{dt}$: on a donc

$$\frac{d\xi}{dt} - \frac{\xi}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{43}$$

On aurait, par un calcul analogue, les deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\eta}{\rho}\right) = \dfrac{\xi}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\eta}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\zeta}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\zeta}{\rho}\right) = \dfrac{\xi}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\eta}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\zeta}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \tag{43'}$$

Ces équations ont été employées par Helmholtz pour démontrer d'importants théorèmes relatifs aux tourbillons, sur lesquels nous reviendrons plus tard.

Nous allons montrer comment on en déduit facilement le théorème de Lagrange.

Démonstration du théorème de Lagrange déduite des équations de Helmholtz. — Si l'on suit une particule dans son mouvement, les coordonnées x, y, z de cette particule sont des fonctions du temps, ainsi que u, v, w, ξ, η, ζ et ρ. On peut alors regarder les équations (43) et (43′) comme un système de trois équations différentielles linéaires et homogènes définissant $\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}, \frac{\zeta}{\rho}$ en fonction du temps, les coefficients de ces équations $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \cdots$ etc., étant des fonctions du temps. L'intégration de ces équations fournira pour $\frac{\xi}{\rho}, \frac{\eta}{\rho}, \frac{\zeta}{\rho}$ des fonctions de t dépendant d'une façon linéaire et homogène de trois constantes arbitraires

qui seront, par exemple, les valeurs $\frac{\xi_0}{\rho_0}$, $\frac{\eta_0}{\rho_0}$, $\frac{\zeta_0}{\rho_0}$ des trois fonctions à l'instant initial. On aura ainsi des expressions de la forme

$$(44)\qquad \begin{cases} \dfrac{\xi}{\rho} = \dfrac{\xi_0}{\rho_0} f_1(t) + \dfrac{\eta_0}{\rho_0} f_2(t) + \dfrac{\zeta_0}{\rho_0} f_3(t), \\ \dfrac{\eta}{\rho} = \dfrac{\xi_0}{\rho_0} \varphi_1(t) + \dfrac{\eta_0}{\rho_0} \varphi_2(t) + \dfrac{\zeta_0}{\rho_0} \varphi_3(t), \\ \dfrac{\zeta}{\rho} = \dfrac{\xi_0}{\rho_0} \psi_1(t) + \dfrac{\eta_0}{\rho_0} \psi_2(t) + \dfrac{\zeta_0}{\rho_0} \psi_3(t). \end{cases}$$

Dès lors, si à l'instant initial la rotation de la particule fluide considérée est *nulle*, ξ_0, η_0, ζ_0 sont nuls et, par suite, ξ, η, ζ le sont à un instant quelconque.

Cette démonstration revient au fond à celle de Cauchy : si dans les relations (21) établies au n° 730, d'après Cauchy, on remplace D par $\frac{\rho_0}{\rho}$, on obtient précisément les relations (44) dans lesquelles les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, ... sont connues et égales à $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, ... Il résulte de là que les relations de Cauchy (21) du n° 730, dans lesquelles on considère $\frac{\xi_0}{\rho_0}$, $\frac{\eta_0}{\rho_0}$, $\frac{\zeta_0}{\rho_0}$ comme des constantes arbitraires, constituent précisément les intégrales générales des équations de Helmholtz (43) et (43′) regardées comme définissant $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho}$ en fonction du temps. C'est ce qu'on vérifiera facilement. (*Voir* aux Exercices.)

738. **Cas où ρ étant fonction de p les forces et les vitesses dérivent d'un potentiel.** — L'intégration des équations se simplifie quand les trois conditions suivantes sont remplies :

1° La densité est fonction de la pression;

2° Les forces X, Y, Z dérivent d'une fonction $U(x, y, z, t)$ pouvant contenir t;

3° Les vitesses u, v, w dérivent d'un potentiel $\varphi(x, y, z, t)$; en d'autres termes les tourbillons sont tous nuls.

Posons alors, comme plus haut,

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho};$$

les équations (35) du mouvement prennent la forme

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0.$$

.....

En remplaçant u, v, w par $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, on écrit la première de ces équations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}-\frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Q\right\}=0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}W^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Q\right)=0,$$

W^2 étant le carré $u^2+v^2+w^2$ de la vitesse de l'élément placé en x, y, z. Les deux autres équations du mouvement montrent de même que les dérivées partielles de la quantité $\frac{1}{2}W^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Q$, par rapport à y et z, sont nulles.

Cette quantité est donc indépendante des variables x, y, z et ne dépend plus que de la quatrième variable t. On a ainsi l'équation unique

$$\frac{1}{2}W^2+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-Q=\psi(t) \tag{45}$$

ou, d'après la définition de H,

$$H+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\psi(t), \tag{46}$$

qui remplace les trois équations du mouvement. On peut faire rentrer la fonction du temps $\psi(t)$ dans φ. En effet, jusqu'à présent cette fonction φ a été définie uniquement par cette propriété que

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

or toute autre fonction φ_1 différant de φ par une fonction de t

seulement, par exemple

$$\varphi_1 = \varphi - \int_{t_0}^{t} \psi(t)\, dt,$$

possède évidemment la même propriété et peut également servir de potentiel de vitesses, puisque les dérivées partielles de φ_1 par rapport à x, y, z, sont identiques à celles de φ.

Mais alors l'équation (45) s'écrit

$$\frac{1}{2} W^2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - Q = 0.$$

En résumé, les équations du mouvement peuvent être ramenées aux suivantes :

$$(47) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0, \\ \rho = f(p). \end{cases}$$

La deuxième de ces équations est l'équation de continuité (36); la troisième, l'équation caractéristique.

On a ainsi trois équations pour déterminer φ, p et ρ en fonction de x, y, z, t : la fonction φ n'est déterminée qu'à une *constante additive* près, car φ ne paraît dans toutes les équations que par ses dérivées partielles. Il faudra distinguer deux cas suivant que φ est uniforme ou non dans le fluide (n° 710).

Liquide incompressible à température constante. — Dans le cas où ρ est *constant*, l'équation de continuité, dans l'hypothèse d'un potentiel de vitesses φ, se réduit à l'équation de Laplace

$$\Delta \varphi = 0$$

que nous avons étudiée en détail à propos de l'attraction. Comme la fonction Q est alors égale à $U - \frac{p}{\rho}$, il faudra intégrer, sous les conditions initiales et les conditions aux limites, les deux équations

$$(48) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - U + \frac{p}{\rho} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

définissant p et φ en fonction de x, y, z, t.

Dans ces équations, la somme $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$ est égale au carré W^2 de la vitesse.

Remarque. — On peut évidemment rattacher les résultats de ce numéro aux équations (41). Actuellement, le mouvement étant irrotationnel, ξ, η, ζ sont nuls; de plus, $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}$, ...

Les équations (41) s'écrivent donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(H+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(H+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(H+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0;$$

elles montrent que la fonction $H+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ est indépendante de x, y, z. comme nous l'avons vu par un calcul direct.

739. **Exercice.** — *Une masse liquide dénuée de poids affecte la forme d'une couche sphérique de rayon extérieur a entourant un noyau sphérique solide de rayon b : la surface extérieure de cette couche est soumise à une pression constante* Π. *Dans ces conditions, le système est en équilibre. A un instant donné* $t=0$, *le noyau solide intérieur est anéanti : trouver le mouvement du liquide.*

Cet exercice est emprunté à l'Ouvrage intitulé : « *An elementary Treatise on Hydrodynamics and Sound* », by A.-B. BASSET, M. A., F. R. S., Trinity College, Cambridge, 1890, p. 25.

Il est évident, par raison de symétrie, que la vitesse de chaque élément est dirigée vers le centre et que, à chaque instant, les points qui sont à la même distance du centre ont la même vitesse : les surfaces libres intérieures et extérieures restent donc sphériques.

Le liquide partant du repos, le mouvement est irrotationnel, d'après le théorème de Lagrange. Les vitesses dérivent donc d'un potentiel φ. Si l'on prend comme origine le centre commun O des deux sphères, point qui reste fixe, et si l'on appelle r la distance d'un élément fluide au centre, la fonction φ est, par raison de symétrie, fonction des seules variables r et t : $\varphi(r, t)$.

Écrivons qu'elle vérifie l'équation de continuité

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0.$$

On a, puisque φ dépend de x, y, z par l'intermédiaire de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right);$$

on a de même $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$, d'où pour l'équation de continuité

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) = 0.$$

On a donc

$$r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = F(t),$$

$F(t)$ désignant une fonction de t et

$$\varphi = -\frac{F(t)}{r} + F_1(t),$$

$F_1(t)$ étant une deuxième fonction de t. On peut alors écrire les composantes u, v, w de la vitesse W qui sont les dérivées partielles de φ par rapport à x, y, z. La vitesse elle-même estimée positivement suivant le prolongement du rayon r a pour expression

$$W = \frac{d\varphi}{dr},$$

la dérivée étant prise suivant le rayon, c'est-à-dire

$$W = \frac{F(t)}{r^2}. \tag{49}$$

Comme le système part du repos, W est nul avec t, la fonction $F(t)$ s'annule donc avec t.

La première des équations générales (48) donne alors, puisque $U = 0$,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{F'(t)}{r} - F_1'(t) - \frac{1}{2}W^2. \tag{50}$$

Appelons, à un instant quelconque t, R_0 le rayon de la sphère extérieure, W_0 la vitesse des éléments situés sur cette sphère : R_0 est une fonction de t et l'on a évidemment

$$W_0 = \frac{dR_0}{dt} = \frac{F(t)}{R_0^2}, \tag{51}$$

d'après la formule (49); appelons de même R_1 le rayon de la sphère inté-

rieure et W_1 la vitesse des éléments situés sur cette sphère : nous aurons de même

$$W_1 = \frac{dR_1}{dt} = \frac{F(t)}{R_1^2}. \tag{52}$$

Comme à chaque instant la pression extérieure est Π et la pression intérieure o, on a, en faisant successivement $r = R_0$ et $r = R_1$ dans l'équation (50),

$$\frac{\Pi}{\rho} = \frac{F'(t)}{R_0} - F_1'(t) - \frac{1}{2} W_0^2,$$

$$0 = \frac{F'(t)}{R_1} - F_1'(t) - \frac{1}{2} W_1^2.$$

D'où, en retranchant et remplaçant W_0 et W_1 par leurs valeurs (51) et (52)

$$\frac{\Pi}{\rho} = F'(t)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) - \frac{1}{2} F^2(t)\left(\frac{1}{R_0^4} - \frac{1}{R_1^4}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $2F(t)\,dt$ en remarquant que, d'après (51) et (52), $2F(t)\,dt$ est égal à $2R_0^2\,dR_0$ et à $2R_1^2\,dR_1$. Nous pourrons écrire

$$2\frac{\Pi}{\rho} R_1^2\,dR_1 = 2F(t)F'(t)\,dt\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) - F^2(t)\left(\frac{dR_0}{R_0^2} - \frac{dR_1}{R_1^2}\right).$$

Le deuxième membre est alors la différentielle du produit

$$F^2(t)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right),$$

d'où en intégrant

$$\frac{2}{3}\frac{\Pi}{\rho} R_1^3 = F^2(t)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) + C,$$

C désignant une constante que l'on détermine en remarquant que, pour $t = 0$, $R_1 = b$ et $F(t) = 0$. Donc $C = \frac{2}{3}\frac{\Pi}{\rho} b^3$ et l'on a l'équation

$$\frac{2}{3}\frac{\Pi}{\rho}(R_1^3 - b^3) = F^2(t)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right). \tag{53}$$

On trouverait de même

$$\frac{2}{3}\frac{\Pi}{\rho}(R_0^3 - a^3) = F^2(t)\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right). \tag{54}$$

Ces deux équations exigent que

$$R_0^3 - R_1^3 = a^3 - b^3,$$

condition évidente, car le volume liquide compris entre les deux sphères limites est constant. Ces équations permettraient de calculer R_0 et R_1 en fonction de t; par exemple, pour calculer R_1, il suffirait de remplacer dans

la première R_0 par $(R_1^3 + a^3 - b^3)^{\frac{1}{3}}$ et $F(t)$ par $R_1^2 \frac{dR_1}{dt}$. On aurait ainsi une équation différentielle du premier ordre donnant R_1 en fonction de t. Cette équation différentielle, dans laquelle on remplace $\frac{dR_1}{dt}$ par W_1, donne la vitesse W_1 en fonction de R_1.

Faisons le calcul dans l'hypothèse que le liquide s'étend à l'infini : alors $a = \infty$, $c = \infty$, $R_0 = \infty$. L'équation (53) devient donc

$$\frac{2}{3}\frac{\Pi}{\rho}(R_1^3 - b^3) = -\frac{F^2(t)}{R_1}.$$

En y remplaçant $F(t)$ par $R_1^2 \frac{dR_1}{dt}$, on a

$$\frac{dR_1}{dt} = -\sqrt{\frac{2\Pi}{3\rho}}\,\frac{\sqrt{b^3 - R_1^3}}{R_1^{\frac{3}{2}}},$$

où il faut prendre le signe —, car R_1 diminue quand t augmente. En séparant les variables, on a t en fonction de R_1, par une quadrature. Si l'on veut calculer le temps T au bout duquel la cavité est pleine, il faut intégrer par rapport à R_1 de b à o; ce temps est donc

$$T = \sqrt{\frac{3\rho}{2\Pi}} \int_0^b \frac{R_1^{\frac{3}{2}} dR_1}{\sqrt{b^3 - R_1^3}},$$

ou en faisant $R_1^3 = b^3 x$

$$T = b\sqrt{\frac{\rho}{6\Pi}} \int_0^1 x^{-\frac{1}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

L'intégrale définie a une valeur purement numérique : c'est une intégrale eulérienne de première espèce $B\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}\right)$ qui a pour expression

$$\frac{\Gamma\frac{5}{6}\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\frac{4}{3}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\frac{5}{6}}{\Gamma\frac{4}{3}},$$

car $\Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$.

740. Équations analogues à celles d'Euler dans un système quelconque de coordonnées. — Nous avons indiqué au n° 733 comment on peut écrire, dans un système quelconque de coordonnées q_1, q_2, q_3, les équations du second ordre définissant q_1, q_2, q_3 en fonction de t et de q_1^0, q_2^0, q_3^0.

Posons

$$(A) \qquad u_1 = \frac{dq_1}{dt}, \qquad u_2 = \frac{dq_2}{dt}, \qquad u_3 = \frac{dq_3}{dt}.$$

Ces trois quantités sont fonctions de t, q_1^0, q_2^0, q_3^0 : mais on peut les considérer aussi comme fonctions de t et de q_1, q_2, q_3. Ce nouveau système de variables indépendantes est analogue à celui d'Euler. Nous désignerons par un ∂ de ronde les dérivées partielles prises par rapport au temps dans ce nouveau système. Soit alors $f(q_1, q_2, q_3, t)$ une fonction des nouvelles variables, on peut avoir à prendre la dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}$, par rapport à t en regardant q_1, q_2, q_3 comme constants, ou la dérivée totale $\frac{df}{dt}$ par rapport à t en regardant q_1, q_2, q_3 comme des fonctions du temps. Cette dérivée totale a pour expression développée, d'après (A),

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_1} u_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} u_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} u_3 + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Les équations de Lagrange, écrites au n° 733, s'écrivent alors immédiatement dans le nouveau système : pour cela, on y remplacera $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, $\frac{dq_3}{dt}$, par u_1, u_2, u_3, puis les dérivées totales secondes $\frac{d^2 q_1}{dt^2}$, ... ou $\frac{du_1}{dt}$, ... par

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial q_1} u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial q_2} u_2 + \frac{\partial u_1}{\partial q_3} u_3 + \frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

.....

Il restera en outre à transformer l'équation de continuité.

Équation de continuité analogue à celle d'Euler. — Désignons, pour abréger, par M le déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à q_1, q_2, q_3 et par K le déterminant fonctionnel de q_1, q_2, q_3 par rapport à q_1^0, q_2^0, q_3^0

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{D}(x, y, z)}{\mathrm{D}(q_1, q_2, q_3)}, \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{D}(q_1, q_2, q_3)}{\mathrm{D}(q_1^0, q_2^0, q_3^0)}.$$

L'équation de continuité que nous avons établie (n° 733) exprime que le produit $\rho \mathrm{MK}$ est *constant* pour une même particule fluide. La dérivée totale de ce produit par rapport à t est donc nulle. Nous écrirons, en prenant la dérivée logarithmique,

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\mathrm{M}}\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \frac{1}{\mathrm{K}}\frac{d\mathrm{K}}{dt} = 0.$$

Calculons le dernier terme. On a

$$\text{(B)} \qquad \frac{d\mathrm{K}}{dt} = \frac{\mathrm{D}(u_1, q_2, q_3)}{\mathrm{D}(q_1^0, q_2^0, q_3^0)} + \frac{\mathrm{D}(q_1, u_2, q_3)}{\mathrm{D}(q_1^0, q_2^0, q_3^0)} + \frac{\mathrm{D}(q_1, q_2, u_3)}{\mathrm{D}(q_1^0, q_2^0, q_3^0)},$$

comme il résulte de ce que la dérivée d'un déterminant est la somme des

déterminants obtenus en prenant successivement les dérivées des diverses lignes ou colonnes et de ce que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_1}{\partial q_1^0}\right) = \frac{\partial}{\partial q_1^0}\left(\frac{dq_1}{dt}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial q_1^0}, \quad \cdots$$

Mais u_1, u_2, u_3 peuvent être supposés exprimés en fonction de q_1, q_2, q_3, t; alors

$$\frac{D(u_1, q_2, q_3)}{D(q_1^0, q_2^0, q_3^0)} = \frac{D(u_1, q_2, q_3)}{D(q_1, q_2, q_3)} \frac{D(q_1, q_2, q_3)}{D(q_1^0, q_2^0, q_3^0)} = \frac{\partial u_1}{\partial q_1} K.$$

De même le deuxième et le troisième déterminant de la formule (B) sont $\frac{\partial u_2}{\partial q_2} K$ et $\frac{\partial u_3}{\partial q_3} K$.

On a alors

$$\frac{dK}{dt} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{\partial u_3}{\partial q_3}\right) K.$$

L'équation de continuité est donc finalement

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{M}\frac{dM}{dt} + \frac{\partial u_1}{\partial q_1} + \frac{\partial u_2}{\partial q_2} + \frac{\partial u_3}{\partial q_3} = 0.$$

En développant $\frac{dM}{dt}$ on peut l'écrire

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial M}{\partial q_1} u_1 + \frac{\partial M}{\partial q_2} u_2 + \frac{\partial M}{\partial q_3} u_3 + \frac{\partial M}{\partial t}.$$

L'équation (C) peut alors être écrite

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{M}\left[\frac{\partial (M u_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial (M u_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial (M u_3)}{\partial q_3} + \frac{\partial M}{\partial t}\right] = 0.$$

Par exemple, en coordonnées polaires dans l'espace r, θ, ω, on a

$$M = r^2 \sin\theta.$$

Posons

$$u_1 = \frac{dr}{dt}, \qquad u_2 = \frac{d\theta}{dt}, \qquad u_3 = \frac{d\omega}{dt}.$$

L'équation de continuité est

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{2}{r} u_1 + u_2 \cot\theta + \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial \omega} = 0;$$

on peut l'écrire

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 u_1)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial (u_2 \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial u_3}{\partial \omega} = 0.$$

Cas particulier des coordonnées curvilignes orthogonales. — Soient

$$x = \varphi(q_1, q_2, q_3), \qquad y = \psi(q_1, q_2, q_3), \qquad z = \varpi(q_1, q_2, q_3)$$

les formules de transformation : nous supposons que les trois familles de surfaces $q_1 = \text{const.}$, $q_2 = \text{const.}$, $q_3 = \text{const.}$ sont orthogonales. Si l'on appelle dx, dy, dz les accroissements infiniment petits de x, y, z correspondant à des accroissements dq_1, dq_2, dq_3, on a, en faisant la somme des carrés de ces accroissements, une expression de la forme

$$ds^2 = h_1^2\,dq_1^2 + h_2^2\,dq_2^2 + h_3^2\,dq_3^2.$$

En prenant le déterminant M et l'élevant au carré on trouve immédiatement, d'après les conditions d'orthogonalité,

$$\mathrm{M}^2 = h_1^2 h_2^2 h_3^2, \qquad \mathrm{M} = h_1 h_2 h_3.$$

On peut alors écrire les formules (C) et (E) avec cette particularité que $\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial t}$ est nul.

Soit à partir d'un point P la courbe obtenue en supposant q_2 et q_3 constants; l'arc ds_1 de cette courbe est donné par

$$ds_1 = h_1\,dq_1;$$

de même

$$ds_2 = h_2\,dq_2, \qquad ds_3 = h_3\,dq_3$$

sont les arcs des courbes obtenues en faisant varier seulement q_2 ou q_3. On introduit ordinairement les composantes de la vitesse v_1, v_2, v_3 suivant les trois directions ds_1, ds_2, ds_3 : ces composantes sont

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = h_1 u_1, \qquad v_2 = h_2 u_2, \qquad v_3 = h_3 u_3,$$

et l'équation (E) s'écrit

$$(\mathrm{F}) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(v_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(v_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(v_3 h_1 h_2)}{\partial q_3}\right] = 0.$$

On pourra faire une application de cette équation aux coordonnées polaires dans l'espace.

IV. — MOUVEMENT PERMANENT EN GÉNÉRAL.

741. Mouvement permanent. Filets fluides. — Nous avons déjà défini le mouvement permanent d'un milieu continu au point de vue cinématique (n° 704). Pour que le mouvement d'un fluide soit permanent au point de vue dynamique, il faut et il suffit que la distribution des vitesses, des pressions et des densités, aux divers

points géométriques de l'espace occupé par le fluide, soit constamment la même. En d'autres termes, il faut et il suffit que u, v, w, ρ et p dépendent uniquement de x, y, z, et non de t.

Les éléments fluides qui passent successivement en un point géométrique P suivent alors tous la *même trajectoire :* de cette façon, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule.

Filet fluide. — Soit, dans l'espace, un élément plan infiniment petit σ_0 (voir *fig.* 329) : les diverses trajectoires partant du contour de cet élément forment une sorte de tube, et les éléments fluides qui traversent l'aire de l'élément σ_0 se meuvent dans ce tube : l'ensemble de ces éléments forme ce qu'on appelle un *filet fluide.*

Les cas où le mouvement est sensiblement permanent se présentent souvent : lorsque le fluide est soumis à des conditions qui ne varient pas avec le temps, c'est-à-dire lorsque les forces d'une part et les conditions aux limites de l'autre sont invariables, on admet qu'au bout d'un certain temps il s'établit un régime permanent. Par exemple, dans une pièce d'eau alimentée régulièrement, de façon que son niveau reste constant, et dont l'eau s'écoule toujours de la même façon, il s'établit un régime permanent.

742. Mouvement permanent dans le cas où les forces dérivent d'une fonction de forces U (x, y, z) et où ρ est fonction de p. — Théorème de Bernoulli. — Supposons que les forces X, Y, Z dérivent d'une fonction U (x, y, z) ne contenant pas le temps et que la densité ρ soit fonction de la pression p. En posant, comme plus haut,

$$Q = U - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho},$$

et remarquant que u, v, w et Q sont indépendants de t, on peut écrire les équations du mouvement (35)

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Dans ces équations ne figure plus le temps. Il est naturel de les transformer en ne faisant intervenir que des éléments géométriques; c'est ce que nous allons faire en suivant une méthode indiquée par M. Gilbert dans sa *Mécanique analytique* (Partie élémentaire).

Appelons s l'arc d'une trajectoire compté à partir d'un point déterminé P_0 jusqu'à un point P de cette trajectoire. Les coordonnées x, y, z de P sont des fonctions de s, et les cosinus directeurs de la tangente en P à la trajectoire sont

$$\frac{dx}{ds}, \qquad \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{dz}{ds}.$$

La vitesse en P étant W, ses projections sont

$$u = W\frac{dx}{ds}, \qquad v = W\frac{dy}{ds}, \qquad w = W\frac{dz}{ds}. \tag{55}$$

La première équation du mouvement donne donc

$$W\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

ou

$$W\frac{du}{ds} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

car, le long de la trajectoire, u est fonction de s par l'intermédiaire de x, y, z. On déduit de même des deux autres équations du mouvement

$$W\frac{dv}{ds} - \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \qquad W\frac{dw}{ds} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0.$$

Multiplions ces trois équations respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et ajoutons-les en tenant compte des formules (55), nous aurons

$$u\frac{du}{ds} + v\frac{dv}{ds} + w\frac{dw}{ds} - \frac{dQ}{ds} = 0, \tag{56}$$

car, le long de la trajectoire, Q dépend de s par l'intermédiaire de x, y, z et $\frac{dQ}{ds}$ est égal à

$$\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Comme

$$W^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

l'équation (56) peut s'écrire

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2}W^2 - Q\right] = 0.$$

Elle exprime que la quantité entre crochets, c'est-à-dire la quantité appelée précédemment H (n° 737), ne varie pas quand s varie : cette quantité est donc *constante tout le long du filet fluide considéré :*

$$\frac{1}{2}W^2 - Q = \mathfrak{C}, \tag{57}$$

ou

$$H = \mathfrak{C}.$$

Cette relation exprime le *Théorème de Bernoulli.*

Il faut remarquer que $\mathfrak{C}$ est constant le long de chaque filet fluide; mais pour chaque filet $\mathfrak{C}$ a une autre valeur. D'une façon précise, si les équations d'une trajectoire sous forme finie sont (n° 703)

$$\Phi(x, y, z) = C,$$
$$\Phi_1(x, y, z) = C_1,$$

la constante $\mathfrak{C}$ est une fonction des deux constantes C et C_1 dont les valeurs numériques définissent la trajectoire d'un élément fluide ou le filet fluide considéré.

Si l'on emploie le système C. G. S. le premier membre de l'équation (57) et, par suite, la valeur de la constante $\mathfrak{C}$ représentent l'énergie en ergs par gramme de fluide.

Considérons un filet fluide déterminé. Appelons W_0, p_0, U_0, Q_0 les valeurs des fonctions W, p, U, Q en un point déterminé du filet; en écrivant que la fonction

$$H = \frac{1}{2}W^2 - Q$$

est constante tout le long du filet, on aura, le long du filet,

$$\frac{1}{2}(W^2 - W_0^2) = Q - Q_0;$$

ou, en remplaçant Q par sa valeur,

$$\frac{1}{2}(W^2 - W_0^2) = U - U_0 - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}. \tag{58}$$

743. Application à un liquide. Démonstration directe. — Appliquons le théorème de Bernoulli au mouvement permanent d'un liquide incompressible; alors ρ est constant et

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho} = U - \frac{p}{\rho}.$$

Dans ce cas, l'équation (58) s'écrit

$$\frac{1}{2} W^2 - U + \frac{p}{\rho} = \mathfrak{C}, \tag{59}$$

le long d'un filet liquide. Si l'on connaît les valeurs U_0, p_0, W_0 des fonctions U, p, W en un point déterminé d'un filet, on aura, tout le long de ce filet,

$$\frac{1}{2} W^2 - U + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} W_0^2 - U_0 + \frac{p_0}{\rho}. \tag{60}$$

La constante $\mathfrak{C}$, relative à ce filet, est alors connue.

Cette formule (60) donne la vitesse en un point du filet quand la pression y est connue, ou la pression quand la vitesse est connue. En résolvant par rapport à p,

$$p = \rho\left(U - \frac{1}{2} W^2 + \mathfrak{C}\right),$$

on voit que, le long d'un filet, la vitesse W ne peut pas dépasser une certaine limite, *sans que le liquide se sépare*. En effet, p devant être *positif*, il faut que l'on ait

$$W^2 \leqq 2(U + \mathfrak{C})$$

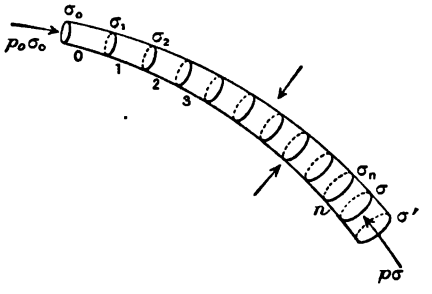
en tous les points du filet.

On peut, dans le cas d'un liquide, établir directement l'équation de Bernoulli en la déduisant du théorème des forces vives.

Démonstration directe pour un liquide. — Considérons un filet liquide déterminé et deux sections droites fixes σ_0 et σ (*fig.* 329) : ces sections sont infiniment petites, d'après la définition d'un filet : supposons que le liquide coule de σ_0 vers σ et appelons W_0 et p_0 la vitesse et la pression en σ_0, W et p la vitesse et la pression en σ. Le mouvement étant permanent, la masse dm de liquide traversant l'élément σ_0 dans le temps dt est égale à la

masse liquide traversant σ dans le même temps; or, pendant le temps dt, les éléments liquides placés sur σ_0 avancent jusqu'en σ_1 d'une longueur $W dt$: le volume liquide ayant traversé σ_0 est

Fig. 329.



donc un cylindre droit de base σ_0 et de hauteur $W_0 dt$, la masse de ce cylindre est

$$dm = \rho \sigma_0 W_0 dt; \tag{61}$$

de même à l'autre extrémité, les éléments primitivement sur σ à l'instant t s'avancent pendant le temps dt jusqu'en σ' et la masse dm qui a traversé σ est

$$dm = \rho \sigma W dt. \tag{62}$$

Ces deux quantités sont égales.

Nous allons appliquer le théorème des forces vives à la masse liquide qui, à l'instant t, est comprise dans le filet entre les sections σ_0 et σ et qui, pendant le temps dt, prend la position comprise entre les sections σ_1 et σ'.

Quand on applique le théorème des forces vives à un système, il faut tenir compte des travaux des forces *intérieures* et *extérieures*.

Actuellement le système étant un liquide parfait incompressible, les éléments matériels en contact sont à des distances constantes les uns des autres et glissent les uns sur les autres sans frottement : *les forces intérieures ont donc un travail nul.* Les forces extérieures sont : 1° les pressions du fluide environnant sur les parois latérales du filet; 2° les pressions $p_0 \sigma_0$ et $p\sigma$ s'exerçant

normalement sur les éléments σ_0 et σ, l'une dans le sens du mouvement, l'autre en sens contraire; 3° les forces données.

Il faut écrire que, pendant le temps dt, la variation de la demi-force vive de la masse liquide considérée est égale à la somme des travaux élémentaires de ces forces. Pour cela, divisons la masse fluide comprise entre les sections σ_0 et σ en $n+1$ tranches infiniment petites, ayant toutes pour masse dm, par des sections droites intermédiaires $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ au nombre de n : numérotons les tranches 0, 1, 2, ..., n; la vitesse des éléments de la tranche 0 a été appelée W_0; nous appellerons de même $W_1, W_2, \ldots, W_n$ les vitesses des tranches suivantes. La force vive totale de la masse considérée entre σ_0 et σ à l'instant t est alors

$$dm(W_0^2 + W_1^2 + \ldots + W_n^2);$$

à l'instant $t+dt$, chaque tranche a pris la position de la suivante, la dernière s'est transportée en $\sigma\sigma'$ où elle a acquis la vitesse W et la force vive de la masse est

$$dm(W_1^2 + W_2^2 + \ldots + W_n^2 + W^2);$$

la variation de la demi-force vive est donc

$$\frac{1}{2} dm(W^2 - W_0^2).$$

Calculons la somme des travaux élémentaires des forces. D'abord les pressions sur les parois latérales du filet ont un *travail nul*, car elles sont normales aux déplacements des éléments sur lesquels elles agissent; la pression $p_0\sigma_0$ est appliquée à la première tranche qui s'avance, dans le sens de cette pression, de $W_0\,dt$: son travail est donc

$$p_0\sigma_0 W_0\,dt$$

ou, d'après (61),

$$\frac{1}{\rho} p_0\,dm;$$

la pression $p\sigma$ est appliquée à la dernière tranche qui s'avance, en sens contraire de cette pression, de $W\,dt$: son travail est donc

$$-p\sigma W\,dt$$

ou, d'après (62),

$$-\frac{1}{\rho} p\,dm.$$

Restent enfin les forces données; par hypothèse, la force X, Y, Z rapportée à l'unité de masse dérive de la fonction de forces U; la force élémentaire appliquée à un élément dm dérive donc de la fonction $U\,dm$; si l'élément dm passe d'une position à une autre, le travail de la force élémentaire est égal à la variation correspondante de $U\,dm$. Appliquons cette proposition aux diverses tranches, en appelant $U_0, U_1, \ldots, U_n$, U les valeurs de U dans les diverses tranches 0, 1, 2, ..., n et dans la tranche $\sigma\sigma'$: le travail des forces données appliquées à la tranche 0 est $(U_1 - U_0)\,dm$, car cette tranche passe de la position 0 à la position 1; de même, les travaux des forces données appliquées aux tranches 1, 2, ..., n sont $(U_2 - U_1)\,dm$, $(U_3 - U_2)\,dm$, ..., $(U - U_n)\,dm$; la somme de ces travaux est, après réduction,

$$(U - U_0)\,dm.$$

Le théorème des forces vives donne donc

$$\frac{1}{2}\,dm(W^2 - W_0^2) = \frac{1}{\rho}p_0\,dm - \frac{1}{\rho}p\,dm + (U - U_0)\,dm;$$

en divisant par dm et transposant, on obtient l'équation de Bernoulli (60) pour un liquide.

744. Théorème de Torricelli. — Appliquons, en particulier, ces résultats au mouvement permanent d'un liquide pesant, maintenu à un niveau constant dans un vase par un réservoir d'alimentation et s'écoulant par un orifice percé dans la paroi. L'observation montre qu'il s'établit un régime permanent. Comme les éléments fluides situés, à un certain instant, sur la surface libre finissent par s'écouler par l'orifice, les filets fluides partant de la surface vont aboutir à l'orifice (*fig.* 330).

Prenons pour plan des xy la surface libre, pour axe des z la verticale descendante. On a alors pour la fonction des forces $U = gz$. L'équation de Bernoulli (60) s'écrit

$$\frac{1}{2}W^2 - gz + \frac{p}{\rho} = \Theta$$

tout le long d'un filet fluide. Pour déterminer la constante Θ le long d'un filet, il suffit de connaître W, z et p en un point du

filet : or, sur la surface libre, on a

$$z = 0, \qquad p = p_a,$$

p_a désignant la pression atmosphérique; quant à la vitesse W_0 des points de la surface libre, elle est *négligeable* si l'aire de la surface libre est *très grande* par rapport aux dimensions de l'orifice; il est évident, en effet, que, dans ces conditions, si l'on supprimait l'alimentation du vase, le niveau y baisserait très lentement : nous prendrons alors

$$W_0 = 0$$

sur la surface libre. Dans ces conditions, la constante a pour valeur

$$\mathfrak{C} = -\frac{p_a}{\rho};$$

on a donc, le long d'un filet,

$$\frac{1}{2} W^2 = g z + \frac{1}{\rho}(p_a - p). \tag{63}$$

Vitesse d'écoulement. — Soient h la distance de l'orifice à la surface libre, W_e la vitesse d'écoulement par l'orifice : pour connaître cette vitesse, il faut connaître la valeur de la pression p à l'orifice d'écoulement; or l'écoulement se faisant dans l'air, la pression à l'orifice est sensiblement égale à la pression atmosphérique p_a. La formule (63) donne alors, pour $z = h$, $p = p_a$,

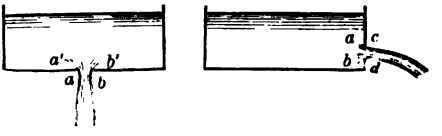
$$W_e^2 = 2gh; \tag{64}$$

elle exprime le théorème de Torricelli : *La vitesse d'écoulement est la vitesse que prendrait un point pesant tombant dans le vide de la hauteur h.*

Débit. — Connaissant la vitesse d'écoulement et la grandeur de l'orifice, on peut calculer le *débit,* c'est-à-dire la quantité de liquide qui s'écoule pendant l'unité de temps. L'observation montre que le débit ainsi calculé est trop fort : cela tient à deux causes : 1° le jet liquide est composé de filets fluides qui vont en convergeant vers l'orifice et qui continuent à converger même après leur sortie de l'orifice (*fig.* 33o); il en résulte que la veine se contracte après sa sortie sur une petite longueur et que pour calculer le débit il faut prendre la quantité de liquide qui passe

avec la vitesse W_e à travers la section droite *minima* de la veine ou section contractée, h désignant la distance de cette section à la surface libre; 2° le débit est moindre que le débit calculé, pour une deuxième raison : c'est que la pression n'est égale rigoureusement à la pression atmosphérique que sur la surface libre de la veine;

Fig. 330.



à l'intérieur de la veine, la pression est un peu supérieure à la pression atmosphérique et par suite, d'après la formule (63) où p est un peu supérieure à p_a, la vitesse d'écoulement dans les parties centrales de la section contractée est un peu moindre que $\sqrt{2gh}$.

Coefficient de contraction. — On appelle *coefficient de contraction* le rapport de l'aire de la section contractée à l'aire de l'orifice. Dans le cas où l'orifice est en *mince paroi* ce coefficient est $\frac{62}{100}$; il a d'autres valeurs quand l'orifice n'est pas en mince paroi ou est muni d'un ajutage.

745. Écoulement d'un gaz. — Imaginons un réservoir de grandes dimensions qui contient un gaz sous pression s'échappant par une petite ouverture : supposons qu'il s'établisse un régime permanent, le réservoir étant alimenté convenablement. On peut évidemment dans l'étude de ce phénomène négliger l'action de la pesanteur. Les filets fluides vont converger vers l'orifice d'écoulement : en suivant un de ces filets, appelons W_0 et p_0 la vitesse et la pression en un point du filet très éloigné de l'orifice, W et p les mêmes quantités au voisinage de l'orifice. La quantité W_0 sera très petite si les dimensions de l'orifice sont petites par rapport à celles du réservoir. Nous devons exprimer que la quantité $\frac{1}{2}W^2 - Q$ a la même valeur le long du filet. Nous aurons ainsi l'équation (58)

$$\frac{1}{2}(W^2 - W_0^2) = U - U_0 - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}.$$

Mais l'action de la pesanteur est négligeable, la fonction de forces U peut donc être regardée comme nulle ; en outre W_0 étant très petit, regardons-le comme nul ; nous aurons, en intervertissant les limites de l'intégrale, la formule

$$W^2 = 2\int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho}. \tag{65}$$

Dans cette formule on ne connaît que d'une façon approchée la relation entre p et ρ. On peut faire deux hypothèses simples.

1° *Formule de Zeuner.* — Admettons qu'un élément du fluide se transforme *adiabatiquement*, on aura (n° **724**)

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \qquad \rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

γ étant le rapport des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant pour le gaz considéré. La formule (65) donne alors

$$W^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Appelons G la vitesse du son dans le gaz considéré à la pression p_0 et à la densité ρ_0, on a (n° **732**),

$$G^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0};$$

la formule peut donc s'écrire

$$W^2 = \frac{2G^2}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{66}$$

Le coefficient γ est plus grand que 1 : si p tend vers zéro, la vitesse W tend vers une valeur limite $G\sqrt{\frac{2}{\gamma-1}}$.

2° *Formule de Navier.* — Admettons que la température est constante dans un filet fluide. On aura alors, d'après la loi de Mariotte,

$$\rho = \rho_0\frac{p}{p_0};$$

l'équation (65) donne dans cette hypothèse

$$W^2 = 2\frac{p_0}{\rho_0} L\frac{p_0}{p}, \tag{67}$$

L étant la caractéristique d'un logarithme népérien.

Comparaison des formules. — La formule de Zeuner suppose négligeables les effets du rayonnement et de la conductibilité; celle de Navier, au contraire, suppose que la température est constante, c'est-à-dire que la chaleur gagnée ou perdue par rayonnement et conductibilité compense exactement la variation de température due à la transformation.

La vraie valeur de la vitesse doit donc être comprise entre les valeurs fournies par les deux formules.

Dans les circonstances habituelles de l'écoulement des gaz, c'est la formule de Zeuner qui paraît le mieux représenter les résultats observés (¹).

746. Variation de la section droite d'un filet gazeux; maximum de contraction; vitesse correspondante. — Considérons un gaz animé d'un mouvement permanent : si, dans un même filet fluide, nous prenons comme au n° 743 (*fig.* 329) deux sections droites σ et σ_0, la masse dm de fluide traversant l'élément σ dans le temps dt est égale à la masse de fluide traversant σ_0 dans le même temps. On a donc, en appelant W et W_0 les vitesses, ρ et ρ_0 les densités dans les sections σ et σ_0,

$$\rho\sigma W\,dt = \rho_0\sigma_0 W_0\,dt.$$

Cela revient à dire que $\rho\sigma W$ est constant tout le long du filet

$$\rho\sigma W = k, \qquad \sigma = \frac{k}{\rho W}.$$

Le maximum de contraction du filet, c'est-à-dire le minimum de σ, correspond donc au maximum de ρW. Or, d'après la for-

(¹) SARRAU, *Cours de l'École Polytechnique*, 1re division, 1900, p. 151-153.

mule générale (65), on a

$$W^2 = 2\int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho},$$

$$\rho^2 W^2 = 2\rho^2 \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho}. \tag{68}$$

La pression p est une fonction de ρ : le long du filet, le deuxième membre est donc fonction de la seule variable ρ : pour trouver la valeur de ρ qui rend ρW ou $\rho^2 W^2$ maximum, il suffit d'égaler à zéro la différentielle du deuxième membre de (68) : on a ainsi, au point où la contraction est maximum,

$$2\rho\, d\rho \int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} - \rho^2 \frac{dp}{\rho} = 0,$$

c'est-à-dire

$$2\int_p^{p_0} \frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}.$$

La vitesse d'écoulement au point où la contraction est maximum est donc, d'après la formule (65),

$$W^2 = \frac{dp}{d\rho};$$

on voit que c'est la *vitesse du son correspondant à la pression et à la densité en ce point* (1) (n° 732).

V. — MOUVEMENT PERMANENT IRROTATIONNEL.

747. Mouvement permanent dans le cas où $\rho = f(p)$ et où il existe un potentiel des forces et des vitesses. — Nous avons, dans les numéros précédents, supposé que la densité est fonction de la pression et que les forces X, Y, Z dérivent d'une fonction U; supposons en outre que les vitesses dérivent également d'une fonction φ

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

c'est-à-dire que le mouvement est *irrotationnel*.

(1) SARRAU, *Cours de l'École Polytechnique*, 1re division, 1900, p. 153.

Le mouvement étant supposé permanent, u, v, w, p, ρ ne dépendent pas de t : on peut donc supposer que φ ne dépend pas de t. Dans ces conditions, le calcul du n° 738 nous a montré que la fonction

$$H + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2} W^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} - Q$$

est indépendante de x, y, z. Actuellement $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ est nul, donc la fonction

$$H = \frac{1}{2} W^2 - Q$$

ne dépend pas de x, y, z; mais l'hypothèse que le mouvement est permanent montre que cette quantité H ne dépend pas de t, car W et Q sont indépendants de t. Donc H est indépendant de x, y, z, t, et l'on a l'équation

$$\frac{1}{2} W^2 - Q = C, \tag{69}$$

C désignant une constante.

Dans ce cas, on déterminera φ, p et ρ par les trois équations

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] - U + \int \frac{dp}{\rho} = C, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0, \\ \rho = f(p). \end{array} \right. \tag{70}$$

Les trajectoires des éléments fluides coupent orthogonalement les surfaces

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.};$$

d'après les valeurs de u, v, w, ces éléments marchent dans le sens suivant lequel φ va en augmentant.

Il faudra intégrer les équations (70) sous les conditions initiales et les conditions aux limites. Par exemple, si le fluide, dans son mouvement, doit rester en contact avec une paroi fixe, la vitesse en chaque point de cette paroi doit lui être tangente; la composante de la vitesse normale à la paroi doit donc être nulle, ce qui donne la condition

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

tout le long de la paroi, la dérivée étant prise suivant la normale à la paroi. On peut aussi interpréter cette condition en remarquant qu'elle exprime que le flux de fluide à travers un élément quelconque de paroi est nul. Les surfaces équipotentielles des vitesses

$$\varphi = \text{const.}$$

couperont cette paroi fixe à *angle droit.*

Comparaison avec le théorème de Bernoulli. — En supposant un mouvement permanent dans lequel $\rho = f(p)$ et dans lequel les forces dérivent d'une fonction de forces, nous avons vu (n° 742) que la quantité

$$H = \frac{1}{2} W^2 - Q$$

est constante *le long d'un filet fluide;* mais cette valeur constante diffère d'un filet à l'autre. Actuellement, nous supposons de plus que les vitesses dérivent d'un potentiel; nous trouvons alors que cette quantité H est constante *dans tout le fluide,* ou encore que la constante est *la même pour tous les filets.*

Il faudra distinguer deux cas, suivant que φ est une fonction uniforme de x, y, z dans le fluide (mouvement irrotationnel acyclique) ou une fonction multiforme (mouvement irrotationnel cyclique) (*voir* n° 710).

748. Cas d'un liquide incompressible. — Si le fluide est un liquide incompressible, ρ est constant, et l'on a, pour déterminer φ et p en fonction de x, y, z, les deux équations

$$(71)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] - U + \frac{p}{\rho} = C, \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \end{cases}$$

dont la deuxième est l'équation de Laplace.

Il faudra dans chaque problème trouver des fonctions φ et ρ vérifiant ces équations et remplissant les conditions initiales et les conditions aux limites.

Analogie avec l'attraction newtonienne. — La fonction $\varphi(x, y, z)$, vérifiant l'équation de Laplace, est analogue à un potentiel newtonien dû à des masses qui attirent ou repoussent en

raison inverse du carré des distances. Les surfaces $\varphi = \text{const.}$ sont alors analogues aux surfaces de niveau; les trajectoires des éléments liquides coupant orthogonalement ces surfaces sont analogues aux lignes de forces, les filets liquides aux tubes de forces, et le flux de liquide à travers une surface est analogue au flux de force (Chap. XXIX).

Il va de soi qu'on pourra appliquer à la fonction φ tous les théorèmes établis dans le paragraphe IV du Chapitre XXIX sur les fonctions vérifiant l'équation de Laplace.

Par exemple, si l'on trace par la pensée, dans le liquide, une surface fermée S, dans laquelle φ est uniforme et continu, le flux total de liquide à travers cette surface est nul, ce qui est évident, car la masse totale du liquide contenue dans S est invariable.

749. **Sources; doublets.** — 1° *Une source.* — Supposons que le mouvement permanent d'un liquide soit irrotationnel et *entièrement symétrique autour d'un point* O. Cherchons la forme de la fonction φ. Si nous prenons le point O comme origine, en appelant r la distance d'un point x, y, z au point O,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

nous voyons que φ sera fonction de r seulement par raison de symétrie. Cette fonction dépend de x, y, z par l'intermédiaire de r, et l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right);$$

on calcule de même $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ et en formant l'équation de Laplace $\Delta\varphi = 0$, on a, après des réductions évidentes,

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0, \qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0.$$

On en tire en intégrant

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2}, \tag{72}$$

A désignant une constante; puis

$$\varphi = -\frac{A}{r}, \tag{73}$$

où il est inutile d'ajouter une nouvelle constante, car φ intervient dans toutes les équations par ses seules dérivées.

Le mouvement est entièrement défini par cette expression (73) de φ : les surfaces $\varphi = \text{const.}$ sont des sphères de centre O; les trajectoires, les rayons de ces sphères; les filets fluides, des cônes ayant tous leurs sommets au point O. Ce point est d'ailleurs un point singulier où φ est infinie.

Dans ce mouvement, la fonction φ est analogue au potentiel d'un centre unique O attirant ou repoussant suivant la loi de Newton.

Si A est positif, les particules liquides s'éloignent du point O comme si le fluide sortait de ce point : on dit alors que ce point est une *source positive*. Si A est négatif, les particules liquides se dirigent vers le point O pour y disparaître : ce point est une *source négative*.

Le flux de liquide à travers une surface fermée simplement connexe entourant la source O, de l'intérieur vers l'extérieur, est évidemment égal au flux de liquide à travers une sphère s de centre O et de rayon 1. Ce flux est donc, pendant le temps dt,

$$\rho\, dt \int\int_s \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = \rho\, dt \int\int_s \frac{A}{r^2}\, d\sigma,$$

car la normale extérieure à la sphère s se confond avec le rayon et

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dr} = \frac{A}{r^2}.$$

Comme, sur la sphère, $r = 1$, on a, pour ce flux,

$$\rho\, dt\, A \int\int_s d\sigma = 4\pi\rho A\, dt.$$

Pendant l'unité de temps, ce flux est donc $4\pi\rho A$.

Au point de vue physique, il faut supposer que le mouvement a lieu seulement jusqu'à une certaine distance du point O, par exemple, à l'extérieur d'une petite sphère de centre O et qu'il soit modifié dans cette sphère, car les vitesses ne peuvent pas devenir infinies comme il arriverait, d'après notre calcul, si le mouvement pouvait exister jusqu'au point O.

Le calcul précédent est identique à celui que nous avons fait, dans la théorie de l'attraction newtonienne, pour calculer le flux de force provenant d'un centre unique à travers une surface fermée entourant ce centre.

2° *Plusieurs sources.* — Imaginons un liquide animé d'un mouvement permanent irrotationnel. Supposons que, dans une certaine région de l'espace occupé par le liquide, limitée par une surface fermée, il existe n points fixes $O_1, O_2, \ldots, O_n$ tels qu'en appelant $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances d'un point $P(x, y, z)$ à ces points, on ait, dans cette région, pour le potentiel des vitesses, une expression de la forme

$$\varphi = -\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} - \ldots - \frac{A_n}{r_n} + \psi(x, y, z),$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignant des constantes positives ou négatives et $\psi(x, y, z)$ une fonction harmonique, uniforme, finie et continue dans la région considérée.

On dit alors que les points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ sont des sources d'intensité $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Le flux à travers une surface S entourant tous ces points et située dans la région considérée est, pendant l'unité de temps, au facteur ρ près,

$$\iint \frac{d\varphi}{dn}\, d\sigma = -A_1 \int\int d\frac{1}{r_1}\, d\sigma - \ldots - A_n \int\int d\frac{1}{r_n}\, d\sigma + \iint \frac{d\psi}{dn}\, d\sigma,$$

toutes les intégrales étant étendues à la surface S : c'est donc la somme des flux dus aux diverses sources augmentée de l'intégrale

$$\iint \frac{d\psi}{dn}\, d\sigma$$

qui est nulle, d'après les hypothèses faites sur ψ (n° 587).

Le flux à travers S est donc

$$4\pi\rho(A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

3° *Doublets.* — Un doublet est constitué par deux sources infiniment voisines d'intensités égales et de signes contraires : il est analogue à un aimant élémentaire (n° 570).

750. Quelques problèmes sur les sources. — Soit un vase entiè-

rement clos limité par une surface S : ce vase est entièrement rempli par un liquide animé d'un mouvement irrotationnel acyclique; on demande de trouver le mouvement, sachant qu'il y a n sources données O_1, O_2, ..., O_n d'intensités A_1, A_2, ... A_n dans le vase.

Il s'agit de trouver le potentiel φ des vitesses : ce potentiel doit être, dans le vase, une fonction de la forme

$$\varphi = -\frac{A_1}{r_1} - \frac{A_2}{r_2} - \ldots - \frac{A_n}{r_n} + \psi(x, y, z), \tag{74}$$

ψ étant assujettie à être uniforme et finie dans le vase et à vérifier l'équation de Laplace $\Delta\psi = 0$. C'est cette fonction qui est l'inconnue du problème.

Tout d'abord, pour que ce problème soit possible, il faut que la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ des intensités des sources soit nulle : en effet, le vase étant clos, le flux total à travers la surface S est nul.

Cette condition étant supposée remplie, la vitesse de chaque élément fluide en contact avec la paroi S doit être tangente à la paroi : on a donc, en chaque point de la surface S,

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Or, d'après l'expression (74), on a

$$\frac{d\varphi}{dn} = -\frac{d}{dn}\left(\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \ldots + \frac{A_n}{r_n}\right) + \frac{d\psi}{dn}.$$

Donc, la fonction ψ doit, sur la surface S, vérifier la condition

$$\frac{d\psi}{dn} = \frac{d}{dn}\left(\frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \ldots + \frac{A_n}{r_n}\right). \tag{75}$$

En résumé, la fonction inconnue ψ est déterminée par les propriété suivantes : elle est harmonique, uniforme et finie dans la surface S et, en chaque point de S, sa dérivée normale prend une valeur donnée (75). Ces conditions déterminent ψ, à une constante près, comme nous l'avons vu dans l'étude des fonctions harmoniques (n° 594).

On peut faire effectivement le calcul de la fonction ψ quand la surface donnée S est un parallélépipède rectangle, en introduisant

une fonction harmonique analogue à la fonction Z employée pour la décomposition des fonctions elliptiques en éléments simples (voyez *Acta mathematica*, t. VIII, p. 265).

Lorsque l'une des dimensions du parallélépipède devient infinie, on a la solution du problème pour un prisme rectangle indéfini dans un sens : des cas particuliers de ce dernier problème ont été résolus par MM. Boussinesq, de Saint-Venant et Flamant (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1870).

Ces solutions, qu'il serait trop long d'exposer ici, reposent sur le principe des *images* que nous indiquerons sommairement, en adoptant le mode d'exposition de M. Basset.

751. Principe des images. — Supposons que, dans un liquide indéfini, il existe deux portions distinctes L_1 et L_2 du liquide, animées chacune d'un mouvement propre. Supposons, en outre, qu'on puisse tracer dans le fluide une surface continue fixe S, séparant complètement l'une de l'autre les deux portions L_1 et L_2, de telle façon que, dans les mouvements de ces deux portions, aucun élément de L_1 ne traverse S, ni aucun élément de L_2. On dit alors, d'après Sir William Thomson (Lord Kelvin), que le mouvement de L_2 est l'*image* du mouvement de L_1 par rapport à la surface S, et inversement.

Dans ces conditions, on pourrait, sans changer le mouvement de L_1, supprimer le liquide L_2, à condition de réaliser matériellement la surface S sous forme de cloison. De même, on pourrait, sans changer le mouvement de L_2, supprimer L_1 en réalisant S sous forme de cloison.

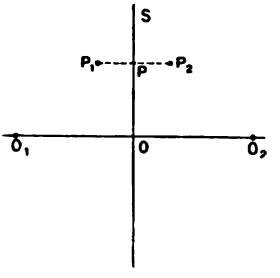
Premier exemple : *Image d'une source par rapport à un plan.* — Soient, dans un liquide indéfini dans tous les sens et animé d'un mouvement permanent, deux sources O_1 et O_2 de même intensité A, le mouvement étant nul à l'infini. Dans ces conditions, en appelant r_1 et r_2 les distances d'un point P aux deux sources, le mouvement considéré est un mouvement irrotationnel dans lequel le potentiel des vitesses est de la forme

$$\varphi = -\frac{A}{r_1} - \frac{A}{r_2} + \psi(x, y, z),$$

où ψ est une fonction harmonique uniforme et finie dans tout

l'espace, telle que $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ soient nuls à l'infini. Cette fonction est alors une constante d'après les théorèmes généraux sur les

Fig. 331.



fonctions harmoniques (n° 600), et l'on peut prendre, en laissant de côté cette constante,

$$\varphi = -\frac{A}{r_1} - \frac{A}{r_2}.$$

Par le milieu O de O_1O_2, menons un plan S perpendiculaire à O_1O_2 : nous allons montrer que le flux à travers un élément quelconque de S est *nul*, c'est-à-dire que $\frac{d\varphi}{dn}$ est nul tout le long de S. En effet, soient P un point de S; P_1 et P_2 deux points placés sur la perpendiculaire en P à S, symétriquement par rapport à ce plan. La dérivée de φ prise normalement à S est la limite du rapport

$$\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{P_1P_2},$$

quand les points P_1 et P_2 tendent l'un vers l'autre, φ_1 et φ_2 étant les valeurs de φ en ces points. Mais, par raison de symétrie, $\varphi_2 = \varphi_1$, et la limite est nulle.

Le plan S divise alors le liquide en deux parties, qui se meuvent indépendamment l'une de l'autre : l'un des mouvements est l'image de l'autre par rapport au plan S. On pourrait supprimer la partie du liquide placée d'un côté du plan, en remplaçant ce plan par une cloison; le mouvement de l'autre partie ne serait pas altéré. On aurait ainsi la solution de ce problème : *Trouver le mouvement irrotationnel d'un liquide indéfini remplissant tout l'espace situé d'un côté d'un plan fixe* S, *sachant que le*

mouvement est nul à l'infini, et qu'il y a une source dans le liquide.

DEUXIÈME EXEMPLE : *Écoulement permanent irrotationnel d'un liquide par le fond d'un vase indéfini limité par deux plans parallèles.* — Soient trois axes rectangulaires, l'axe Oz étant vertical ascendant; considérons un vase indéfini, limité par les trois plans $x = a$, $x = -a$, $z = 0$; le fond de ce vase est constitué par le plan xOy; imaginons qu'il soit percé d'une ouverture circulaire infiniment petite placée en O. Supposons ce vase plein d'un liquide pesant qui part du repos pour s'écouler par cette ouverture : le mouvement sera irrotationnel; supposons en outre le régime permanent établi. Nous admettrons que l'ouverture O constitue pour le liquide une source négative.

Dès lors, le potentiel $\varphi(x, y, z)$ des vitesses doit vérifier les conditions suivantes :

1° Il doit être dans le vase de la forme

$$\varphi = \frac{A}{r} + \psi(x, y, z),$$

A étant une constante positive, r la distance du point x, y, z au point O, et ψ une fonction harmonique finie et uniforme dans le vase;

2° Les dérivées partielles $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ doivent être nulles à l'infini dans le vase, car le mouvement y est nul;

3° Tout le long des parois, la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ normale aux parois doit être nulle; par conséquent, sur les parois latérales $x = \pm a$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ doit être nul et, sur le fond, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ doit être nul; cela revient à dire que les surfaces $\varphi = \text{const.}$ doivent couper orthogonalement les parois.

Pour obtenir une fonction φ remplissant toutes ces conditions, prenons les symétriques du point O par rapport aux parois, puis les symétriques de ces symétriques, etc., comme si le point O était un point lumineux et les parois des miroirs. Tous ces symétriques sont placés sur Ox et ont pour abscisses

$$\pm 2a, \quad \pm 4a, \quad \ldots, \quad \pm 2na, \quad \ldots,$$

n étant un entier positif quelconque.

Prenons alors la fonction définie par la série

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi = \frac{A}{r} &+ A\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-2na)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{2na}\right]\\ &- A\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x+2na)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{2na}\right],\end{aligned}\right.$$

qui est convergente, car, pour n infiniment grand, le terme général est de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$. Cette fonction remplit toutes les conditions :

1° Les termes qui suivent $\frac{A}{r}$ forment une fonction ψ harmonique uniforme, car chaque terme de la série étant à une constante près l'inverse de la distance du point x, y, z à un point fixe, est une fonction harmonique; cette fonction ψ est finie dans le vase;

2° Les dérivées partielles de φ sont évidemment nulles à l'infini dans le vase;

3° On a pour $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ une série qu'on peut écrire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -A\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\frac{x-2\nu a}{[(x-2\nu a)^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}};$$

pour $x=a$, cette série devient

$$Aa\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\frac{(2\nu-1)}{[(2\nu-1)^2a^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}},$$

somme qui est évidemment nulle, car les termes correspondant à deux valeurs égales et de signes contraires de l'entier impair $2\nu-1$ se détruisent; on vérifie de même que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ s'annule pour $x=-a$.

Enfin, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ est nul pour $z=0$ en tous les points distincts du point O et de ses images, car en écrivant cette dérivée on voit que chaque terme contient z en facteur.

La fonction φ étant trouvée, la pression est donnée par la première des équations (71).

Remarque. — Si dans le développement (76) on ne prenait pas soin de retrancher de chaque terme de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{(x \pm 2na)^2 + y^2 + z^2}}$$

la quantité $\frac{1}{2na}$, la série serait divergente.

C'est par un procédé analogue, emprunté à la démonstration classique du théorème de M. Mittag-Leffler, que l'on arrive à rendre convergentes les séries auxquelles conduit la méthode des images, dans des problèmes analogues au précédent relatifs à des vases ayant la forme de parallélépipèdes rectangles (*Acta mathematica*, t. VIII, p. 265). On trouvera des indications sur les développements en séries trigonométriques des fonctions auxquelles on est ainsi conduit dans un Mémoire de M. Appell (*Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Jordan, 1887, premier fascicule), et dans un Mémoire de M. Lerch (*Ibid.*, fasc. IV, 1899).

EXERCICES.

1. *Mouvement d'un liquide symétrique autour d'un axe; fonction de Stokes.* — Soit un liquide animé d'un mouvement symétrique autour de Oz. Appelons r, θ, z les coordonnées semi-polaires d'un élément : la vitesse W de cet élément est, par hypothèse, dans un plan passant par l'axe Oz et ne dépend pas de θ. Appelons s la composante de W suivant le rayon vecteur, et w sa composante suivant Oz : s et w sont fonctions de z et r; les lignes de courant sont dans des plans passant par Oz et, dans l'un de ces plans zOr, leur équation différentielle est

$$\frac{dz}{w} = \frac{dr}{s},$$

$$w\,dr - s\,dz = 0. \tag{1}$$

D'autre part, l'équation de continuité est (n° 740)

$$\frac{\partial(rs)}{\partial r} + r\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Cette équation montre que l'équation (1) admet le facteur intégrant r, et l'on peut écrire

$$r(w\,dr - s\,dz) = d\psi,$$

ψ étant une fonction de z et r. On a alors

$$rw = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad rs = -\frac{\partial\psi}{\partial z};$$

ψ s'appelle la *fonction de Stokes.*

S'il existe un potentiel des vitesses φ, ce potentiel est une fonction de z et r

seuls et l'on a aussi

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \qquad s = \frac{\partial \varphi}{\partial r};$$

l'équation de continuité est alors

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + r\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

et la fonction ψ vérifie l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

2. *Équations du mouvement des fluides déduites du principe d'Hamilton.* — Employons les variables de Lagrange et appelons U la fonction des forces. D'après le principe d'Hamilton (Tome II), considérons l'intégrale quadruple

$$\int\int\int\int \left[\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + U\right] \rho \, dx \, dy \, dz \, dt,$$

étendue à tous les éléments du liquide à l'instant t, puis aux valeurs de t de l'instant t_0 à l'instant t_1, les positions initiales et finales du système étant données. Cette intégrale, sous la condition de continuité

$$D = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{\rho_0}{\rho},$$

doit être un minimum pour le mouvement réel comparé aux mouvements infiniment voisins.

On trouvera le calcul détaillé dans BASSET, *A Treatise on hydrodynamcis*, t. I, p. 32.

3. Prouver que la fonction

$$\varphi = f(t)\left[(r^2 + a^2 - 2az)^{-\frac{1}{2}} + (r^2 + a^2 + 2az)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r}\right] + \psi(t)$$

est le potentiel des vitesses pour un liquide; étudier le mouvement correspondant. Trouver les surfaces d'égale pression en supposant le liquide soumis à la pesanteur et l'axe des z vertical ascendant. (BASSET, *ibid.*, p. 60.)

4. *Écoulement, par un orifice horizontal, d'un liquide pesant contenu dans un vase dont la paroi est de révolution autour de* Oz; *on suppose le vase alimenté de façon que le niveau reste constant; on suppose, en outre, le mouvement permanent et irrotationnel* (RESAL, *Mécanique générale*, t. II, p. 20$\frac{1}{4}$). — En appelant φ le potentiel des vitesses, et déterminant un point par ses coordonnées semi-polaires r, θ, z, on voit, comme le mouvement est symétrique autour de Oz, que φ dépend uniquement de r et θ; la vitesse W d'un élément a pour composantes :

$$s = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

suivant le rayon, et

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

suivant la verticale.

Les fonctions φ et p sont déterminées par les deux équations (n° 747)

$$\frac{p}{\rho} = gz - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

dont la seconde est l'équation de continuité. Les conditions aux limites sont que, sur la paroi latérale, les molécules glissent le long de cette paroi; et que sur la surface libre et sur le pourtour de l'orifice $z = h$ s'exercent des pressions égales à la pression atmosphérique. Resal trouve la solution du problème pour des formes particulières du vase déterminées de telle façon que l'on puisse satisfaire à toutes les conditions en prenant, pour φ, un polynome en r ayant pour coefficients des fonctions de z.

5. Démontrer que les équations (21) et (21') de Cauchy, p. 333, fournissent les intégrales générales des équations (43) et (43') de Helmholtz, p. 350 et 351.

Réponse. — Dans les équations de Cauchy, remplaçons D par sa valeur $\frac{\rho_0}{\rho}$; la première devient

$$\frac{\xi}{\rho} = \frac{\xi_0}{\rho_0}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{\rho_0}\frac{\partial x}{\partial c}. \tag{\alpha}$$

Prenons les dérivées totales par rapport au temps

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \frac{\xi_0}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\eta_0}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial b} + \frac{\zeta_0}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial c}. \tag{\beta}$$

Dans (β) faisons

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}, \qquad \ldots;$$

ordonnons par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ et tenons compte des équations (α) : nous aurons l'équation (43) de Helmholtz, p. 350.

CHAPITRE XXXV.

THÉORIE DES TOURBILLONS.

752. Indications historiques et bibliographiques. — La théorie des mouvements tourbillonnaires repose sur des théorèmes qui sont dus à Helmholtz (*Journal de Crelle*, t. 55, 1858) et qui constituent le plus grand progrès fait en Hydrodynamique depuis les recherches d'Euler, de Lagrange et de Cauchy.

Ces théorèmes ne s'appliquent qu'aux fluides parfaits dans lesquels il existe une relation entre la densité et la pression et qui sont soumis à des forces *conservatives*, c'est-à-dire dérivant d'une fonction de forces uniforme. Lorsque les conditions dans lesquelles est placé un fluide diffèrent très peu de ces conditions théoriques, on peut encore se servir des théorèmes de Helmholtz en considérant les résultats obtenus, non plus comme rigoureusement exacts, mais comme représentant seulement une première approximation.

Les mouvements tourbillonnaires paraissent jouer, dans les phénomènes météorologiques, un rôle considérable que Helmholtz a tenté de préciser.

Cette théorie a donné naissance à de nombreux et importants travaux de Kirchhoff, de lord Rayleigh, de J. Thomson et de lord Kelvin (Sir W. Thomson). Ce dernier a cherché, dans l'existence des mouvements tourbillonnaires, une explication mécanique de l'univers, en admettant que la matière est continue, mais que certaines portions sont animées de mouvements tourbillonnaires (atomes tourbillons) qui, d'après les théorèmes de Helmholtz, doivent se conserver.

Enfin, les équations qui servent à définir les mouvements tourbillonnaires présentent, avec les équations de l'Électrodynamique,

une analogie de forme qui a permis d'éclairer l'une des théories par l'autre.

On pourra consulter, pour l'exposé de la théorie des tourbillons, les Ouvrages suivants :

Vorlesungen über mathematische Physik, von G. Kirchhoff (Leipzig, Teubner; 1883).

A Treatise on Hydrodynamics, by Basset (Cambridge, Deighton, Bell and C°; 1888).

Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique, par M. Brillouin. (Paris, Gauthier-Villars; 1891. Extrait des *Annales de la Faculté de Toulouse.*)

Théorie des tourbillons, par M. Poincaré (Paris, Carré; 1893).

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

753. Hypothèses. — Nous supposons un fluide parfait dans lequel la densité est fonction de la pression et qui est soumis à des forces dérivant d'une fonction de forces uniforme U. En posant comme au n° 729,

$$Q = U - \int \frac{dp}{\rho}, \tag{1}$$

on obtient pour Q une fonction uniforme de x, y, z, t et l'on peut écrire les équations du mouvement, dans le système des variables de Lagrange,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{2}$$

C'est de cette forme d'équations que nous déduirons les théorèmes; on peut donc dire que ces théorèmes s'appliquent toutes les fois que les accélérations d'un fluide dérivent d'un potentiel $Q(x, y, z, t)$, uniforme dans toute l'étendue du fluide à chaque instant.

754. Lignes et surfaces fluides. — D'après ce que nous avons vu dans la théorie générale de la déformation d'un milieu continu, si des éléments fluides sont, à un instant t_0, disposés sur une surface S_0 ou sur une ligne L_0, ces mêmes éléments sont encore, à

un autre instant quelconque t, sur une surface S ou sur une ligne L. Nous appellerons la surface S et la ligne L, qui varient de forme et de position avec t, une surface *fluide* et une ligne *fluide*.

755. Constance de la circulation le long d'une ligne fluide fermée. — Considérons les particules fluides (a, b, c) qui, à l'instant initial $t = 0$, sont situées sur une ligne fermée L_0; à l'instant t, ces mêmes particules auront des coordonnées x, y, z fonctions de a, b, c, t et seront disposées sur une autre ligne fluide fermée L.

La *circulation* le long de la courbe L à l'instant t est définie (n° 710) par l'intégrale

$$ci = \int_L u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

prise le long de cette ligne. Dans cette intégrale t est constant et dx, dy, dz désignent les projections, sur les axes, d'un élément d'arc ds de la courbe L.

Lorsque t varie, la circulation, le long de la ligne fermée fluide L, *reste constante.* Pour démontrer ce théorème, nous mettrons l'intégrale ci sous une forme plus commode. A l'instant initial, les coordonnées a, b, c des éléments fluides placés sur L_0 sont des fonctions

$$a = \varphi(\lambda), \qquad b = \varphi_1(\lambda), \qquad c = \varphi_2(\lambda),$$

d'un paramètre λ qu'il faut faire varier de α à β pour obtenir successivement tous les points de L_0. A l'instant t les coordonnées x, y, z des éléments correspondants de la ligne fluide L sont des fonctions de a, b, c et t, c'est-à-dire de λ et t,

$$x = \psi(\lambda, t), \qquad y = \psi_1(\lambda, t), \qquad z = \psi_2(\lambda, t),$$

et λ doit varier de α à β pour que le point x, y, z décrive la courbe fermée L. Dès lors, en prenant λ comme variable dans l'intégrale ci, on a

$$ci = \int_\alpha^\beta \left(u\frac{\partial x}{\partial \lambda} + v\frac{\partial y}{\partial \lambda} + w\frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\lambda.$$

Cette intégrale dépend de t parce que u, v, w, $\frac{\partial x}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial z}{\partial \lambda}$ dépendent

de t. Calculons la dérivée de ci par rapport à t, en remarquant que, d'après les équations du mouvement (2), $\frac{du}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ··· et, d'après le théorème sur l'interversion des dérivées particlles, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial u}{\partial \lambda}$, ···· Nous aurons

$$\frac{dci}{dt} = \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \lambda} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \lambda} + u\frac{\partial u}{\partial \lambda} + v\frac{\partial v}{\partial \lambda} + w\frac{\partial w}{\partial \lambda} \right) d\lambda,$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{dci}{dt} = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(Q + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) d\lambda,$$

car Q peut être regardé comme fonction de λ par l'intermédiaire de x, y, z. L'intégrale indéfinie est alors

$$Q + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2),$$

et, comme elle est prise le long d'une courbe fermée, les deux limites α et β donnent le même point x, y, z, c'est-à-dire les mêmes valeurs aux fonctions Q, u, v, w : l'intégrale est donc *nulle*. La dérivée de ci par rapport à t étant *nulle*, ci est *constant*.

Autre démonstration. — On peut rattacher ce théorème à l'équation qui a été donnée au n° 731 comme généralisant le théorème de Lagrange. Nous avons vu en effet que, t ayant une valeur déterminée et dx, dy, dz désignant les variations de x, y, z qui correspondent à des variations da, db, dc des coordonnées initiales, on a

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = dF.$$

Dès lors, intégrons les deux membres en faisant décrire au point géométrique a, b, c une courbe fermée L_0 et en remarquant que le point correspondant x, y, z décrit la courbe L : l'intégrale du deuxième membre est nulle, car l'intégrale indéfinie $F(a, b, c, t)$ prend les mêmes valeurs au commencement et à la fin de l'intégration, et l'on a

$$\int_L u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int_{L_0} u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc,$$

ce qui montre que la circulation le long de L conserve une valeur constante.

756. Expression de la circulation à l'aide du théorème de Stokes. Flux de tourbillon ou intensité tourbillonnaire. — Faisons à l'instant t passer par la courbe L une surface simplement connexe S dont cette courbe soit la limite. D'après le théorème du n° 539, dans l'expression duquel on remplace les fonctions P, Q, R par u, v, w, on a

$$\int_L u\,dx + v\,dy + w\,dz = \iint_S \left[\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] d\sigma,$$

où l'intégrale double est étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S, α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$. Comme les quantités $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$, ... sont égales aux doubles des projections ξ, η, ζ du vecteur tourbillon Ω, on a

$$\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \ldots = 2(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) = 2\Omega_n,$$

Ω_n désignant la projection du vecteur tourbillon au point $d\sigma$ sur la normale à la surface S. On a donc, pour la circulation le long de la ligne L, la formule

$$ci = 2\iint_S \Omega_n\,d\sigma. \tag{3}$$

L'intégrale double du deuxième membre est ce que l'on appelle le *flux de tourbillon* à travers la portion de surface S, ou encore l'*intensité tourbillonnaire* de cette portion de surface.

On peut donc dire que *la circulation le long d'une courbe fermée limitant une portion de surface est égale à l'intensité tourbillonnaire de cette portion de surface.*

Quand t varie, les particules situées sur la surface continue S se déplacent en formant une surface fluide limitée par les positions successives de la ligne fluide L. Le théorème sur la constance de la circulation le long d'une ligne fluide peut donc aussi s'énoncer ainsi :

L'intégrale double $2\iint \Omega_n\,d\sigma$ *étendue à une surface fluide ne varie pas avec le temps,* ou encore, *le flux de tourbillon à*

travers une surface fluide ne varie pas avec t, ou enfin, *l'intensité tourbillonnaire d'une surface fluide est constante dans le temps.*

Cas d'une surface fermée. — Il est aisé de voir que *le flux de tourbillon à travers une surface fermée tracée dans le fluide est nul.* Cela résulte immédiatement de ce que les composantes ξ, η, ζ du vecteur Ω vérifient identiquement, d'après leurs expressions mêmes, à l'aide des dérivées de u, v, w, l'identité

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Alors, étant donnée une surface fermée S limitant un volume V, la formule (1) du n° 534 (théorème de Green), dans laquelle on remplace G, H, K par ξ, η, ζ, donne

$$\int\int_S (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\, d\sigma = \int\int\int_V \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) d\tau,$$

ou, d'après (4),

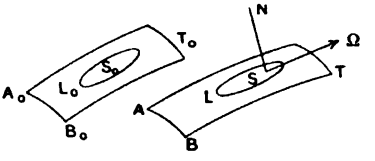
$$\int\int_S \Omega_l\, d\sigma = 0.$$

757. **Lignes et surfaces de tourbillon.** — Nous avons déjà défini les lignes de tourbillon, à un instant t, comme étant les lignes qui admettent pour tangente en chacun de leurs points le tourbillon $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ relatif à ce point (n° 707). Ces lignes forment une famille de courbes à deux paramètres telles qu'il en passe une, et une seule, par chaque point du fluide à l'instant t.

Surfaces de tourbillon. — Une surface de tourbillon à l'instant t est une surface telle qu'en chacun de ses points elle soit tangente au tourbillon en ce point. Sur une surface de tourbillon on peut tracer une infinité simple de lignes de tourbillon : il suffit, en effet, de tracer sur cette surface les lignes telles qu'en chacun de leurs points le vecteur tourbillon leur soit tangent. Inversement, pour obtenir toutes les surfaces de tourbillon, il suffit de prendre une surface engendrée par des lignes de tourbillon : par exemple, on tracera dans le fluide, à l'instant t, une courbe AB et l'on prendra la suite des lignes de tourbillon issues des divers points de AB;

ces lignes forment une surface de tourbillon. Si la courbe AB n'est pas fermée, la surface obtenue est simplement connexe (*fig.* 332). Si elle est fermée, on obtient une surface en forme de

Fig. 332.



tube appelée *tube tourbillon* (*fig.* 333) qui n'est plus simplement connexe. Soient T une surface, Ω le tourbillon en un point de cette surface, Ω_n la composante du tourbillon suivant la normale à T; pour que cette surface soit une surface de tourbillon, il faut et il suffit que l'on ait, en chaque point de T,

$$\Omega_n = 0;$$

c'est là, en effet, la condition pour que le vecteur Ω soit tangent à la surface.

Pour qu'à l'instant t une surface T *soit une surface de tourbillon, il faut et il suffit que la circulation le long de toute ligne fermée* L, *tracée sur la surface de façon à limiter une aire* S *simplement connexe, soit nulle.*

En effet, traçons sur T une ligne fermée L limitant une portion S de la surface (*fig.* 332); la circulation le long de L est donnée par la formule

$$ci = 2\int\int_S \Omega_n \, d\sigma.$$

Si la surface T est une surface de tourbillon, *ci* est nulle quelle que soit la courbe L, car Ω_n est nul. Réciproquement, si *ci* est nulle quelle que soit L, l'intégrale double du second membre est nulle *quelle que soit la portion* S *de la surface* T à laquelle elle est étendue; donc l'élément différentiel Ω_n est nul et la surface T est une surface de tourbillon.

Intersection de deux surfaces de tourbillon. — L'intersection L de deux surfaces de tourbillon T et T′ est une ligne de

tourbillon. En effet, le vecteur tourbillon Ω, en un point de L, est tangent à la fois aux deux surfaces T et T′; il est donc tangent à leur intersection L.

758. **Théorème de Helmholtz.** — *Les éléments fluides qui, à un instant t_0, se trouvent sur une surface ou une ligne de tourbillon, se trouvent encore, à un instant postérieur quelconque t, sur une surface ou une ligne de tourbillon.*

En effet, soient des particules fluides occupant à l'instant t_0 les divers points d'une surface de tourbillon T_0 (*fig.* 332) : à l'instant t ces particules se trouveront sur une autre surface T; nous voulons montrer que T est encore une surface de tourbillon à l'instant t.

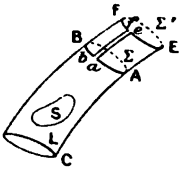
Pour cela, traçons sur T_0 une ligne fermée quelconque L_0 limitant une portion S_0 de T_0; à l'instant t la ligne fluide L_0 prendra une position L située sur T et limitant une portion S de T. La circulation a la même valeur le long des lignes fluides L_0 et L : elle est nulle le long de L_0, car T_0 est une surface de tourbillon; elle est donc nulle aussi le long de L. Mais L est une ligne quelconque de la surface T, assujettie seulement à limiter une aire S de cette surface; donc T est une surface de tourbillon, d'après les théorèmes du numéro précédent. On peut dire, en résumé, qu'une *surface de tourbillon est une surface fluide.*

Le théorème analogue pour les lignes de tourbillon en résulte immédiatement. En effet, une ligne de tourbillon à l'instant t_0 peut toujours être regardée comme l'intersection de deux surfaces de tourbillon T_0 et T'_0 à cet instant. Quand le temps varie, les deux surfaces fluides partant de T_0 et T'_0 varient en restant des surfaces de tourbillon; la ligne fluide qui leur est commune reste donc une ligne de tourbillon, car, à un instant quelconque, l'intersection de deux surfaces de tourbillon est une ligne de tourbillon.

759. **Tubes de tourbillon; moment ou intensité d'un tube.** — Supposons que, par les divers points d'une courbe fermée C tracée dans le fluide à l'instant t, on mène les lignes de tourbillon partant de ces points. On formera ainsi un tube appelé *tube de tourbillon* (*fig.* 333). C'est là une surface de tourbillon particulière

possédant les propriétés que nous venons d'indiquer. Si l'on trace sur cette surface une ligne fermée L limitant à elle seule

Fig. 333.



une aire S, la circulation le long de cette ligne est nulle.

Mais on peut tracer sur la surface du tube des lignes fermées d'une autre nature, par exemple la ligne C ou la ligne AB entourant le tube; une telle ligne ne limite pas *à elle seule* une aire sur le tube; la circulation le long d'une telle ligne n'est pas nulle. Dans la *fig.* 333, il faut supposer les points a et b confondus, pour que la ligne aABb soit fermée. Nous allons montrer que, *pour toutes les lignes de ce genre tracées sur un même tube de tourbillon, la circulation a la même valeur.* En effet, soit EF une deuxième ligne entourant une fois le tube. Menons, sur la surface du tube, une ligne ea joignant un point e de EF à un point a de AB, puis une ligne fb infiniment voisine de celle-là. Le contour aABbfFEea est une courbe fermée tracée sur le tube et limitant à elle seule une aire. D'après le théorème du n° 757, la circulation le long de ce contour est nulle. Cette circulation est une intégrale prise le long de ce contour : en la partageant en diverses intégrales correspondant aux différentes parties du contour, on a

$$ci(a\mathrm{AB}b) + ci(bf) + ci(f\mathrm{FE}e) + ci(ea) = 0,$$

où $ci\,(\ldots)$ signifie circulation le long du contour entre parenthèses. Mais la somme des termes $ci\,(bf) + ci(ea)$ est nulle, car les deux lignes bf et ea sont infiniment voisines et décrites en sens contraires dans l'intégration. On a donc

$$ci(a\mathrm{AB}b) + ci(f\mathrm{FE}e) = 0;$$

on en déduit, en remarquant que, la circulation étant une inté-

grale, sa valeur change de signe quand on intervertit les limites,

$$ci(aABb) = ci(eEFf).$$

Le théorème est ainsi démontré.

On peut le présenter sous une autre forme en imaginant qu'on mène, dans le tube, deux cloisons Σ et Σ' ayant pour contour les lignes AB et EF. Ces deux cloisons, avec la surface latérale du tube comprise entre elles, forment une surface fermée analogue à un cylindre de bases Σ et Σ'. Le flux total de tourbillon $\iint \Omega_n \, d\sigma$ à travers cette surface fermée est nul (fin du n° 756); mais le flux à travers la surface latérale du tube est nul, car $\Omega_n = 0$ sur les parois du tube; donc le flux à travers Σ est égal en valeur absolue au flux à travers Σ' : ou encore, l'intensité tourbillonnaire de Σ est égale à celle de Σ'. D'après le théorème de Stokes (n° 756) la circulation sur le contour $aABb$ de Σ est donc égale à la circulation sur le contour $eEFf$ de Σ'; ce qui démontre le théorème.

Il résulte de ce théorème qu'*un tube de tourbillon ne peut pas se terminer au milieu du fluide :* il se ferme sur lui-même comme un anneau, ou s'étend jusqu'à la paroi, ou jusqu'aux surfaces de discontinuité.

En résumé, *à chaque tube de tourbillon est attaché un nombre qui est la circulation le long d'une courbe fermée quelconque entourant une fois le tube, ou encore l'intensité tourbillonnaire d'une section transversale :* on appelle ce nombre le *moment* ou l'*intensité du tube de tourbillon*. Quand t varie, ce tube fluide change de forme et de position, mais il reste un tube de tourbillon et *son moment ne change pas,* car la circulation le long d'une ligne fluide reste *constante*.

Ainsi, l'ensemble des particules fluides dont les rotations ne sont pas nulles se trouve divisé en tubes de tourbillon, terminés aux parois ou aux surfaces de discontinuité, et en anneaux de tourbillon fermés, les tubes et les anneaux ayant des intensités constantes.

Les anneaux de fumée lancés par un fumeur dans un air calme ou les anneaux produits par la combustion spontanée du phosphure d'hydrogène sont précisément des anneaux de tourbillon qui se déplacent dans un air dénué de rotation.

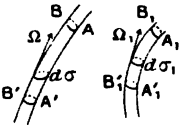
760. Tube de tourbillon infiniment délié (Wirbelfaden; filet de tourbillon). — Soit (*fig.* 334) un tube de tourbillon infiniment délié ou, d'après l'expression de Helmholtz, un *Wirbelfaden*.

Si l'on mène une section droite du tube $d\sigma$, l'intensité du tube est, par définition, la circulation le long du contour de la section, ou encore l'intégrale double

$$I = 2\int\int \Omega_n \, d\sigma,$$

étendue à cette section : mais, actuellement, la section renferme

Fig. 334.



un seul élément superficiel $d\sigma$, et Ω_n se confond avec Ω, car le tourbillon est normal à $d\sigma$, puisqu'il est tangent aux lignes de tourbillon formant le tube. L'intensité du tube est donc

$$I = 2\Omega \, d\sigma. \tag{5}$$

On en conclut que le produit de la section droite d'un tube de tourbillon infiniment délié par le tourbillon est constant : 1° à l'instant t tout le long du tube ; 2° quand t varie.

Il faut donc se représenter un tube de tourbillon infiniment délié comme une sorte de fil fluide qui se déplace et se déforme, en tourbillonnant en chaque point autour de la tangente en ce point, avec une vitesse angulaire inversement proportionnelle à sa section droite.

Voici une conséquence de ces propriétés. Dans un tube de tourbillon infiniment délié à l'instant t (*fig.* 334), menons deux sections parallèles infiniment voisines AB et A'B', dont la distance AA' comptée le long du tube soit l : appelons $d\sigma$ et ρ la section droite et la densité du cylindre élémentaire fluide ABA'B' ; la masse de ce cylindre fluide est $\rho l \, d\sigma$. A un autre instant t, les éléments fluides constituant le tube se sont transportés de façon à former un nouveau tube de tourbillon ; l'élément fluide ABA'B'

vient occuper la nouvelle position $A_1 B_1 A'_1 B'_1$ constituant un nouveau cylindre oblique d'arête $A_1 A'_1 = l_1$, de section droite $d\sigma_1$ et de densité ρ_1. En écrivant que la masse de l'élément considéré n'a pas changé, on a la relation de continuité

$$\rho l \, d\sigma = \rho_1 l_1 \, d\sigma_1.$$

D'autre part, l'intensité du tube étant constante dans le temps, on a, d'après (5),

$$\Omega \, d\sigma = \Omega_1 \, d\sigma_1,$$

où Ω désigne le tourbillon dans l'élément $ABA'B'$ et Ω_1 dans l'élément $A_1 B_1 A'_1 B'_1$. En rapprochant ces deux relations, on voit que

$$\frac{\rho l}{\Omega} = \frac{\rho_1 l_1}{\Omega_1} = \varepsilon, \tag{6}$$

ε étant une constante infiniment petite indépendante de t.

Rapprochement avec les équations de Helmholtz. — La propriété exprimée par la relation (6) est la traduction géométrique des équations de Helmholtz établies dans le n° 737.

Supposons, en effet, que t_1 diffère infiniment peu de t, $t_1 = t + dt$: appelons x, y, z et x', y', z' les coordonnées des points A et A', x_1, y_1, z_1 et x'_1, y'_1, z'_1 celles des points A_1 et A'_1 (*fig.* 334).

Le segment AA' est égal à l, c'est-à-dire, d'après (6), à $\frac{\varepsilon}{\rho}\Omega$ en grandeur, direction et sens; les projections du segment AA' sur les axes de coordonnées sont donc $\varepsilon\frac{\xi}{\rho}$, $\varepsilon\frac{\eta}{\rho}$, $\varepsilon\frac{\zeta}{\rho}$ et l'on a

$$x' = x + \varepsilon\frac{\xi}{\rho}, \qquad y' = y + \varepsilon\frac{\eta}{\rho}, \qquad z' = z + \varepsilon\frac{\zeta}{\rho}. \tag{7}$$

Un calcul analogue donne

$$x'_1 = x_1 + \varepsilon\frac{\xi_1}{\rho_1}, \qquad \ldots.$$

D'où l'on conclut

$$x'_1 - x' = x_1 - x + \varepsilon\left(\frac{\xi_1}{\rho_1} - \frac{\xi}{\rho}\right).$$

Dans cette équation, on a

$$\frac{\xi_1}{\rho_1} - \frac{\xi}{\rho} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) dt;$$

et, d'autre part, en désignant par u, v, w et u', v', w' les projections des vitesses des deux points A et A', on a évidemment

$$x'_1 - x' = u'\,dt, \qquad x_1 - x = u\,dt;$$

l'équation s'écrit donc

$$u' = u + \varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right). \tag{8}$$

Enfin u' est facile à calculer d'après les expressions (7) des coordonnées du point A'. En effet, $u(x, y, z, t)$ étant la projection sur Ox de la vitesse du point x, y, z au temps t, la projection u' de la vitesse du point $A'(x', y', z')$ au même instant est

$$u' = u\left(x + \varepsilon\frac{\xi}{\rho},\ y + \varepsilon\frac{\eta}{\rho},\ z + \varepsilon\frac{\zeta}{\rho},\ t\right),$$

ou en développant par la formule de Taylor, ε étant infiniment petit,

$$u' = u + \varepsilon\left(\frac{\xi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Portant cette valeur dans (8) on a l'équation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi}{\rho}\right) = \frac{\xi}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\rho}\frac{\partial u}{\partial z},$$

qui est identique à la première des équations (43) et (43') établies dans le n° 737.

761. Démonstration de Kirchhoff; équations de Cauchy. — Dans ses *Vorlesungen über mathematische Physik*, p. 167, Kirchhoff démontre les théorèmes de Helmholtz en employant la méthode analytique suivante dont le point de départ est dans les équations de Cauchy (n° 730). Reprenons les relations de Cauchy entre le tonrbillon (ξ, η, ζ) à l'instant t et le tourbillon (ξ_0, η_0, ζ_0) à l'instant initial :

$$\left\{\begin{aligned} D\xi &= \frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0, \\ D\eta &= \frac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0, \\ D\zeta &= \frac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

où D désigne le déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à a, b, c.

Les lignes de tourbillon ont pour équations différentielles à l'instant t

$$\text{(T)} \qquad \frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

A l'instant initial $t = 0$, elles ont pour équations différentielles

$$(\mathrm{T}_0) \qquad \frac{da}{\xi_0} = \frac{db}{\eta_0} = \frac{dc}{\zeta_0}.$$

Il faut d'abord montrer que les molécules qui, à l'instant initial, sont sur une ligne de tourbillon T_0, sont à l'instant t sur une ligne de tourbillon T. La molécule qui, à l'instant $t = 0$, a pour coordonnées a, b, c, possède au temps t les coordonnées x, y, z liées à a, b, c par les relations

$$x = f(a, b, c, t), \qquad y = f_1(a, b, c, t), \qquad z = f_2(a, b, c, t).$$

Quand le point géométrique a, b, c se déplace sur T_0 de da, db, dc, le point x, y, z subit un déplacement géométrique correspondant

$$(10) \qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial x}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial x}{\partial c}\,dc, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial y}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial y}{\partial c}\,dc, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial z}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial z}{\partial c}\,dc. \end{cases}$$

Le point a, b, c se déplaçant sur T_0, da, db, dc vérifient les relations (T_0) et l'on a, en appelant λ un facteur de proportionnalité,

$$(11) \qquad da = \lambda\xi_0, \qquad db = \lambda\eta_0, \qquad dc = \lambda\zeta_0.$$

Alors, d'après (9) et (10),

$$(12) \qquad \begin{cases} dx = \lambda\left(\dfrac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial x}{\partial c}\zeta_0\right) = \lambda\,\mathrm{D}\xi, \\ dy = \lambda\left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial y}{\partial c}\zeta_0\right) = \lambda\,\mathrm{D}\eta, \\ dz = \lambda\left(\dfrac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \dfrac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \dfrac{\partial z}{\partial c}\zeta_0\right) = \lambda\,\mathrm{D}\zeta, \end{cases}$$

relations qui montrent que dx, dy, dz sont proportionnels à ξ, η, ζ,

c'est-à-dire que le point géométrique x, y, z décrit une ligne de tourbillon T.

On peut montrer ensuite que l'intensité d'un tube tourbillonnaire infiniment délié se conserve dans le temps. Soient, en reprenant la figure (334) du n° 760, deux positions d'un même tube tourbillonnaire; on peut toujours supposer que la première correspond à l'instant initial et la seconde à un autre instant quelconque. Appelons a, b, c les coordonnées du point A, ρ_0 la densité en A, $\Omega_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ le tourbillon en ce point; $a + da$, $b + db$, $c + dc$ les coordonnées du point A', l_0 la longueur AA' et $d\sigma_0$ la section droite du tube entre A et A'. Soient x, y, z les coordonnées du point A_1, ρ la densité en A_1, $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ le tourbillon en ce point; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées de A'_1, l la longueur $A_1A'_1$ et $d\sigma$ la section droite du second tube entre A_1 et A'_1. Les points A_1 et A'_1 sont les positions des points A et A' à l'instant t. Les équations (11) signifient que les projections du segment AA' de longueur l_0 sont égales à celles du segment Ω_0 multipliées par λ; on a donc

$$l_0 = \lambda \Omega_0.$$

De même les équations (12) donnent

$$l = \lambda D\Omega.$$

On en conclut, en divisant membre à membre et remplaçant D par sa valeur $\frac{\rho_0}{\rho}$,

$$\frac{\Omega_0}{l_0 \rho_0} = \frac{\Omega}{l\rho}.$$

Mais en écrivant que la masse de l'élément fluide ABA'B' n'a pas changé, on a

$$\rho_0 l_0 \, d\sigma_0 = \rho l \, d\sigma.$$

On a donc enfin

$$\Omega_0 \, d\sigma_0 = \Omega \, d\sigma,$$

formule qui exprime que l'intensité du tube de tourbillon ne varie pas avec le temps.

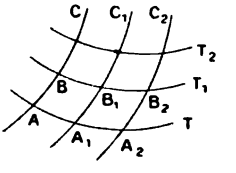
762. **Mouvement permanent.** — Dans le cas d'un mouvement permanent, les équations différentielles des lignes de tourbillon à

l'instant t,

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}, \tag{13}$$

ne contiennent pas t, car u, v, w et, par suite, ξ, η, ζ sont alors indépendants de t. Ces lignes forment donc, dans l'espace, au point de vue géométrique (*fig.* 335), un système invariable de lignes $T, T_1, T_2, \ldots$ tel qu'il en passe une et une seule par chaque point occupé par le fluide. Cela ne veut pas dire que les lignes de tourbillon considérées comme lignes fluides soient fixes : les par-

Fig. 335.



ticules fluides A, A_1, A_2, ... qui, à un instant t, se trouvent sur la ligne géométrique de tourbillon T (*fig.* 335), se meuvent en continuant à former une ligne de tourbillon et sont à un autre instant t_1 sur une autre ligne géométrique de tourbillon T_1 ; à cet instant t_1, d'autres éléments fluides sont venus prendre la place des premiers sur la ligne géométrique T.

Dans le cas du mouvement permanent, les lignes de courant, à un instant t, définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}, \tag{14}$$

sont aussi indépendantes du temps et forment, au point de vue géométrique, un système invariable de lignes C, C_1, C_2, ... tel qu'il en passe une par chaque point : ces lignes se confondent actuellement avec les trajectoires (n° 704); ce sont des *lignes fluides fixes,* en ce sens que les particules fluides, qui se trouvent au temps t sur une de ces lignes, suivent cette ligne dans leur mouvement. On a alors le théorème suivant :

Si le mouvement est permanent, il existe une infinité de surfaces fixes Σ *sur lesquelles on peut tracer une infinité de lignes de courant et une infinité de lignes de tourbillon.*

En effet, soit une ligne de tourbillon quelconque T (*fig.* 335), imaginons les lignes de courant C, C_1, C_2, ... partant des divers points A, A_1, A_2, ... de T : ces lignes forment une surface Σ répondant à la question. Pour le montrer, considérons les éléments fluides qui, à un instant t, se trouvent en A, A_1, A_2, ... sur T; ces éléments se meuvent en suivant respectivement les lignes de courant C, C_1, C_2, ... et en formant une ligne de tourbillon qui se déplace et se déforme sur la surface Σ : par exemple, à l'instant t_1, ces mêmes éléments sont en B, B_1, B_2, ... sur une ligne de tourbillon T_1 qui appartient évidemment à la surface Σ.

Équation des surfaces Σ. — Nous avons, dans le n° 737, écrit les équations du mouvement d'un fluide sous la forme donnée par Helmholtz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2(\eta w - \zeta v) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad \dots, \tag{15}$$

où H désigne la fonction

$$H = \frac{1}{2} W^2 + \int \frac{dp}{\rho} - U.$$

Le mouvement étant permanent, u, v, w, p ne dépendent pas de t; en outre t ne figure pas dans la fonction des forces U, de sorte que H est une fonction de x, y, z. Les équations (15) du mouvement peuvent alors s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} &= 2(\zeta v - \eta w), \\ \frac{\partial H}{\partial y} &= 2(\xi w - \zeta u), \\ \frac{\partial H}{\partial z} &= 2(\eta u - \xi v). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Nous allons montrer que les surfaces Σ ont pour équation

$$H = \text{const.} \tag{17}$$

Pour cela, nous commencerons par montrer que H est constant le long d'une ligne de tourbillon et le long d'une ligne de courant.

Appelons dx, dy, dz les projections sur les axes d'un élément d'une ligne de tourbillon : d'après les équations (13), ces projections sont proportionnelles à ξ, η, ζ et l'on a, en appelant λ la

valeur commune des rapports (13),

$$dx = \lambda\xi, \qquad dy = \lambda\eta, \qquad dz = \lambda\zeta;$$

d'autre part, la variation de H le long de la ligne de tourbillon est

$$d\mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}dz = \lambda\left(\xi\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \eta\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + \zeta\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right);$$

d'après les équations (16), cette variation est évidemment nulle et H est constant le long de la ligne de tourbillon.

De même, si l'on appelle dx, dy, dz les projections d'un élément d'une ligne de courant (14), on a, en appelant μ la valeur commune des rapports (14),

$$dx = \mu u, \qquad dy = \mu v, \qquad dz = \mu w;$$

d'où, pour la variation de H le long d'une ligne de courant,

$$d\mathrm{H} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}dz = \mu\left(u\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}\right),$$

quantité nulle d'après les équations (16); H est donc constant le long d'une ligne de courant. C'est ce que nous avons déjà vu au n° 742.

Il est alors aisé de voir que H a une valeur constante sur une surface Σ : en effet, H a une valeur constante sur une ligne de tourbillon T tracée sur cette surface et une valeur constante sur une ligne de courant C de cette même surface; ces deux valeurs sont *égales,* car les deux lignes ont un point commun A. Le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si le mouvement permanent était *irrotationnel,* le tourbillon ξ, η, ζ serait nul; alors H serait constant dans tout l'espace occupé par le fluide; c'est le théorème du n° 747.

II. — PARTIE DU FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT IRROTATIONNEL. CONNEXION.

763. **Circulation dans la partie irrotationnelle.** — Nous savons que, si un élément d'un fluide placé dans les conditions admises dans ce Chapitre tourne à un certain moment, il tournera toujours; si, au contraire, il ne tourne pas à un moment déterminé,

il ne tournera jamais. D'après cela, un fluide en mouvement se trouvera en général, d'après les conditions initiales, divisé en deux parties : l'une formée des éléments matériels pour lesquels le tourbillon est nul, l'autre formée des éléments matériels pour lesquels le tourbillon est différent de zéro; cette deuxième partie se divise en tubes et anneaux tourbillons comme nous venons de le voir. Par exemple, il peut arriver que la masse fluide totale se compose d'un seul anneau de tourbillon entouré de fluide animé d'un mouvement irrotationnel.

Nous porterons ici notre attention sur la partie du fluide animée d'un mouvement irrotationnel; dans cette partie du fluide, ξ, η, ζ sont nuls et les vitesses dérivent d'un potentiel $\varphi(x, y, z, t)$

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Circulation. — La circulation le long d'une ligne fluide fermée L est indépendante de t (n° 755) : pour la calculer, il suffit de donner à t une valeur numérique et d'évaluer l'intégrale

$$ci(\mathrm{L}) = \int_{\mathrm{L}} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int_{\mathrm{L}} d\varphi$$

prise le long de la ligne : cette intégrale est la variation continue subie par la fonction φ quand le point géométrique x, y, z fait le tour de la ligne L.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si une ligne fermée* L *tracée dans la partie sans rotation peut, par déformation continue et sans sortir de cette partie, être réduite à un point, la circulation le long de cette ligne est* NULLE *et, par suite, la variation de* φ *le long de cette ligne est nulle.*

En effet, imaginons dans le fluide sans rotation à l'instant t une ligne pouvant, par déformation continue, être réduite à un point: dans cette déformation, elle engendre une portion de surface S qu'elle limite entièrement, et, d'après le théorème de Stokes, on a (n° 756)

$$ci(\mathrm{L}) = 2\int\int_{\mathrm{S}} \Omega_n\,d\sigma;$$

mais la surface S étant tout entière dans la partie sans rotation, le tourbillon Ω est nul sur S, donc Ω_n est nul et la circulation est *nulle*. Il en résulte que la variation de la fonction φ, suivie par continuité le long de la ligne L, est nulle.

Étudions maintenant la circulation le long des diverses courbes qu'on peut tracer dans la partie sans rotation à un instant t.

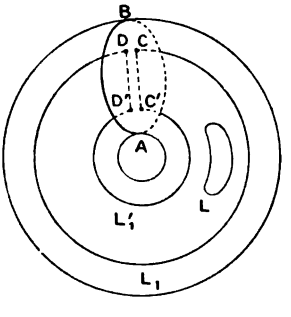
Différents cas sont à distinguer, suivant l'*ordre de connexion* du volume occupé par cette partie :

1° *La partie sans rotation occupe un volume simplement connexe.* — Rappelons qu'un volume est dit *simplement connexe* quand toute ligne fermée tracée dans ce volume peut, par continuité et sans sortir du volume, être réduite à un point; le volume d'une sphère est simplement connexe; le volume d'un tore ne l'est pas, car une courbe fermée tracée dans l'intérieur du tore, de façon à faire un tour autour de l'axe du tore, ne peut évidemment pas être réduite par continuité à un point sans sortir du tore.

Il résulte immédiatement du théorème fondamental précédent que, si le volume occupé par le fluide sans rotation est simplement connexe, la circulation le long d'une ligne quelconque de ce fluide est nulle et que le potentiel φ est uniforme dans ce fluide.

2° *La partie sans rotation occupe un volume doublement connexe.* — Un volume est doublement connexe lorsqu'en menant une seule cloison, analogue à un mur de refend plein, on peut, sans morceler le volume, le rendre simplement connexe. L'exemple

Fig. 336.



le plus simple est fourni par le volume intérieur à un tore (*fig.* 336) : ce volume n'est pas simplement connexe, mais, en menant une cloison telle que AB suivant un plan méridien du

tore, on rend le volume intérieur simplement connexe. Avant le tracé de cette cloison (ou coupure) on pouvait mener dans le volume deux espèces de lignes fermées.

Les unes, comme L, peuvent se réduire à un point par continuité sans sortir du volume; la circulation le long de ces lignes est *nulle,* ainsi qu'il résulte du théorème fondamental.

Les autres, comme L_1, ne peuvent pas se réduire à un point par continuité : elles font un ou plusieurs tours autour de l'axe du tore. Prenons une ligne L_1 faisant un tour : nous allons montrer que *la circulation a la même valeur constante* le long de toutes les lignes de ce genre. Pour cela, considérons deux lignes L_1 et L'_1 faisant chacune un tour autour de l'axe : prenons sur L_1 deux points C et D infiniment voisins l'un de l'autre, situés de part et d'autre de la cloison AB; prenons sur L'_1 deux points infiniment voisins C′ et D′ placés de la même façon, et joignons CC′ et DD′ par deux lignes infiniment voisines, placées de part et d'autre de la cloison AB. La ligne $CL_1DD'L'_1C'C$ est une ligne fermée de la première catégorie pouvant, par continuité, être réduite à un point sans sortir du volume. Donc, la circulation le long de cette ligne est *nulle,* et l'on a

$$ci(CL_1D) + ci(DD') + ci(D'L'_1C') + ci(C'C) = 0.$$

Mais les deux lignes CC′ et DD′ étant infiniment voisines, on a

$$ci(DD') = ci(CC') = -ci(C'C);$$

on en conclut

$$ci(CL_1D) + ci(D'L'_1C') = 0,$$
$$ci(CL_1D) = ci(C'L'_1D').$$

Le théorème est donc démontré.

Ainsi, sur toutes les lignes L faisant une fois le tour de l'axe du tore, la circulation a une même valeur μ_1 constante avec le temps : on appelle cette constante le *module de ces lignes*..

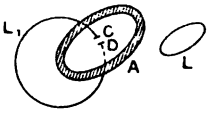
Il est aisé de voir que, si une ligne fermée tracée dans le volume fait deux tours autour de l'axe du tore, la circulation le long de cette ligne est $2\mu_1$, etc.

On conclut de ces théorèmes que le potentiel φ des vitesses n'est plus nécessairement uniforme dans le volume doublement connexe considéré; en effet, la circulation le long d'une ligne

fermée L_1 de C en D est la variation $\varphi(D) - \varphi(C)$ de la fonction φ suivie par continuité de C en D, D étant infiniment voisin de C; or nous venons de voir que cette circulation est μ_1; la fonction φ suivie par continuité prend donc aux deux points infiniment voisins C et D des valeurs différant de la constante μ_1. Après le tracé de la cloison AB, le volume est devenu simplement connexe : la fonction φ est alors uniforme dans ce nouveau volume, mais les valeurs qu'elle prend en deux points infiniment voisins l'un de l'autre, placés sur les deux faces de cette cloison, diffèrent de μ_1.

Un autre exemple intéressant de volume doublement connexe est fourni par l'espace indéfini extérieur à un anneau A (*fig.* 337): on peut, dans cet espace, tracer deux espèces de courbes fermées :

Fig. 337.

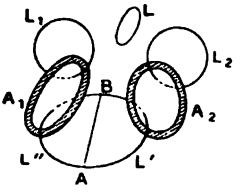


les unes, L, ne passant pas dans l'anneau et pouvant, par suite, être réduites par continuité à un point sans sortir du volume; le long de ces lignes, la circulation est nulle : les autres, L_1, passant une ou plusieurs fois dans l'anneau; le long de toutes les lignes L_1 passant une fois dans l'anneau, la circulation a la même valeur constante μ_1 appelée le *module de ces lignes;* le long des lignes passant deux fois dans l'anneau, elle a la valeur $2\mu_1$, etc. On peut actuellement rendre le volume simplement connexe en fermant l'ouverture de l'anneau par une cloison : la fonction φ est alors uniforme dans le nouveau volume ainsi obtenu, mais ses valeurs en deux points C et D, infiniment voisins de part et d'autre de cette cloison, diffèrent de μ_1. Ce cas se présente physiquement lorsqu'un seul anneau de tourbillon A se meut dans un fluide indéfini sans rotation : le fluide sans rotation occupe alors précisément un volume comme celui que nous venons de considérer. Le module μ_1 est l'intensité de l'anneau de tourbillon A, comme on le voit en considérant une ligne L_1 passant dans l'anneau, infiniment près de la surface de l'anneau.

3° *Volume triplement connexe.* — Un volume est triplement connexe quand on peut le rendre simplement connexe par deux

cloisons : tel serait, par exemple, le volume indéfini extérieur à l'ensemble de deux anneaux A_1 et A_2 (*fig.* 338). On peut tracer dans ce volume trois espèces de lignes fermées. Les premières, L, peuvent être réduites par continuité à un point sans sortir du volume; la circulation le long de ces lignes est nulle. Les deuxièmes, L_1, passent dans l'intérieur de l'un des anneaux : si elles y passent une fois, la circulation le long de ces lignes est une constante μ_1 appelée *module de ces lignes*. Les troisièmes, L_2, passent dans l'intérieur du deuxième anneau; si elles y passent une fois, la circulation le long de ces lignes est une constante μ_2, appelée *module de ces lignes*. Une ligne telle que L'L'' traversant une fois chaque anneau donne pour la circulation la valeur $\mu_1 + \mu_2$; en effet, en joignant deux points AB de cette ligne par une courbe passant à l'extérieur des deux anneaux, on voit que la circulation le long de la ligne L'L'' est la somme des circulations le long des lignes BAL'B et ABL''A, car

Fig. 338.



$$ci(BA) + ci(AB) = 0;$$

cette circulation est donc bien $\mu_1 + \mu_2$.

Actuellement, on rendrait le volume indéfini simplement connexe à l'aide de deux cloisons fermant l'une l'anneau A_1, l'autre l'anneau A_2. La fonction φ serait uniforme dans ce nouveau volume: la différence de ses valeurs en deux points infiniment voisins de part et d'autre de la première cloison serait μ_1; en deux points infiniment voisins de part et d'autre de la deuxième cloison, μ_2. Ce cas se présente physiquement quand deux anneaux de tourbillons se meuvent dans un fluide indéfini sans rotation.

Un autre exemple de volume triplement connexe serait le volume d'une salle parallélépipédique dont le plafond serait supporté par deux colonnes.

4° *Connexion d'ordre n.* — On traitera de même les volumes dont la connexion est d'ordre n et dont les types sont un volume indéfini avec $n-1$ anneaux ou une salle dont le plafond est supporté par $n-1$ colonnes : à l'aide de $n-1$ cloisons, on rendrait ces volumes simplement connexes.

764. Extension à un champ quelconque de vecteurs dérivant d'une fonction. — Tout ce que nous venons de dire de la circulation dans la partie irrotationnelle, s'étend évidemment à un champ uniforme de vecteurs u, v, w dérivant d'une fonction φ. Si le volume du champ est simplement connexe, φ est uniforme dans le champ. S'il est à connexion multiple d'ordre n, la fonction φ n'est pas nécessairement uniforme. On peut rendre le champ simplement connexe à l'aide de $n-1$ cloisons : la fonction φ est alors uniforme dans ce nouveau champ, mais ses valeurs en deux points infiniment voisins, placés de part et d'autre d'une des cloisons, diffèrent d'une constante μ_i relative à cette cloison. Il y a ainsi $n-1$ modules $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ correspondant aux $n-1$ cloisons.

III. — DÉTERMINATION DES VITESSES EN FONCTION DES TOURBILLONS DANS UN LIQUIDE INDÉFINI; MOUVEMENT DES TOURBILLONS.

765. Énoncé du problème général. — Quand, dans le mouvement d'un fluide, on connaît, à un instant t, les projections u, v, w de la vitesse d'une particule quelconque en fonction de x, y, z, on en conclut immédiatement, par des différentiations, les projections ξ, η, ζ du tourbillon pour chaque particule.

On peut se poser le problème inverse, que nous résoudrons dans des cas particuliers. Supposons que, dans un fluide en mouvement, on connaisse la distribution des tourbillons à un instant, c'est-à-dire ξ, η, ζ en fonction de x, y, z, et proposons-nous d'en déduire u, v, w.

Si nous pouvons résoudre ce problème, nous pourrons trouver le mouvement des tubes et anneaux de tourbillons, car, une fois u, v, w trouvés, nous connaîtrons la vitesse de chaque élément d'un tube ou d'un anneau de tourbillons. Nous pourrons, en particulier, déterminer la vitesse de déplacement de la surface d'un

tube ou anneau de tourbillon en chaque point. Nous supposerons, dans ce qui suit, u, v, w continus dans le fluide.

766. Cas d'un liquide. — Voyons comment le problème se pose pour un liquide incompressible contenu dans un vase fixe qu'il remplit entièrement ou pour un liquide indéfini.

Nous supposons ξ, η, ζ donnés en fonction de x, y, z dans toute l'étendue du liquide à un instant. Pour les éléments dénués de rotation, ξ, η, ζ sont nuls; pour les autres, ces quantités sont différentes de zéro. Il faut donc, ainsi que nous l'avons expliqué, regarder le liquide comme constitué par des tubes et anneaux de tourbillon dans lesquels ξ, η, ζ sont des fonctions différentes de zéro, entourés d'une portion de liquide sans rotation dans laquelle ξ, η, ζ sont nuls. Dans la masse totale, ξ, η, ζ sont donc des fonctions discontinues de x, y, z, car ces fonctions nulles à l'extérieur des tubes et anneaux de tourbillon sont différentes de zéro à l'intérieur et sur la surface de ces tubes et anneaux.

Il faudra alors déterminer u, v, w par les conditions suivantes :

1° On doit avoir dans tout le fluide

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = 2\xi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 2\eta, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta; \end{cases}$$

2° Les fonctions u, v, w doivent, dans tout le fluide, vérifier l'équation de continuité pour les liquides :

$$(19)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

3° Sur les parois du vase, la vitesse doit être tangente aux parois, de sorte qu'en appelant α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à une paroi, on doit avoir, sur cette paroi,

$$(20)\qquad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0;$$

si le vase est indéfini, le mouvement doit être nul à l'infini, c'est-à-dire que u, v, w doivent être nuls à l'infini.

Pour que le problème ainsi posé ait une solution, il faut évidemment que les fonctions données ξ, η, ζ vérifient identiquement la relation

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \tag{21}$$

qui résulte immédiatement des trois équations (18). Nous supposerons que cette relation ait lieu.

On peut alors établir la proposition suivante :

Si le vase est SIMPLEMENT CONNEXE, *les trois conditions indiquées déterminent complètement le problème, en ce sens que celui-ci n'admet qu'une solution.*

En effet, supposons un instant qu'on puisse trouver deux systèmes de fonctions u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 remplissant les trois conditions indiquées. D'abord, en écrivant que les conditions (18) sont vérifiées par les deux systèmes de fonctions, et retranchant membre à membre, on a les trois conditions

$$\frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial y} - \frac{\partial (v_1 - v_2)}{\partial z} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

qui montrent que les différences $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$, $w_1 - w_2$ sont les dérivées partielles d'une même fonction $\varphi(x, y, z)$:

$$u_1 - u_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_1 - v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w_1 - w_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ensuite, en écrivant les deux équations de continuité (19) et retranchant membre à membre, on a

$$\frac{\partial (u_1 - u_2)}{\partial x} + \frac{\partial (v_1 - v_2)}{\partial y} + \frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial z} = 0$$

ou encore

$$\Delta \varphi = 0.$$

Enfin, sur les parois du vase, on a, d'après (20),

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 = 0,$$
$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 = 0,$$

d'où, en retranchant,

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dn}=0,$$

la dérivée étant prise suivant la normale à la paroi.

Dès lors, si le vase est simplement connexe, on voit, par un raisonnement identique à ceux des nos 763-764 du paragraphe précédent, que l'intégrale

$$\int(u_1-u_2)\,dx+(v_1-v_2)\,dy+(w_1-w_2)\,dz$$

est nulle le long de toute courbe fermée tracée dans le vase et, par suite, que φ est uniforme dans le vase.

Cette fonction uniforme φ est alors, dans le vase, une fonction *harmonique* partout finie et telle que $\frac{d\varphi}{dn}$ soit nul sur les parois : cette fonction est *constante* (n° 594). Donc les dérivées partielles de φ par rapport à x, y, z sont nulles et l'on a

$$u_1=u_2,\qquad v_1=v_2,\qquad w_1=w_2;$$

la solution est unique.

La conclusion serait la même si le vase était indéfini, car le mouvement étant supposé nul à l'infini, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ seraient nuls à l'infini et la fonction harmonique uniforme φ serait encore constante dans le vase.

Remarque sur le cas où le vase ne serait pas simplement connexe. — Si le vase était à connexion multiple, les conditions indiquées ne suffiraient plus à déterminer complètement le problème. Prenons, par exemple, un vase doublement connexe, comme un tore (*fig.* 336). Pour pouvoir affirmer que les deux solutions u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 sont identiques, il faudrait, en outre, leur imposer cette condition que l'intégrale

$$\int(u_1-u_2)\,dx+(v_1-v_2)\,dy+(w_1-w_2)\,dz, \tag{22}$$

prise le long d'une ligne L_2 non réductible à un point, est *nulle;* ou, ce qui revient au même, que φ est *uniforme* dans le vase. On peut alors conclure, comme précédemment, que φ est constant.

Nous avons, dans le cas d'un vase doublement connexe, appelé *module* relatif à la classe des lignes fermées L_2 la valeur constante de la circulation

$$\int u\,dx + v\,dy + w\,dz,$$

le long d'une de ces lignes. La condition que l'intégrale (22) soit nulle peut donc être remplacée par celle-ci : les deux solutions u_1, v_1, w_1 et u_2, v_2, w_2 doivent, pour être identiques, donner la même valeur pour le module relatif aux lignes L_2.

D'une façon générale, si le vase n'est pas simplement connexe, il faudra, pour déterminer entièrement u, v, w, connaître les *modules* relatifs aux diverses classes de courbes fermées qu'on peut tracer dans le vase (n°s 763-764).

Nous étudierons, dans ce paragraphe, le cas simple d'un liquide indéfini.

767. Cas d'un liquide indéfini. — Nous allons montrer comment, pour un liquide indéfini dans tous les sens, on peut calculer u, v, w connaissant ξ, η, ζ, avec cette hypothèse que u, v, w et ξ, η, ζ sont nuls à l'infini. Le liquide est alors divisé en anneaux tourbillons, dans lesquels ξ, η, ζ sont différents de zéro, en mouvement dans une masse liquide sans rotation dans laquelle ξ, η, ζ sont nuls.

Tout d'abord, les fonctions inconnues u, v, w devant vérifier la condition de continuité (19), on peut mettre ces quantités sous la forme (n° 545)

$$(23)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$$

Il reste à déterminer P, Q, R par les conditions (18). Or on a

identiquement

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2},$$

ce qu'on peut écrire, en ajoutant et retranchant $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) - \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}.$$

Désignons, pour abréger, par M la quantité

$$M = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{24}$$

nous aurons

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} - \Delta P;$$

de même

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \Delta Q,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial z} - \Delta R.$$

Les équations (18) seront donc satisfaites si l'on détermine P, Q, R de façon à vérifier les quatre relations

$$\Delta P = -2\xi, \qquad \Delta Q = -2\eta, \qquad \Delta R = -2\zeta, \tag{25}$$

$$M = 0. \tag{26}$$

En se reportant à la théorie du potentiel newtonien (n° 581), on obtient facilement des fonctions P, Q, R vérifiant les trois relations (25). Nous avons vu, en effet, que le potentiel newtonien U d'une masse continue vérifie, en chaque point x, y, z de l'espace, l'équation de Poisson

$$\Delta U = -4\pi\rho,$$

ρ étant la densité de la matière attirante au point considéré, de telle façon que le deuxième membre est nul, si le point considéré est hors de la masse attirante. D'après cela, imaginons qu'à un instant quelconque t, les anneaux de tourbillon soient remplis d'une matière attirante continue dont la densité ρ en un point x', y', z' soit égale à $\frac{1}{2\pi}\xi'$, la notation ξ' désignant la valeur

$$\xi(x', y', z', t)$$

que prend au point considéré la projection du tourbillon sur Ox. Si l'on pose ensuite

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$
$$d\tau = dx'\,dy'\,dz',$$

de façon que $d\tau$ soit un élément de volume d'un des anneaux de tourbillon, le potentiel de cette masse attirante fictive, au point x, y, z, a pour expression

$$\text{(27)} \qquad P = \frac{1}{2\pi}\int\int\int_V \frac{\xi'}{r}\,d\tau,$$

l'intégrale étant étendue au volume V occupé par les anneaux de tourbillon. Ce potentiel P est une fonction x, y, z qui vérifie, dans tout l'espace, la relation

$$\Delta P = -2\xi,$$

ξ étant la valeur du tourbillon au point x, y, z. On a ainsi formé une fonction P vérifiant la première des conditions (25). On obtiendra de même des fonctions Q et R satisfaisant aux deux autres conditions (25) en prenant

$$\text{(28)} \qquad \begin{cases} Q = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int\int_V \frac{\eta'}{r}\,d\tau, \\ R = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int\int_V \frac{\zeta'}{r}\,d\tau, \end{cases}$$

ces intégrales étant étendues au volume V occupé par les anneaux de tourbillon, et η', ζ' désignant les valeurs de η et ζ dans l'élément $d\tau$ de coordonnées x', y', z'.

Il reste à montrer que ces trois fonctions P, Q, R ainsi calculées vérifient dans tout l'espace la condition $M = 0$.

1° *La quantité* M *est nulle dans les anneaux de tourbillon.* — En effet, supposons le point x, y, z intérieur à un tube de tourbillon, c'est-à-dire à la masse fictive attirante. Appelons S la surface qui limite les anneaux de tourbillon, $d\sigma$ un élément superficiel quelconque de cette surface, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale menée à $d\sigma$ extérieurement à S. Nous avons, au n° 579, calculé la dérivée première par rapport à x d'un

potentiel

$$U = \iiint_V \frac{\rho}{r}\, d\tau,$$

dans le cas où le point x, y, z est intérieur à la masse attirante, et nous avons trouvé, en appelant a, b, c les coordonnées de l'élément $d\tau$,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\iint_S \frac{\alpha\rho}{r}\, d\sigma + \iiint_V \frac{1}{r}\frac{\partial \rho}{\partial a}\, d\tau.$$

Appliquons cette formule et les formules analogues aux trois fonctions P, Q, R, en nous rappelant que les coordonnées de l'élément $d\tau$ sont appelées ici x', y', z'. Nous aurons

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\alpha\xi'}{r}\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\frac{\partial \xi'}{\partial x'}\, d\tau,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\beta\eta'}{r}\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\frac{\partial \eta'}{\partial y'}\, d\tau,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{\gamma\zeta'}{r}\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\frac{\partial \zeta'}{\partial z'}\, d\tau.$$

En ajoutant membre à membre et remarquant que les trois intégrales doubles sont étendues à la même surface S et les trois intégrales triples au même volume V, on a

$$M = -\frac{1}{2\pi}\iint_S \frac{1}{r}(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'}\right) d\tau.$$

Mais on voit immédiatement que l'élément différentiel de chacune de ces intégrales est nul. D'abord, pour l'intégrale double, on a, sur S,

$$\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta' = 0,$$

car la surface S étant une surface de tourbillon, le vecteur ξ', η', ζ' relatif à chaque point de cette surface lui est tangent. Ensuite, pour l'intégrale triple, comme les fonctions ξ, η, ζ de x, y, z vérifient l'identité (21) par hypothèse, ces mêmes fonctions, quand on y remplace x, y, z par x', y', z' vérifient l'identité

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x'} + \frac{\partial \eta'}{\partial y'} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z'} = 0$$

en tous les points du volume V. On a donc enfin

$$M = 0$$

dans le volume V.

2° *La quantité* M *est aussi nulle dans tout l'espace extérieur aux anneaux de tourbillon.* — En effet, P, Q, R, étant trois potentiels de masses continues, ont leurs dérivées premières continues dans tout l'espace et nulles à l'infini. Donc M est continu dans tout l'espace et nul à l'infini. Cette fonction M, étant nulle dans les anneaux de tourbillon et étant continue, est aussi nulle sur la surface S limitant l'ensemble de ces anneaux. La fonction M admet des dérivées premières et deuxièmes en dehors des anneaux de tourbillon; enfin, c'est une fonction harmonique, car on a identiquement

$$\Delta M = \frac{\partial}{\partial x}\Delta P + \frac{\partial}{\partial y}\Delta Q + \frac{\partial}{\partial z}\Delta R,$$

quantité nulle, puisque $\Delta P, \Delta Q, \Delta R$ sont nuls en dehors des anneaux de tourbillon en vertu des relations (25). Mais alors, en continuant à porter notre attention sur l'espace extérieur aux anneaux de tourbillon, nous voyons que M est une fonction harmonique uniforme et finie dans cet espace, admettant des dérivées premières et deuxièmes, et s'annulant sur les limites de cet espace; on a donc (n° 590)

$$M = 0$$

dans tout l'espace extérieur aux anneaux.

En résumé, M est nul partout.

Toutes les conditions imposées à P, Q, R sont remplies et les formules (23) donnent les valeurs de u, v, w en fonction des tourbillons ξ, η, ζ. Ces valeurs sont, en remplaçant P, Q, R par leurs expressions (27) et (28),

$$(29)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int\int_V \left(\zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - \eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\tau, \\ v = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int\int_V \left(\xi'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \zeta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\tau, \\ w = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int\int_V \left(\eta'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \xi'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\tau. \end{cases}$$

768. Interprétation des formules précédentes. — Comme on a

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{y-y'}{r^3}, \qquad \ldots,$$

les formules ci-dessus s'écrivent

$$u = \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{\eta'(z-z') - \zeta'(y-y')}{r^3}\, d\tau,$$

où η', ζ', ..., sont les valeurs du tourbillon dans l'élément $d\tau$ situé au point x', y', z' à l'instant t. Chaque élément $d\tau$ de la masse qui constitue les anneaux de tourbillon contribue ainsi, pour sa part, à donner un terme infiniment petit dans les sommes qui déterminent les composantes u, v, w de la vitesse W en un point quelconque P de la masse liquide, que ce point soit intérieur ou extérieur aux anneaux de tourbillon.

Un élément $d\tau$ de coordonnées x', y', z', pris dans un des anneaux de tourbillon, est animé de la rotation ξ', η', ζ'; si cette rotation entraînait tous les points de l'espace, comme s'ils appartenaient à un même corps solide, le point $P(x, y, z)$ aurait une vitesse W′ de projections

$$\begin{aligned} u' &= \eta'(z-z') - \zeta'(y-y'), \\ v' &= \zeta'(x-x') - \xi'(z-z'), \\ w' &= \xi'(y-y') - \eta'(x-x'), \end{aligned}$$

d'après les formules élémentaires des rotations. Les termes provenant de l'élément $d\tau$ dans chacune des sommes (29) peuvent alors s'écrire

$$(30) \qquad \frac{u'}{2\pi r^3}\, d\tau, \qquad \frac{v'}{2\pi r^3}\, d\tau, \qquad \frac{w'}{2\pi r^3}\, d\tau;$$

ce sont les projections sur les axes d'un vecteur H égal à

$$\frac{W'}{2\pi r^2}\, d\tau$$

appliqué au point P. Les projections u, v, w de la vitesse W du point P peuvent alors s'écrire

$$(31) \qquad u = \iiint_V \frac{u'}{2\pi r^3}\, d\tau, \quad v = \iiint_V \frac{v'}{2\pi r^3}\, d\tau, \quad w = \iiint_V \frac{w'}{2\pi r^3}\, d\tau;$$

et l'on voit que la vitesse W est la somme géométrique des vecteurs $H = \frac{W'}{2\pi r^2} d\tau$ appliqués en P.

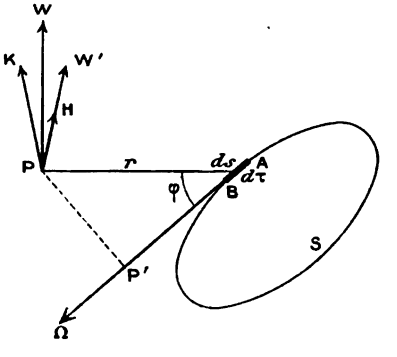
On peut dire que *la part contributive de chaque élément* $d\tau$ *des anneaux de tourbillon, dans la vitesse* W *d'un point quelconque* P *de la masse, est égale à la vitesse* W′ *que prendrait ce point par l'effet de la rotation* (ξ', η', ζ') *de l'élément* $d\tau$, *multipliée par* $\frac{d\tau}{2\pi r^2}$, r *désignant la distance du point* P *à l'élément* $d\tau$ (*fig.* 339).

Part contributive d'un anneau de tourbillon infiniment délié. — L'ensemble des anneaux de tourbillon peut être divisé en anneaux infiniment déliés (n° 760) ayant chacun une certaine intensité I. Il est dès lors important de déterminer le vecteur qui représente la part contributive d'un de ces anneaux dans la vitesse d'un point quelconque P de la masse liquide. L'élément $d\tau$ peut être regardé comme étant obtenu en coupant un anneau de tourbillon infiniment délié (*Wirbelfaden*) par deux sections droites A et B dont l'aire est $d\sigma$ et la distance AB égale à ds (*fig.* 339). On a alors

$$d\tau = d\sigma\, ds.$$

La rotation Ω de cet élément $d\tau$ est tangente à l'anneau; la vitesse W′ que prendrait le point P par l'effet de la rotation Ω

Fig. 339.



est égale au produit de Ω par la distance PP′ du point P à l'axe Ω de la rotation; elle est dirigée perpendiculairement au plan de P et de Ω dans le sens qui résulte du sens de la rotation Ω. Mais PP′

est évidemment égal à $r \sin\varphi$, si l'on appelle r la distance de P à $d\tau$ et φ l'angle de Ω avec r; donc

$$W' = \Omega \overline{PP'} = \Omega r \sin\varphi.$$

Le vecteur H, représentant la part contributive de l'élément $d\tau$ dans la vitesse du point P, est alors, puisque $d\tau = d\sigma\, ds$,

$$H = \frac{W'}{2\pi r^3} d\tau = \frac{\Omega \sin\varphi}{2\pi r^2} d\sigma\, ds.$$

Comme l'intensité (ou le moment) de l'anneau de tourbillon infiniment délié est (n° 760)

$$I = 2\Omega\, d\sigma,$$

le vecteur H peut s'écrire aussi

$$H = \frac{I}{4\pi r^2} ds \sin\varphi.$$

Enfin, le vecteur K, représentant la part contributive de l'anneau de tourbillon infiniment délié, dans la vitesse W du point P, est la somme géométrique K de ces vecteurs H, somme étendue à tous les éléments ds de l'anneau infiniment délié.

Connaissant le vecteur K relatif à chaque anneau de tourbillon infiniment délié, on aura la vitesse W au point P en faisant la somme géométrique des vecteurs K pour tous les anneaux infiniment déliés qui constituent les anneaux considérés.

Analogie électrodynamique. — On voit maintenant se manifester une analogie électrodynamique des plus remarquables. Imaginons que l'anneau de tourbillon infiniment délié que nous venons de considérer soit remplacé par un conducteur linéaire parcouru par un courant électrique d'intensité I, et qu'au point P on place un pôle magnétique de masse 1. L'action du courant sur le pôle P est un vecteur K (n° 574) résultant de vecteurs élémentaires égaux à

$$\frac{k I\, ds \sin\varphi}{r^2},$$

appliqués en P perpendiculairement au plan P ds, k désignant une constante qui dépend du choix des unités. Si, pour simplifier, on choisit les unités de façon que $k = \frac{1}{4\pi}$, on voit que l'action K de

ce courant fictif sur le pôle P représente la part contributive de l'anneau de tourbillon infiniment délié dans la vitesse du point P.

La vitesse W du point P est donc identique à l'action résultante exercée, sur le pôle magnétique P, par un ensemble de courants électriques parcourant chaque tube de tourbillon infiniment délié avec une intensité égale à l'intensité de ce tube.

769. **Potentiel des vitesses provenant de l'action d'un tube de tourbillon infiniment délié.** — Nous avons vu au n° 574 que, si un courant électrique d'intensité I parcourt un conducteur linéaire fermé, l'action K de ce courant sur un pôle magnétique P est identique à celle d'un feuillet magnétique S limité par le courant, la constante μ relative au feuillet (n°s 571 et 574) étant égale à kI. Or, comme nous l'avons démontré dans la théorie du potentiel newtonien (n° 571), l'action K d'un feuillet magnétique sur un point P dérive d'un potentiel U qui a, pour valeur absolue, le produit de la constante μ relative au feuillet par l'angle solide sous lequel on voit du point P le feuillet considéré. Nous avons, au n° 571, appelé cet angle Ω. Comme, actuellement, la lettre Ω est employée pour désigner le tourbillon, nous emploierons la lettre Θ pour désigner cet angle solide et nous prendrons, pour le potentiel U,

$$U = -\mu\Theta, \qquad \mu = kI,$$

en mettant en évidence le signe — dans le but de donner une règle plus simple pour déterminer le signe de Θ.

Mais nous venons de voir que, pour identifier l'action K du courant électrique avec la part contributive de l'anneau infiniment délié de tourbillon d'intensité I, dans la vitesse du point P, il suffit de prendre $k = \frac{1}{4\pi}$; le vecteur K dérive donc alors du potentiel

$$U = -I\frac{\Theta}{4\pi},$$

Θ désignant l'angle solide sous lequel on verrait du point P l'aire d'une surface fictive continue S ayant pour contour l'anneau de tourbillon infiniment délié. Pour préciser cette valeur du potentiel, il faut regarder Θ comme positif ou comme négatif suivant que, du point P, on voit l'une ou l'autre des deux faces de la

surface S. On verra, indépendamment de toute analogie électromagnétique, quelle est celle des faces de S qu'il convient de regarder comme positive, en remarquant que, I étant positif, le potentiel U augmente quand Θ diminue et, inversement, diminue quand Θ augmente. Or le vecteur W dérivant de la fonction U est dirigé dans le sens des U croissants, c'est-à-dire des Θ décroissants. Si le point P est près de la surface S du côté positif, Θ va en croissant quand on s'approche de la surface; la vitesse du point P est donc dirigée de façon à l'éloigner de la surface; au contraire, si P est du côté négatif, sa vitesse est dirigée de façon à l'approcher de la surface S : un point P du liquide placé sur cette surface fictive S aurait donc sa vitesse dirigée du côté positif de S. Or, en prenant le point P sur cette surface S, dans l'intérieur de l'anneau, on verra immédiatement, d'après l'orientation des tourbillons Ω le long de l'anneau, dans quel sens les rotations Ω tendent à déplacer le point P : on connaîtra donc la face de S qu'il faut regarder comme positive.

Par exemple, dans la *fig.* 339, en supposant l'anneau plan et situé dans le plan du papier et la surface S confondue avec la portion de papier intérieure à l'anneau, les rotations Ω tendent toutes à imprimer aux points de S des vitesses dirigées au-dessous du papier; la face positive de S est donc le dessous de la feuille de papier.

Le potentiel des vitesses dues à un anneau infiniment délié

$$-\mathrm{I}\frac{\Theta}{4\pi}$$

n'est pas uniforme dans l'espace extérieur à l'anneau; sa variation continue le long d'une ligne L_1 traversant une fois l'intérieur de l'anneau, comme dans la *fig.* 337, est égale à I; cela tient à ce que, dans les mêmes conditions, la variation continue de Θ est égale à 4π. Ce dernier point devient évident dans le cas d'un anneau plan, car, en prenant comme surface S fermant l'anneau la partie du plan de l'anneau qui lui est intérieure, on voit que $\Theta = +2\pi$ quand le point P est infiniment voisin de S du côté positif, et $\Theta = -2\pi$ quand le point P en est infiniment voisin du côté négatif. Pour une discussion détaillée de la variation de l'angle solide Θ sous lequel on voit un contour donné, nous ren-

verrons à l'Ouvrage de M. Duhem : *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme,* t. III, Chap. III.

770. **Anneau de tourbillon infiniment délié et feuillet de doublets.** — Nous avons vu que le potentiel des vitesses dû à un doublet (n° 749) est identique au potentiel de l'attraction d'un aimant élémentaire. Un feuillet magnétique uniforme étant formé d'aimants élémentaires tous égaux, normaux au feuillet, on voit que le potentiel de l'attraction d'un feuillet magnétique S est identique au potentiel des vitesses d'une surface S constituée par des doublets élémentaires tous égaux, normaux à cette surface et uniformément répartis : les sources positives étant sur la face que nous venons de définir comme la face positive et les sources négatives sur l'autre. Le potentiel des vitesses dues à un anneau de tourbillon infiniment délié est alors identique à celui d'un feuillet de doublets S ayant cet anneau comme contour. Si l'anneau existait seul dans un fluide sans rotation, on pourrait se représenter le mouvement de ce fluide comme si le fluide sortait du feuillet par les sources positives et rentrait dans le feuillet par les sources négatives : dans ce cas, la circulation, c'est-à-dire la variation continue du potentiel des vitesses le long d'une ligne L_1 traversant l'anneau serait égale à l'intensité de l'anneau (*fig.* 337), et le feuillet de doublets jouerait le rôle de la cloison S employée à propos de cette *fig.* 337, pour rendre simplement connexe l'espace extérieur à l'anneau.

771. **Potentiel des vitesses dans la partie irrotationnelle d'un liquide indéfini avec un nombre quelconque d'anneaux de tourbillon.** — Si nous partageons les anneaux de tourbillon en anneaux infiniment déliés, le potentiel des vitesses dues à un de ces anneaux est, en tous les points P de l'espace extérieur à l'anneau,

$$U = -I\frac{\Theta}{4\pi},$$

I désignant l'intensité de l'anneau et Θ l'angle solide sous lequel on voit du point P la face positive de l'intérieur de l'anneau. Le potentiel des vitesses en un point P de la partie irrotationnelle étant la somme des potentiels dus aux divers anneaux infiniment

déliés, ce potentiel est

$$\varphi = \int U = -\frac{1}{4\pi}\int I\,\theta,$$

la somme étant étendue à tous les anneaux infiniment déliés.

Ce potentiel φ est égal au potentiel de l'action résultante de tous les courants électriques I sur un pôle magnétique P.

Pour un anneau infiniment délié, on a

$$I = 2\Omega\, d\sigma,$$

Ω étant le tourbillon en un point de l'anneau et $d\sigma$ la section droite en ce point; on a donc aussi

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi}\int \Omega\,\theta\, d\sigma,$$

la somme étant étendue aux sections droites des divers anneaux.

Ces formules supposent que le point P considéré est dans la partie irrotationnelle. En un point de la partie tourbillonnaire du liquide, les vitesses ne dérivent plus d'un potentiel, d'après la définition même du tourbillon; on peut les calculer par les formules générales (29).

D'après l'analogie électrodynamique, en remplaçant chaque anneau de tourbillon infiniment délié par un courant de même intensité, on obtient un système de courants qui produit un champ magnétique. Le vecteur qui représente l'action de ce champ en un point quelconque P est, à un facteur constant près, identique à la vitesse de la particule fluide placée en P. Les lignes de force magnétiques se confondent avec les lignes de courant hydrodynamiques.

772. Vitesse de déplacement de la surface d'un anneau ou d'un tube de tourbillon. — La surface d'un tube ou d'un anneau de tourbillon constitue une surface de discontinuité. En effet, les vitesses varient d'une manière continue d'un côté à l'autre de cette surface; mais leurs dérivées premières, par rapport aux coordonnées, sont discontinues, puisque le vecteur tourbillon est égal à zéro d'un côté de cette surface et différent de zéro de l'autre.

La surface S du tube ou de l'anneau se déplace avec le temps; son équation est donc de la forme

$$F(x, y, z, t) = 0. \tag{32}$$

On définit la vitesse de déplacement de cette surface en chaque point, à chaque instant, comme on l'a fait au n° 714 pour définir la vitesse de propagation d'une discontinuité. Cette vitesse, en chaque point de S, à chaque instant, est alors (n° 714)

$$G = \frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{33}$$

où l'on a posé

$$k = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}. \tag{34}$$

On peut donner une autre expression de cette vitesse en remarquant qu'il se présente ici une circonstance particulière, c'est que la surface de discontinuité est une *surface fluide* formée constamment des mêmes molécules. Dans ces conditions spéciales, si l'on appelle u, v, w les projections de la vitesse W d'un élément fluide de la surface S du tube de tourbillon, et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale en ce point à cette surface

$$\alpha = \frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad \beta = \frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \gamma = \frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial z}, \tag{35}$$

on a

$$G = \alpha u + \beta v + \gamma w = W_n, \tag{36}$$

W_n représentant la projection de la vitesse W sur la normale.

En effet, si l'on suit une particule x, y, z de la surface du tube dans son mouvement, on voit que ses coordonnées vérifient constamment l'équation (32). On a donc, en dérivant le premier membre de cette équation par rapport à t, en suivant la particule

$$\frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial z}w + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

d'où, d'après les relations (35),

$$\frac{1}{k}\frac{\partial F}{\partial t} = \pm(\alpha u + \beta v + \gamma w),$$

ce qui démontre la formule (36).

D'un côté de la surface S le mouvement est irrotationnel, u, v, w dérivent d'un potentiel φ; on a donc, en un point infiniment voisin de la surface placé en dehors du tube,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

à cause de la continuité de u, v, w, ces expressions sont valables aussi près qu'on le veut de la surface S. On a alors, pour la vitesse de déplacement de cette surface, en chaque point, à chaque instant,

$$G = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{d\varphi}{dn},$$

la dérivée $\frac{d\varphi}{dn}$ étant prise suivant la normale à la surface du tube du côté irrotationnel.

773. Expression de la force vive du liquide. — La force vive totale du liquide a pour expression

$$2T = \rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, d\tau,$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume du liquide. On peut lui donner une autre forme de façon à la faire dépendre des tourbillons. Pour cela, introduisons les trois fonctions P, Q, R précédemment définies par les formules (27 et 28) en fonction des tourbillons. On a

$$u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \ldots$$

La force vive peut donc s'écrire

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint \left[u \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\tau.$$

On pourra intégrer par parties chacun des six termes. Par exemple, en remplaçant $d\tau$ par $dx\, dy\, dz$, on a, pour le premier terme,

$$\iiint u \frac{\partial R}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint dx\, dz \int_{-\infty}^{+\infty} u \frac{\partial R}{\partial y}\, dy,$$

les limites étant infinies, car le fluide est indéfini; l'intégration par

parties donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u\frac{\partial R}{\partial y}\,dy = \Big| u\,R \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} R\frac{\partial u}{\partial y}\,dy;$$

la partie intégrée est nulle aux limites, car u et R sont nuls à l'infini; on a donc enfin

$$\iiint u\frac{\partial R}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = -\iiint R\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy\,dz.$$

On transforme de même chacun des six termes et l'on a finalement

$$T = \frac{1}{2}\rho\iiint\left[P\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]d\tau,$$

ou enfin, d'après la notation des tourbillons,

$$T = \rho\iiint(P\xi + Q\eta + R\zeta)\,d\tau.$$

Si, dans cette expression, on remplace P, Q, R par leurs valeurs en fonction des tourbillons [formules (27 et 28)], on a T en fonction des tourbillons, pour un liquide indéfini.

774. Application : anneaux de tourbillon circulaires de même axe. — Imaginons un liquide indéfini dans lequel toutes les lignes de tourbillon sont des cercles dont le plan est perpendiculaire à l'axe Oz et dont le centre est sur cet axe; supposons, en outre, que la grandeur du tourbillon est la même tout le long d'un même cercle.

On peut regarder comme évident, par raison de symétrie, que si cette distribution des tourbillons a lieu à un certain instant, elle aura lieu toujours.

Le liquide est alors, à un instant quelconque, composé d'une partie irrotationnelle indéfinie entourant des anneaux de tourbillon analogues à des tores de révolution autour de Oz. Ces anneaux se déplacent en restant de révolution autour de Oz, mais leurs sections droites peuvent changer de forme en même temps que varient

les rayons des divers anneaux de tourbillon infiniment déliés qui les constituent.

Pour calculer les vitesses en fonction des tourbillons, nous suivrons la méthode générale qui se simplifie notablement en raison de la symétrie du mouvement autour de Oz.

Nous emploierons, pour définir la position d'un point, les coordonnées semi-polaires q, θ, z, q désignant la distance du point à Oz; les variables q et θ sont liées à x et y par les relations

$$x = q\cos\theta, \qquad y = q\sin\theta.$$

Vitesse. — Le mouvement étant symétrique autour de Oz, la distribution des vitesses est la même dans tous les plans passant par Oz; la vitesse W d'un élément P est située dans le plan zOP et dépend uniquement de q, z et t, et non de θ. Appelons s la composante de cette vitesse suivant le prolongement de la perpendiculaire abaissée du point P sur l'axe Oz et w sa composante parallèle à Oz : s et w seront fonctions de q, z et t. Les projections u, v, w de la vitesse sur les axes Ox, Oy, Oz seront

$$u = s\cos\theta, \qquad v = s\sin\theta, \qquad w. \tag{37}$$

Tourbillon. — Comme, par hypothèse, les lignes de tourbillon sont des circonférences ayant pour axe Oz, le tourbillon Ω relatif à un point P à un instant t doit être perpendiculaire au plan zOP. Or on a, en général,

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Actuellement, d'après (37), u, v, w dépendent de x et y par l'intermédiaire de q et θ qui sont des fonctions de x et y,

$$q = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

et l'on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial q}{\partial x} = \dfrac{x}{q} = \cos\theta, & \dfrac{\partial q}{\partial y} = \dfrac{y}{q} = \sin\theta, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2+y^2} = -\dfrac{\sin\theta}{q}, & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{\cos\theta}{q}. \end{cases} \tag{38}$$

On en conclut, en différentiant les formules (37) et se rappelant

que s et w ne dépendent que de q, z et t,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z}\cos\theta, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial q}\cos\theta,$$
$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z}\sin\theta, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial q}\sin\theta,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial s}{\partial q} - \frac{s}{q}\right)\sin\theta\cos\theta.$$

On a donc

$$(39)\quad \xi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial q}\right)\sin\theta, \qquad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial q}\right)\cos\theta, \qquad \zeta = 0.$$

Ces formules montrent que le vecteur tourbillon Ω, qui est perpendiculaire au plan zOP, a pour valeur

$$(40)\qquad \Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial q}\right),$$

cette valeur étant positive ou négative suivant que le vecteur Ω est dirigé dans le sens positif ou le sens négatif des rotations autour de Oz. La valeur de Ω dépend uniquement de q, z et t.

Détermination des vitesses. — Si nous revenons maintenant à notre problème, Ω est donné aux divers points P en fonction de q, z et t, et il s'agit d'en déduire les vitesses s et w. Pour préciser ce point, imaginons qu'on mène un plan fixe quelconque par Oz : ce plan coupe les anneaux de tourbillon suivant certaines aires A_1, A_2, ...; on suppose Ω connu, à l'instant t, en fonction de q, z aux divers points de ce plan, Ω étant nul en dehors des aires et différent de zéro dans l'intérieur.

Nous avons, dans le cas général, déterminé les vitesses en fonction des tourbillons, pour un liquide indéfini, par les formules (23) du n° 767, dans lesquelles P, Q, R sont données par les intégrales définies (27 et 28) étendues aux volumes des anneaux de tourbillon. Dans ces formules, $d\tau$ est un élément de volume des anneaux ayant pour coordonnées x', y', z', les lettres ξ', η', ζ' désignent les projections du tourbillon correspondant à l'élément $d\tau$, et la lettre r désigne la distance

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

du point x', y', z' au point x, y, z.

Comme, actuellement, ζ est identiquement nulle, la troisième des formules (28), dans laquelle $\zeta' = 0$, donne immédiatement $R = 0$; on a donc pour u, v, w les expressions suivantes :

$$u = -\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad v = \frac{\partial P}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \tag{41}$$

les fonctions P et Q de x, y, z étant définies par les deux premières des formules (27 et 28),

$$P = \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{\xi' d\tau}{r}, \qquad Q = \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{\eta' d\tau}{r}. \tag{42}$$

Appelons q', θ', z' les coordonnées semi-polaires de l'élément $d\tau$, q, θ, z celles du point x, y, z; nous aurons

$$x = q\cos\theta, \qquad y = q\sin\theta, \qquad x' = q'\cos\theta', \qquad y' = q'\sin\theta',$$
$$r = \sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq'\cos(\theta' - \theta) + (z - z')^2}. \tag{43}$$

Pour évaluer $d\tau$, supposons les anneaux de tourbillons décomposés en anneaux infiniment déliés de révolution autour de Oz; appelons $d\sigma$ la section d'un de ces anneaux de rayon q' par un plan passant par Oz. Si l'on considère deux de ces plans faisant entre eux l'angle $d\theta'$, ils découpent dans l'anneau un élément $d\tau$ ayant la forme d'un cylindre droit de base $d\sigma$ et de hauteur $q'\,d\theta'$: on a donc

$$d\tau = d\sigma\, q'\, d\theta'.$$

Nous avons, en outre, d'après (39),

$$\xi = -\Omega\sin\theta, \qquad \eta = \Omega\cos\theta,$$

Ω étant donné en fonction de q, z et t; donc

$$\xi' = -\Omega'\sin\theta', \qquad \eta' = \Omega'\cos\theta',$$

Ω' étant une fonction connue de q', z' et t. On a donc

$$\begin{cases} P = -\dfrac{1}{2\pi}\iiint_V \dfrac{\Omega' q'\sin\theta'}{r}\, d\sigma\, d\theta', \\ Q = \dfrac{1}{2\pi}\iiint_V \dfrac{\Omega' q'\cos\theta'}{r}\, d\sigma\, d\theta'. \end{cases} \tag{44}$$

Pour calculer ces intégrales étendues au volume des anneaux, on pourra d'abord faire la somme des éléments correspondant à un

anneau infiniment délié, puis la somme de ces sommes. Or, pour un anneau infiniment délié, q', z' et $d\sigma$ sont constants tout le long de l'anneau, θ' varie de α à $\alpha + 2\pi$, α étant un angle arbitraire. La somme des éléments de chaque intégrale relative à cet anneau infiniment délié est donc

$$(45)\qquad \begin{cases} P' = -\frac{1}{2\pi}\Omega' q'\, d\sigma \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\sin\theta'\, d\theta'}{r}, \\ Q' = \frac{1}{2\pi}\Omega' q'\, d\sigma \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\cos\theta'\, d\theta'}{r}. \end{cases}$$

Une fois ces quantités P′ et Q′ calculées, il restera, pour avoir P et Q, à faire la somme des quantités analogues pour tous les anneaux infiniment déliés dont sont composés les anneaux donnés; les deux sommes

$$P = \iint P', \qquad Q = \iint Q'$$

seront des intégrales doubles étendues à tous les éléments $d\sigma$ des aires A_1, A_2, ..., suivant lesquelles un plan passant par Oz coupe les anneaux considérés.

Les expressions de P′ et Q′ peuvent être simplifiées de façon à amener P′ et Q′ à dépendre de la même intégrale. Pour cela, faisons, dans l'intégrale qui donne P′, le changement de variable

$$\theta' = \theta + \varepsilon,$$

ε étant la nouvelle variable qu'il suffira de faire varier de 0 à 2π pour que θ' varie dans un intervalle d'étendue 2π. On aura

$$d\theta' = d\varepsilon, \qquad \sin\theta' = \sin\theta\cos\varepsilon + \cos\theta\sin\varepsilon,$$
$$r = \sqrt{q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon + (z - z')^2}.$$

Donc

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\sin\theta'\, d\theta'}{r} = \sin\theta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{r} + \cos\theta \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{r}.$$

Mais, dans le deuxième membre, la deuxième intégrale est nulle, car les éléments de cette intégrale sont deux à deux égaux et de signes contraires; on a donc

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\sin\theta'\, d\theta'}{r} = \sin\theta \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{r}.$$

On trouve, par le même calcul,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\cos\theta'\, d\theta'}{r} = \cos\theta \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{r}.$$

Ce qui donne, pour P′ et Q′, les formules définitives que l'on peut écrire

$$P' = -S' \sin\theta, \qquad Q' = S' \cos\theta, \tag{46}$$

S′ désignant l'intégrale elliptique

$$S' = \frac{\Omega' q'\, d\sigma}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{r}, \tag{47}$$

sur laquelle nous reviendrons plus loin.

En faisant la somme de ces valeurs de P′ et Q′ pour tous les éléments $d\sigma$ des aires A_1, A_2, ..., on a enfin pour P et Q des expressions de la forme

$$P = -S \sin\theta, \qquad Q = S \cos\theta, \tag{48}$$

S désignant l'intégrale

$$S = \frac{1}{2\pi} \iint \Omega' q'\, d\sigma \int_{0}^{2\pi} \frac{\cos\varepsilon\, d\varepsilon}{r}, \tag{49}$$

qui est fonction de q, z et t. Cette intégrale étant calculée, on a P et Q en fonction de θ, q, z et t, ou encore en fonction de x, y, z, t, car q et θ sont des fonctions de x et y définies par les formules (38). Les fonctions P et Q étant connues, les composantes u, v, w de la vitesse sont données par les formules (41). Or, on a, en différentiant (48) et tenant compte des formules (38),

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial S}{\partial z}\sin\theta, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z}\cos\theta,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial q}\sin^2\theta - \frac{S}{q}\cos^2\theta,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial q}\cos^2\theta + \frac{S}{q}\sin^2\theta,$$

donc

$$u = -\frac{\partial S}{\partial z}\cos\theta, \qquad v = -\frac{\partial S}{\partial z}\sin\theta, \tag{50}$$

$$w = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial q} + \frac{S}{q} \tag{51}$$

En comparant aux formules (37) on en déduit la composante s de la vitesse suivant le rayon vecteur

$$s = -\frac{\partial S}{\partial z}. \tag{52}$$

En résumé, une fois l'intégrale S calculée, on obtient immédiatement la distribution des vitesses par les formules (50) et (51).

Équation différentielle que vérifie la fonction S; current function *de Stokes*. — Nous avons vu, dans le cas général, que P Q, R vérifient les trois équations

$$\Delta P = -2\xi. \qquad \Delta Q = -2\eta, \qquad \Delta R = -2\zeta;$$

la troisième équation est identique, car R et ζ sont nuls. Si, dans les deux autres, on remplace P, Q par $-S\sin\theta$, $S\cos\theta$ et ξ, η par $-\Omega\sin\theta$, $\Omega\cos\theta$, elles donnent une même équation aux dérivées partielles définissant S en fonction de q et z. On peut obtenir cette équation d'une façon plus rapide en se servant de l'expression (40) du tourbillon

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial q}\right).$$

Si, dans cette expression, on remplace s et w par leurs valeurs (52) et (51), on a immédiatement pour S l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^2} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{S}{q}\right) = -2\Omega, \tag{53}$$

où Ω est nul en dehors des aires A_1, A_2, ... et a une valeur donnée dans l'intérieur de ces aires. Au lieu de S, on introduit quelquefois une autre fonction que Basset appelle *Stokes current function*. Posons

$$\psi(q, z, t) = qS; \tag{54}$$

les formules (52) et (51) donnent

$$qs = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad qw = \frac{\partial \psi}{\partial q}. \tag{55}$$

La distribution des vitesses est donc connue d'une manière simple dès que l'on connaît ψ.

Cette fonction définit les lignes de courant : remarquons en effet que ces lignes sont actuellement situées dans des plans passant par Oz; dans l'un de ces plans, elles ont pour équation différentielle, à l'instant t,

$$\frac{dq}{s} = \frac{dz}{w},$$

ou

$$w\,dq - s\,dz = 0,$$

c'est-à-dire

$$d\psi = 0, \qquad \psi = \text{const.}$$

Ainsi, les lignes de courant ont pour équation $\psi = \text{const.}$

Remarquons enfin qu'en éliminant ψ entre les deux relations (55) on a l'équation

$$\frac{\partial(qs)}{\partial q} + \frac{\partial(qw)}{\partial z} = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation de continuité d'Euler dans les hypothèses actuelles (n° 740).

Cas d'un seul anneau infiniment délié. — Supposons qu'il existe, dans un liquide indéfini, un seul anneau de tourbillon infiniment délié affectant la forme d'un tore d'axe Oz entouré de liquide irrotationnel. Soient $d\sigma$ la section droite de cet anneau, Ω' la valeur du tourbillon constante en grandeur tout le long de l'anneau, q' le rayon de cet anneau à l'instant t et z' la cote de son plan.

Actuellement, les sommes (44) P et Q comprennent un seul élément : P et Q se réduisent à P′ et Q′, et S à S′,

$$S' = \frac{\Omega' q'\,d\sigma}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varepsilon\,d\varepsilon}{r}.$$

Dans cette intégrale, on peut intégrer seulement de 0 à π et doubler le résultat; on a ainsi, en mettant en évidence l'intensité

$$I = \frac{1}{2}\Omega'\,d\sigma$$

de l'anneau, et faisant $\psi = S'q$,

$$\psi = \frac{2Iqq'}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\varepsilon\,d\varepsilon}{\sqrt{(z-z')^2 + q^2 + q'^2 - 2qq'\cos\varepsilon}}.$$

Cette fonction ψ étant connue, les formules (55) donnent, pour les composantes de la vitesse,

$$(56) \qquad s = -\frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{1}{q}\frac{\partial\psi}{\partial q}.$$

On a ainsi, pour ψ, s, w, des valeurs finies en tous les points z, q de la partie irrotationnelle; mais, si I est regardé comme fini, on trouve, pour les points de l'anneau lui-même,

$$z = z', \qquad q = q',$$

des valeurs infiniment grandes ou indéterminées. Cela tient à ce que nous nous plaçons dans le cas fictif d'un seul anneau infiniment délié d'intensité finie. En réalité, on aura des anneaux d'épaisseur finie qu'on pourra décomposer en anneaux infiniment déliés d'intensités infiniment petites. Cette difficulté est analogue à celle qu'on rencontre quand on étudie le potentiel newtonien d'un point isolé de masse finie, potentiel devenant infini au point; tandis qu'en réalité on est en présence d'attractions de masses continues décomposables en masses infiniment petites.

Tout d'abord, en calculant $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ par la règle de différentiation sous le signe $\int$, on voit que $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ contient $z - z'$ en facteur. Si donc on fait $z = z'$, en donnant à q une valeur quelconque différente de q', on trouve $\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$ et, d'après (56), $s = 0$. Une particule placée dans le plan de l'anneau a donc une vitesse normale à ce plan, puisque la composante radiale est nulle : ce fait est d'ailleurs évident géométriquement, d'après les théorèmes généraux du n° 768 qui donnent la part contributive de chaque élément de l'anneau de tourbillon dans la vitesse d'un point de son plan. Les particules situées dans la partie du plan de l'anneau intérieure à l'anneau se meuvent dans un certain sens déterminé par le sens des tourbillons, comme nous l'avons expliqué p. 422; les particules situées dans la partie du plan extérieure se meuvent en sens contraire. Il résulte de là que *le rayon de l'anneau ne varie pas avec le temps,* car, s'il variait, les particules fluides situées dans le voisinage immédiat de l'anneau, dans le plan $z = z'$, auraient une

vitesse radiale différente de zéro. Ainsi, l'anneau se déplace parallèlement à lui-même sans changer de grandeur.

Si l'on calcule ensuite $\frac{\partial\psi}{\partial q}$, la deuxième des formules (56) donnera w pour un point quelconque de l'espace : en faisant $z = z'$ dans l'expression de w, on aura, en particulier, en grandeur et en signe, la vitesse d'une particule située dans le plan de l'anneau. Pour préciser le sens dans lequel se meuvent les particules fluides du plan de l'anneau, supposons Ω' positif, c'est-à-dire le vecteur tourbillon de chaque élément de l'anneau orienté dans le sens positif des rotations autour de Oz. Alors, si nous prenons l'élément liquide placé au centre de l'anneau à l'instant t, la part contributive de tous les tourbillons dans la vitesse de ce point est dirigée dans le sens positif de Oz : cet élément se meut donc dans ce sens. Pour calculer sa vitesse, appliquons le théorème général du n° 768; si l'élément central tournait autour du tourbillon Ω' d'un élément $d\tau$ de l'anneau avec la vitesse angulaire Ω', il posséderait une vitesse normale au plan de l'anneau et égale à $\Omega' q'$; la part contributive réelle de l'élément $d\tau$ dans la vitesse de l'élément central est donc

$$\Omega' q' \frac{d\tau}{2\pi q'^2},$$

car la distance de $d\tau$ au centre est q'; la vitesse totale w_0 de l'élément central est donc

$$w_0 = \frac{\Omega'}{2\pi q'^2} \int d\tau,$$

ou encore, comme $\int d\tau$ est le volume $2\pi q' d\sigma$ de l'anneau,

$$w_0 = \frac{\Omega'}{q'} d\sigma = \frac{I}{2q'},$$

I étant l'intensité de l'anneau.

Après cet aperçu général, nous allons étudier la fonction ψ qui, comme nous allons le voir, s'exprime par une intégrale elliptique. En posant

$$\varepsilon = 2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right), \qquad d\varepsilon = -2\, d\varphi,$$

$$k^2 = \frac{4qq'}{(z-z')^2 + (q+q')^2}, \tag{57}$$

on a, en effet,

$$\psi = \frac{2I\sqrt{qq'}}{\pi} k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} d\varphi, \tag{58}$$

k^2 étant une quantité positive qui est moindre que 1, quand q et z ont des valeurs quelconques ($q > 0$), et qui devient égale à 1 lorsque $q = q'$, $z = z'$, c'est-à-dire lorsque le point de coordonnées q, z vient sur l'anneau. Introduisons le module complémentaire k' par la formule

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{(z - z')^2 + (q - q')^2}{(z - z')^2 + (q + q')^2}; \tag{59}$$

cette quantité k' est infiniment petite au voisinage de l'anneau; géométriquement, la valeur de k' pour une position $P(q, z)$ du point P du fluide s'obtient en prenant les deux points A et B où le plan zOP coupe l'anneau infiniment délié, et en écrivant

$$k' = \frac{PA}{PB},$$

A étant celui des deux points qui est le plus rapproché de P.

La formule (58) permet d'étudier la fonction ψ pour une position quelconque du point du fluide q, z : on pourrait, par exemple, développer ψ en une série procédant suivant les puissances positives croissantes de k. Nous nous bornerons à étudier ce qui se passe au voisinage de l'anneau : quand le point $P(q, z)$ du fluide est infiniment voisin de l'anneau, q est voisin de q', z de z', k de 1, et l'intégrale qui figure dans ψ est infiniment grande. Nous allons mettre en évidence la partie principale de ψ pour des valeurs de k voisines de 1, ou, ce qui revient au même, pour des valeurs de k' voisines de zéro. C'est là un problème qui se rattache à la théorie des fonctions elliptiques, mais que nous traiterons directement par un procédé élémentaire.

Écrivons

$$\psi = \frac{2I\sqrt{qq'}}{\pi} H, \tag{60}$$

en désignant par H l'intégrale

$$H = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} d\varphi;$$

et comparons cette intégrale à l'intégrale élémentaire

$$\lambda = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi.$$

Si l'on fait la différence de ces deux intégrales, en les réunissant sous un même signe $\int$, on a

$$H - \lambda = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - \sin\varphi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

et l'on vérifie immédiatement que cette différence prend, pour $k = 1$, la valeur finie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2\varphi - \sin\varphi - 1}{\cos\varphi}\, d\varphi,$$

facile à évaluer par les méthodes élémentaires.

Évaluons l'intégrale λ : en y faisant

$$\cos\varphi = c,$$

on trouve immédiatement

$$\lambda = \int_0^1 \frac{k\, dc}{\sqrt{k'^2 + k^2 c^2}} = - \mathrm{L}k' + \mathrm{L}(k+1),$$

L désignant un logarithme népérien. D'après cela, λ devient infini pour $k' = 0$, mais $\lambda + \mathrm{L}k'$ reste fini. Or nous avons vu que $H - \lambda$ reste fini pour $k' = 0$; nous pouvons donc dire que la quantité

$$H + \mathrm{L}k'$$

reste finie pour $k' = 0$; ce qui donne pour valeur approchée de H, quand k' est très petit,

$$H = - \mathrm{L}k' + \ldots,$$

où les termes non écrits restent finis quand k' tend vers zéro. D'après (60), la partie principale de ψ est donnée par

$$\psi = - \frac{2I\sqrt{qq'}}{\pi} \mathrm{L}k' + \ldots. \qquad (61)$$

En se bornant à cette partie principale, on en déduit, pour s et w, les expressions suivantes au voisinage de l'anneau :

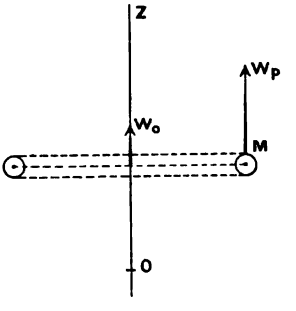
$$(62)\qquad \begin{cases} s = -\dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \dfrac{2I}{\pi}\sqrt{\dfrac{q'}{q}}\dfrac{\partial L k'}{\partial z} + \dots, \\ w = \dfrac{1}{q}\dfrac{\partial\psi}{\partial q} = -\dfrac{I}{\pi q}\sqrt{\dfrac{q'}{q}}\,L k' - \dfrac{2I}{\pi}\sqrt{\dfrac{q'}{q}}\dfrac{\partial L k'}{\partial q} + \dots. \end{cases}$$

D'après la valeur (59) de k', on a

$$(63)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L k'}{\partial z} = \dfrac{4qq'(z-z')}{[(z-z')^2+(q-q')^2][(z-z')^2+(q+q')^2]}, \\ \dfrac{\partial L k'}{\partial q} = \dfrac{q-q'}{(z-z')^2+(q-q')^2} - \dfrac{q+q'}{(z-z')^2+(q+q')^2}; \end{cases}$$

en substituant dans (62) et faisant tendre z vers z' et q vers q', on a les composantes de la vitesse au voisinage de l'anneau. Imaginons que l'anneau soit un tore engendré par un cercle infiniment petit de rayon ε ayant son centre à une distance q' de Oz et à une cote z'. Pour obtenir la vitesse de progression de l'anneau dans le sens Oz, il faut, d'après le théorème du n° 772, prendre, au point M du tore (*fig.* 340) où le plan tangent est perpendiculaire à Oz, la composante de la vitesse normale au tore, c'est-à-dire

Fig. 340.



la valeur de w en ce point. Il faut donc calculer w pour

$$q = q', \qquad z = z' + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit. Or, en ce point M, on a

$$(z-z')^2+(q-q')^2 = \varepsilon^2,$$
$$(z-z')^2+(q+q')^2 = 4q'^2.$$

en négligeant ε^2 devant $4q'^2$; les expressions précédentes (59) et (63) montrent qu'au point M, k' est égal à $\frac{\varepsilon}{2q'}$, tandis que la dérivée $\frac{\partial \mathrm{L}k'}{\partial q}$ prend une valeur finie qu'il est inutile d'écrire. On a alors, pour la partie principale de la vitesse w_p de progression de l'anneau dans le sens Oz, l'expression suivante obtenue en portant les valeurs ci-dessus de k' et $\frac{\partial \mathrm{L}k'}{\partial q}$ dans w et en y faisant $q = q'$:

$$w_p = -\frac{\mathrm{I}}{\pi q'} \mathrm{L}\frac{\varepsilon}{2q'} + \dots, \tag{64}$$

les termes non écrits étant finis. Le logarithme est négatif et très grand, car ε est très petit; donc w_p a une valeur *positive très grande. L'anneau se déplace le long de* Oz dans le sens positif, c'est-à-dire *dans le sens dans lequel se meuvent les particules fluides placées dans l'ouverture de l'anneau, au centre par exemple.* Seulement, la vitesse de cette progression est très grande par rapport à la vitesse de la particule fluide qui se trouve au centre.

En s'appuyant sur la théorie des fonctions elliptiques, on pourrait facilement calculer ψ au voisinage de l'anneau avec une plus grande approximation, et en déduire pour w_p une valeur plus approchée. Nous renverrons pour ce point au *Traité* de Basset, t. II, p. 62, où w_p est donné avec un terme de plus : on vérifiera que la différence entre la valeur que nous donnons pour w_p et celle que donne Basset est finie pour $\varepsilon = 0$.

Deux anneaux circulaires de même axe. — Nous nous bornerons, pour ce cas, aux indications suivantes, déjà données en grande partie par Helmholtz dans son Mémoire du Tome 55 du *Journal de Crelle.*

On peut voir comment se comportent deux anneaux de tourbillon circulaires et infiniment déliés de même axe, en remarquant que chacun d'eux possède, d'après ce qui précède, sa vitesse de progression propre, et obéit en outre aux vitesses provenant des tourbillons de l'autre. Si les tourbillons des deux anneaux sont orientés dans le même sens, les anneaux se déplacent dans le même sens : celui qui marche en avant grandit en même temps que sa vitesse diminue, celui qui suit diminue en même temps

que sa vitesse augmente; dans le cas où les vitesses de propagation des deux anneaux ne sont pas trop différentes, il peut arriver que le deuxième anneau rattrape le premier et le dépasse en passant au travers : à partir de cet instant, le même phénomène se reproduit, de sorte que les deux anneaux passent alternativement l'un dans l'autre. Cette question a été étudiée en détail par J.-J. Thomson en 1883.

Si les tourbillons des deux anneaux sont orientés dans des sens opposés, les deux anneaux marchent l'un vers l'autre; le plus petit se ralentit, grandit et traverse l'autre qui s'est dilaté pour le laisser passer en se ralentissant s'il n'est pas très grand, en s'accélérant, au contraire, s'il est beaucoup plus grand. Après cela tous les effets changent de signe, et les anneaux se séparent en général. Il ne semble pourtant pas impossible que l'un des deux, plus intense et plus grand, entraîne l'autre dans son mouvement de translation, chacun oscillant autour d'une position moyenne (1).

Si les deux anneaux tourbillonnaires sont, au début, égaux et de sens contraire, c'est-à-dire symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain plan P, ils se meuvent en restant symétriques par rapport à ce plan; les particules fluides situées dans le plan P restent immobiles; le plan P divise alors le liquide indéfini en deux portions symétriques; le mouvement de l'une de ces portions est l'*image* du mouvement de l'autre par rapport au plan (n° 751). On pourrait alors supprimer toute la portion du fluide située d'un côté du plan P, à condition de réaliser matériellement ce plan, le mouvement de l'autre portion ne serait pas altéré. On peut ainsi, par la méthode des images, se rendre compte du mouvement d'un seul anneau de tourbillon circulaire infiniment délié dans un liquide indéfini occupant la partie de l'espace située d'un côté d'un plan fixe P, le plan de l'anneau étant parallèle au plan P : l'anneau grandit indéfiniment en s'approchant du plan, en même temps sa vitesse de progression diminue, de sorte que l'anneau n'atteint pas le plan.

---

(1) BRILLOUIN, *Recherches récentes d'hydrodynamique* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1891).

IV. — DÉTERMINATION DES VITESSES EN FONCTION DES TOURBILLONS DANS LE CAS GÉNÉRAL.

775. Liquide contenu dans un vase. — Nous avons, au n° 765, posé le problème général de la détermination des vitesses en fonction des tourbillons et nous l'avons résolu pour un liquide indéfini dans lequel la vitesse est continue.

Imaginons maintenant un liquide dans un vase fermé fixe qu'il remplit entièrement : alors, en un point de la paroi S, la vitesse est tangente à la paroi. Nous pouvons ramener ce cas à celui d'un liquide indéfini par l'artifice suivant.

Nous pouvons évidemment, sans changer l'état du liquide intérieur, supprimer le vase en supposant tout l'espace extérieur à la paroi S rempli par un liquide identique au premier, assujetti à rester *immobile*. Nous aurons alors un liquide indéfini, mais nous ne pourrons pas encore appliquer les formules du paragraphe précédent, car, actuellement, les vitesses *ne sont pas continues dans le liquide indéfini :* à l'intérieur de la surface S formant la séparation du liquide considéré et du liquide immobile extérieur, la vitesse est différente de zéro ; à l'extérieur de cette surface S elle est nulle.

Pour éviter cette discontinuité, imaginons qu'il y ait une couche de passage d'épaisseur très petite ε comprise entre la surface S et une surface parallèle S′ obtenue en portant sur les normales à S une longueur très petite ε ; dans cette couche, la vitesse sera supposée varier très rapidement d'une manière continue, de sorte que, à l'intérieur de S, elle ait la valeur qu'elle a réellement dans le mouvement et, à l'extérieur de S′, la valeur o. Nous aurons alors un liquide indéfini dans lequel la vitesse est continue et auquel nous pourrons appliquer les considérations du paragraphe précédent.

On peut préciser davantage et montrer que cette couche de passage est équivalente à une nappe de tourbillons. Prenons d'abord le cas où la paroi S serait un plan fixe ayant pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = h,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale au plan du côté où se trouve le liquide au repos : et supposons que, dans le liquide en mouvement, placé de l'autre côté, la vitesse ait une valeur *constante* u_1, v_1, w_1, nécessairement parallèle au plan. La couche de passage sera alors comprise entre le plan S et le plan parallèle S′ très voisin

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = h + \varepsilon,$$

situé à la distance ε du premier. Prenons comme expressions des projections de la vitesse *dans cette couche*

$$(65)\qquad \begin{cases} u = u_1\left(1 - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z - h}{\varepsilon}\right), \\ v = v_1\left(1 - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z - h}{\varepsilon}\right), \\ w = w_1\left(1 - \dfrac{\alpha x + \beta y + \gamma z - h}{\varepsilon}\right). \end{cases}$$

Ces expressions sont évidemment égales à u_1, v_1, w_1 sur le plan S et à o, o, o sur le plan S′; de l'un à l'autre, elles varient d'une manière continue. On a alors, en calculant le tourbillon dans la couche de passage,

$$(66)\qquad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon}(\gamma v_1 - \beta w_1), \qquad \ldots,$$

avec des valeurs analogues pour η et ζ; on voit que ce tourbillon a une valeur très grande, qu'il est parallèle au plan S, car

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0,$$

et enfin qu'il est perpendiculaire à la vitesse u_1, v_1, w_1, car

$$u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta = 0.$$

La couche de passage est donc une nappe de tourbillons.

On passe maintenant de ce cas particulier au cas où la surface de séparation S a une forme courbe, par le mode de raisonnement suivant que nous empruntons à M. Poincaré (*Théorie des tourbillons,* p. 131). Appelons u_1, v_1, w_1 les projections de la vitesse du liquide intérieur en un point de la surface S et α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à S en ce point. Nous pourrons décomposer la surface S en éléments assez petits pour

qu'on puisse considérer ces éléments comme plans, et la vitesse u_1, v_1, w_1 comme constante dans toute leur étendue : nous pourrons en outre choisir l'épaisseur ε de la couche de passage de façon qu'elle soit très petite, même vis-à-vis de ces éléments. Le résultat précédent s'appliquera alors à chacun des éléments plans et, par suite, à la surface S tout entière. La couche de passage sera remplacée par une nappe de tubes de tourbillons dont les composantes ξ', η', ζ' en chaque point de S seront données par les formules, identiques à (66),

$$(67)\qquad 2\varepsilon\xi' = \gamma v_1 - \beta w_1, \qquad 2\varepsilon\eta' = \alpha w_1 - \gamma u_1, \qquad 2\varepsilon\zeta' = \beta u_1 - \alpha v_1.$$

En chaque point de S, ce tourbillon (ξ', η', ζ') est situé dans le plan tangent et normal à la vitesse (u_1, v_1, w_1).

On pourra alors se servir de l'analogie électromagnétique exposée dans le paragraphe précédent, en remplaçant les tubes de tourbillons intérieurs à S par des courants et la surface S elle-même par une nappe de courants correspondant aux tubes qui proviennent des tourbillons fictifs (67) situés dans la couche de passage.

Analytiquement, on pourra employer les formules du n° 767, donnant les fonctions P, Q, R :

$$P = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi'}{r}\, d\tau, \qquad \ldots,$$

les intégrales étant étendues à tous les éléments $d\tau$ du liquide indéfini pour lesquels le tourbillon correspondant (ξ', η', ζ') n'est pas nul. Actuellement, ces intégrales se partagent en deux parties : la première, relative aux tubes de tourbillon situés dans le volume V intérieur à S ; la deuxième, relative aux tubes de tourbillon situés dans la couche de passage C :

$$P = \frac{1}{2\pi}\iiint_V \frac{\xi'}{r}\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\iiint_C \frac{\xi'}{r}\, d\tau, \qquad \ldots.$$

La couche de passage C a une épaisseur ε qu'on peut regarder comme infiniment petite : soit $d\sigma$ un élément superficiel de la surface S ; prenons comme élément de volume $d\tau$ de la couche le cylindre droit de base $d\sigma$ et de hauteur ε limité aux surfaces S

et S′ qui comprennent la couche ; on aura

$$d\tau = \varepsilon\, d\sigma,$$

et la deuxième intégrale deviendra une intégrale double étendue à tous les éléments $d\sigma$ de S

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_S \frac{\varepsilon\xi'}{r}\, d\sigma,$$

mais d'après les formules (67), la valeur de $2\varepsilon\xi'$, dans la couche, est $\gamma v_1 - \beta w_1$. En remplaçant $\varepsilon\xi'$ par cette valeur, on a enfin

$$(68) \qquad P = \frac{1}{2\pi}\int\int\int_V \frac{\xi'}{r}\, d\tau + \frac{1}{4\pi}\int\int_S \frac{\gamma v_1 - \beta w_1}{r}\, d\sigma,$$

la première intégrale étant étendue au volume V, la deuxième à la surface limite S. On a de même Q et R.

Les fonctions P, Q, R étant connues, les composantes de la vitesse se calculent par les formules (23) du n° 767. Seulement les formules ainsi obtenues présentent cet inconvénient d'exiger la connaissance des vitesses (u_1, v_1, w_1) à la paroi, et ces vitesses ne font pas partie des données qui sont seulement les tourbillons.

776. Fluide compressible. — Nous avons montré que, pour un liquide dans un vase fixe simplement connexe et, en particulier, pour un liquide indéfini dans tous les sens, le problème n'a qu'une solution. Pour un fluide compressible placé dans les mêmes conditions, le problème n'a qu'une solution, à condition que l'on connaisse, en outre, la vitesse de dilatation,

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

en chaque point. En effet, il ne peut y avoir, pour les vitesses, deux solutions différentes (u_1, v_1, w_1) et (u_2, v_2, w_2). Car, comme on l'a vu au n° 766, la différence géométrique de ces vitesses $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$, $w_1 - w_2$ dériverait d'un potentiel φ ; ce potentiel, puisque θ est donné et a la même valeur dans les deux solutions, vérifierait la condition

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z},$$

qui, en transposant et remplaçant $u_1 - u_2$ par $\frac{d\varphi}{dx}$, .. , donnerait

$$\Delta\varphi = 0;$$

enfin, sur la surface limite, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Dans ces conditions φ serait constant et les différences $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$, $w_1 - w_2$ nulles.

Si le vase était à connexion multiple, il faudrait se donner, en outre, les modules relatifs aux diverses sortes de contours fermés qu'on peut tracer dans le vase, comme au n° 766.

Fluide compressible indéfini. — Prenons, par exemple, le cas d'un fluide compressible indéfini dans tous les sens et supposons qu'on connaisse ξ, η, ζ, θ aux divers points de l'espace, les vitesses étant supposées continues.

Le problème est de trouver des fonctions u, v, w, de x, y, z s'annulant à l'infini et vérifiant les équations

$$(69)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z} = 2\xi, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x} = 2\eta, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = \theta, \end{cases}$$

où ξ, η, ζ, θ sont donnés en fonction de x, y, z.

En généralisant les formules du n° 767, on pose

$$(70)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}, \end{cases}$$

P, Q, R, Φ étant quatre fonctions de x, y, z. Comme, en supposant u, v, w connus, on aurait seulement les trois équations (70)

pour déterminer ces quatre fonctions, on peut assujettir ces fonctions à remplir une condition supplémentaire que nous choisissons ainsi : en posant, comme au n° 767,

$$M = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

nous ferons

$$M = 0. \tag{71}$$

On a alors, comme au n° 767,

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial M}{\partial x} - \Delta P, \qquad \ldots.$$

Comme M est nul, ces relations deviennent

$$\Delta P = -2\xi, \qquad \Delta Q = -2\eta, \qquad \Delta R = -2\zeta,$$

d'où

$$P = \frac{1}{2\pi}\iiint \frac{\xi'}{r}\, d\tau, \qquad \ldots. \tag{72}$$

Ces expressions de P, Q, R entraînent d'elles-mêmes, comme nous l'avons vu, la condition M = 0.

Il reste à écrire la dernière des équations (69) exprimant que la vitesse de dilatation cubique est donnée. On a ainsi, en remplaçant u, v, w par leurs expressions (70),

$$\Delta\Phi = \theta,$$

d'où, en se reportant à la théorie du potentiel newtonien,

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\theta'}{r}\, d\tau, \tag{73}$$

θ' étant la valeur de θ dans l'élément $d\tau = dx'\,dy'\,dz'$ et r désignant comme plus haut la distance

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Les fonctions P, Q, R, Φ étant ainsi calculées, les formules (70) donnent u, v, w.

En interprétant ces formules, on voit que le vecteur vitesse W(u, v, w) est la somme de deux vecteurs, le premier W′ ayant

pour projections

$$(W') \qquad u' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

le deuxième W″ ayant pour projections

$$(W'') \qquad u'' = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \ldots$$

Les vitesses W′ dérivent du potentiel Φ défini par la relation (73); elles sont identiques aux attractions newtoniennes qui seraient exercées sur un point de masse 1 par une masse continue ayant pour densité $-\frac{\theta'}{4\pi}$ aux divers points x', y', z' de l'espace. Quant aux vecteurs W″, leur distribution a été étudiée en détail au n° 768; nous y avons vu quelle est la part contributive de chaque élément tourbillonnaire $d\tau$ dans la vitesse W″ d'un point quelconque.

Analogie électromagnétique. - Le vecteur W′ est identique à la force magnétique due à une distribution de densité $-\frac{\theta'}{4\pi}$; le vecteur W″ est, comme nous l'avons vu p. 421, identique à la force électromagnétique produite par une distribution de courants électriques suivant les tubes de tourbillon.

Espace limité. — Les conclusions précédentes s'appliquent à un fluide occupant un espace illimité dans tous les sens. Pour un espace limité par une surface fixe S, on peut procéder comme dans le cas d'un liquide (n° 775). Nous renverrons, pour les développements relatifs à cette question, à un Mémoire de Boltzmann (1871) et au Travail déjà plusieurs fois cité de M. Brillouin, *Recherches récentes d'hydrodynamique* (*Annales de la Faculté de Toulouse,* 1891).

777. **Production expérimentale des tourbillons.** — On trouvera, dans ce même Travail de M. Brillouin, d'intéressantes indications sur la production expérimentale des tourbillons. Nous lui emprunterons le passage suivant :

Pour lancer une masse de gaz animée d'un mouvement de rotation, on profite du frottement superficiel et interne; pour la rendre visible, on la charge de fumée. Tait et Thomson ont vulgarisé un appareil formé d'une grande boîte cubique en bois dont une face a été remplacée par de la toile

peu tendue; la face opposée, percée d'une ouverture, porte extérieurement deux coulisses parallèles qui permettent d'introduire des cartons ou des planches percées d'ouvertures plus petites et de formes variées. On remplit la boîte de fumée, soit en y faisant brûler divers corps, soit en y mettant deux assiettes remplies d'acide chlorhydrique et d'ammoniaque. Un coup sec frappé sur la toile fait sortir un petit volume d'air chargé de fumée; le frottement latéral rend la vitesse de translation très faible au bord, grande au centre, et produit un mouvement de rotation autour d'axes parallèles au bord et qui s'étend d'autant plus loin que celui-ci est plus épais. Pour des ouvertures de 20^{cm} à 25^{cm} de longueur, un carton de 5^{mm} à 6^{mm} convient très bien. Tout près de la boîte, on ne distingue d'abord qu'une masse confuse de fumée; mais, à quelques décimètres, la fumée de la partie centrale est restée en arrière, et l'anneau progresse seul avec une vitesse à peu près uniforme.

Le mode de production de l'anneau montre suffisamment qu'il est animé d'un mouvement de rotation et, comme il parcourt dans un air calme 8^{m} ou 10^{m} sans se briser, il est facile de reconnaître qu'il obéit à toutes les lois que la théorie a indiquées.

La vitesse de l'air qui traverse intérieurement l'anneau est moindre que celle de l'anneau lui-même. On s'en assure au moyen de légers drapeaux, de flammes ou simplement de la main, placés sur le trajet de l'anneau. Sur les bords, au moment du passage de l'anneau, un violent remous se produit, avec renversement du sens du vent, qui s'écarte d'abord de l'axe du mouvement et converge ensuite vers cet axe. Ainsi, au centre du tourbillon, l'air dénué de rotation se renouvelle constamment; le tourbillon va sans cesse à la rencontre de nouvelles couches, s'y fraye un chemin, puis les laisse s'écouler en arrière. C'est grâce à cette propriété qu'un court trajet suffit à séparer le tourbillon proprement dit du jet d'air central chargé de fumée, mais dénué de rotation.

V. — NOTATIONS DE CLEBSCH.

778. **Propriété analytique des surfaces de tourbillon.** — Quand il n'existe pas de potentiel des vitesses, le flux élémentaire

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

n'est pas une différentielle totale d'une fonction de trois variables. Cherchons si, à un instant quelconque t, *il existe des surfaces sur lesquelles le flux élémentaire est une différentielle totale d'une fonction de deux variables;* nous allons voir que *ces surfaces sont précisément les surfaces de tourbillon à cet instant.*

En effet, sur une surface S, on peut toujours exprimer x, y, z en fonc-

tion de deux variables indépendantes λ et μ. Dans ces conditions,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu, \quad \ldots.$$

L'expression $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ prend alors la forme $L\,d\lambda + M\,d\mu$ et en écrivant qu'elle est une différentielle exacte $\frac{\partial L}{\partial \mu} - \frac{\partial M}{\partial \lambda} = 0$, on a la condition

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(u\frac{\partial x}{\partial \lambda} + v\frac{\partial y}{\partial \lambda} + w\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) - \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(u\frac{\partial x}{\partial \mu} + v\frac{\partial y}{\partial \mu} + w\frac{\partial z}{\partial \mu}\right) = 0,$$

ou, en développant,

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}\frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial u}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \ldots = 0.$$

Mais u, v, w sont fonctions de λ et μ par l'intermédiaire de x, y, z: on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \mu} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \mu}, \quad \ldots.$$

En substituant et réduisant, on trouve

$$\xi\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu}\right) + \eta\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu} - \frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial z}{\partial \mu}\right) + \zeta\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \lambda}\frac{\partial x}{\partial \mu}\right) = 0.$$

Cette dernière condition exprime que la normale à la surface S en un point est perpendiculaire au tourbillon ξ, η, ζ en ce point, ou encore que le tourbillon est tangent à la surface. La surface S est donc bien une surface de tourbillon.

En partant de cette propriété, on démontrerait aisément que la circulation est nulle sur toute courbe fermée tracée sur une surface de tourbillon, de façon à pouvoir se réduire à un point par déformation continue sur la surface. (Théorème du n° 757.)

779. Notations de Clebsch. — Dans deux Mémoires parus au *Journal de Crelle,* en 1856 et 1858, Clebsch a employé une forme particulière des équations qui repose sur le théorème d'Analyse suivant :

Soient u, v, w trois fonctions quelconques de x, y, z, il existe toujours trois fonctions φ, m, ψ des mêmes variables telles que l'on ait identiquement

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi + m\,d\psi. \tag{74}$$

Soit $\psi = \text{const.}$ une famille de surfaces de tourbillon ;

$$\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.}$$

deux autres familles de surfaces; ψ, λ et μ seront des fonctions de x, y, z telles que, par chaque point de l'espace, il passe une surface de chaque famille. Alors, inversement, on pourra exprimer x, y, z en fonction de ψ, λ et μ, et l'on aura une identité de la forme

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = \mathrm{L}\,d\lambda + \mathrm{M}\,d\mu + \mathrm{N}\,d\psi, \tag{75}$$

L, M, N étant trois fonctions de λ, μ, ψ. Mais, d'après la propriété des surfaces de tourbillon établie dans le numéro précédent, le premier membre devient une différentielle exacte d'une fonction de λ et μ sur une surface de tourbillon quelconque et, en particulier, sur la surface

$$\psi = \text{const.}, \qquad d\psi = 0.$$

Donc, ψ étant constant,

$$\mathrm{L}\,d\lambda + \mathrm{M}\,d\mu$$

est une différentielle exacte d'une fonction φ de λ et μ; cette fonction φ contient d'ailleurs la constante ψ, de sorte que φ dépend de λ, μ, ψ et l'on a

$$\mathrm{L} = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}, \qquad \mathrm{M} = \frac{\partial\varphi}{\partial\mu},$$

$$\mathrm{L}\,d\lambda + \mathrm{M}\,d\mu = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\,d\mu.$$

Appelons $d\varphi$ la différentielle totale de φ obtenue en faisant varier λ, μ et ψ; on a

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,d\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\,d\mu + \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,d\psi.$$

Donc

$$\mathrm{L}\,d\lambda + \mathrm{M}\,d\mu = d\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\,d\psi.$$

L'identité (75) devient alors

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi + \left(\mathrm{N} - \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)d\psi;$$

et, en désignant par m le facteur $\mathrm{N} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\psi}$, on a l'identité qu'il s'agit de démontrer.

Il résulte de cette démonstration que la transformation de Clebsch est possible d'une infinité de manières et qu'il suffit de prendre pour ψ une fonction telle que $\psi = \text{const.}$ représente une famille de surfaces de tourbillon, à l'instant t. Inversement, si cette transformation est réalisée, $\psi = \text{const.}$ est une famille de surfaces de tourbillon, car, pour $\psi = \text{const.}$, le flux élémentaire devient une différentielle totale d'une fonction de deux variables.

Dans l'identité (74) de Clebsch, les surfaces

$$m = \text{const.}$$

sont aussi des surfaces de tourbillon, car, si $m = C$, le flux élémentaire

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d(\varphi + C\psi)$$

est une différentielle exacte d'une fonction de deux variables.

En chaque point du fluide, le tourbillon est donc tangent à l'intersection des deux surfaces

$$m = \text{const.}, \qquad \psi = \text{const.}$$

passant par ce point. C'est ce qu'on pourrait vérifier directement en remarquant que l'on a

$$2\xi = \frac{\partial m}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial m}{\partial z}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \dots$$

comme il résulte des expressions de u, v, w

$$(76) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + m\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + m\frac{\partial \psi}{\partial z},$$

tirées de l'identité (74).

Cette transformation de Clebsch ainsi que celles de Stokes (n° 776) ont été étudiées en détail par E. Betti (*Theoria delle Forze newtoniane*, p. 304-313).

EXERCICES.

1. *Accélération rotatoire.* — Appelons J l'accélération de l'élément x, y, z à l'instant t, J_x, J_y, J_z ses projections sur les axes. Le vecteur Ω' ayant pour projections

$$\Omega'_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}\right), \qquad \Omega'_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}\right), \qquad \dots$$

s'appelle l'*accélération rotatoire.*

Soit une portion S de surface fluide limitée par une courbe C pouvant être réduite à un point par déformation continue sur S; démontrer les théorèmes suivants :

La dérivée par rapport au temps de la circulation le long de C *est égale au travail fictif de l'accélération le long de* C :

$$\frac{d}{dt}\int_C u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int_C J_x dx + J_y dy + J_z dz.$$

Ou encore, d'après la transformation d'Ampère et de Stokes (n° 539),

$$\frac{d}{dt}\int\int_S \Omega_n\,d\sigma = \int\int_S \Omega'_n\,d\sigma,$$

Ω_n et Ω'_n désignant les projections des vecteurs Ω et Ω' sur la normale à l'élément $d\sigma$ de la surface S.

Si la surface fluide S est infiniment petite et se réduit à un seul élément $d\sigma$, on a

$$\frac{d}{dt}(\Omega_n d\sigma) = \Omega'_n d\sigma. \tag{1}$$

2. *Soit $d\sigma$ un élément superficiel fluide en mouvement; s'il existe une fonction des accélérations, $\Omega_n d\sigma$ est une constante indépendante du temps.*

Réponse. — Cela résulte de l'équation précédente dans laquelle Ω'_n est nul.

On a alors

$$\Omega_n d\sigma = (\Omega_n)_0 d\sigma_0. \tag{2}$$

3. *Théorème de Lagrange.* — Déduire le théorème de Lagrange du n° 730 de la relation précédente (2).

Réponse. — S'il existe une fonction ou un potentiel des vitesses initiales, Ω_0 est nul, donc $(\Omega_n)_0$; la relation (2) montre alors que $\Omega_n = 0$. Mais comme la direction de l'élément $d\sigma$ est arbitraire, $\Omega = 0$.

4. *Théorème de Helmholtz.* — S'il existe une fonction des accélérations, tout élément superficiel fluide qui contient à un moment donné le tourbillon Ω le contient toujours.

(C'est là, sous une autre forme, le théorème du n° 758.)

Réponse. — D'après (2), si $(\Omega_n)_0$ est nul, il en est de même de Ω_n.

5. *Pour que les lignes de tourbillon soient des lignes fluides dans un mouvement, il faut et il suffit que l'accélération rotatoire Ω'* (si elle n'est pas nulle) *soit confondue en direction avec la rotation moyenne Ω.*

Soient une molécule fluide P, $d\sigma$ un élément plan fluide pris dans cette molécule et passant par le tourbillon en P. Il faut que cet élément plan continue à contenir le tourbillon quand t varie. Donc Ω_n doit rester nul quand t varie; alors l'équation (1) montre que Ω'_n est nul. Donc, un élément plan en P contenant Ω contient Ω'; ces deux vecteurs ont même direction.

Pour que l'intensité rotatoire $\Omega\, d\sigma$ d'un élément superficiel fluide normal à Ω ne change pas avec le temps, il faut et il suffit que les vecteurs Ω et Ω' soient rectangulaires.

Pour que les deux propriétés précédentes aient lieu en même temps, il faut et il suffit que Ω' soit nul, c'est-à-dire qu'il y ait une fonction des accélérations.

[MAURICE LÉVY, *Revue générale des Sciences*, t. I, p. 724; 1890; *voir* aussi ZORAWSKI, *Ueber die Erhaltung der Wirbelbewegung* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie*, octobre 1900).]

6. *Anneaux de tourbillon dans un liquide indéfini.* — Soient u, v, w et ξ, η, ζ la vitesse et le tourbillon d'un élément $d\tau$ de coordonnées x, y, z, et X, Y, Z les expressions

$$X = v\zeta - w\eta, \qquad Y = w\xi - u\zeta, \qquad Z = u\eta - v\xi;$$

démontrer que le système de vecteurs $X\,d\tau$, $Y\,d\tau$, $Z\,d\tau$ *est équivalent à zéro,*

c'est-à-dire que l'on a les six relations

$$\iiint X\,d\tau = 0, \quad \ldots, \quad \iiint (yZ - zY)\,d\tau = 0, \quad \ldots.$$

On peut démontrer ces relations directement ou en se servant de l'analogie hydrodynamique. Elles expriment que les forces représentant les actions mutuelles des éléments de courants fictifs, par lesquels nous avons remplacé les tubes de tourbillon, sont égales et opposées deux à deux.

(POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, p. 126 et suiv.)

7. *La force vive d'un liquide indéfini a pour expression*

$$2\iiint M\,d\tau,$$

M désignant le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

(POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, p. 130.)

8. *Pour que les lignes de tourbillon soient orthogonales aux lignes de courant, il faut et il suffit que l'on ait*

$$u = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = \mu\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

μ et φ étant des fonctions de x, y, z, t.

[BELTRAMI, *Considerazioni idrodinamiche* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, 2e série, vol. XXII, fasc. II).]

Ce théorème est une conséquence immédiate du n° 542, p. 15.

9. *Étudier les mouvements dans lesquels les lignes de courant se confondent avec les lignes de tourbillon*

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}.$$

(BELTRAMI, *loc. cit.* dans l'exercice précédent.)

10. *Conservation des lignes et des surfaces de tourbillon déduite des équations de Clebsch* (n° 779). (*Voir* CLEBSCH, *Journal de Crelle*, 1858.)

Réponse. — L'identité du n° 731

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = (u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc) = dF$$

montre que, si l'on fait

$$u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc = d\varphi_0 + m_0\,d\psi_0,$$

on a aussi

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d(F + \varphi_0) + m_0\,d\psi_0;$$

on en conclut que les surfaces

$$m_0 = \text{const.}, \qquad \psi_0 = \text{const.},$$

qui sont des surfaces de tourbillon à l'instant initial, restent des surfaces de tourbillon.

CHAPITRE XXXVI.

MOUVEMENTS PARALLÈLES A UN PLAN FIXE.

780. Objet du Chapitre. — Imaginons un fluide en mouvement parallèlement à un plan fixe, de telle façon que la vitesse de chaque élément soit parallèle au plan et que les vitesses de tous les éléments situés sur une même perpendiculaire au plan soient identiques. Ce fait se produit, par exemple, pour un liquide pesant en mouvement dans un canal dont les parois latérales sont des plans verticaux parallèles et dont le fond est un plan perpendiculaire aux parois latérales ou, plus généralement, une surface cylindrique ayant ses génératrices perpendiculaires aux parois; les conditions initiales étant telles qu'à l'instant initial toutes les tranches parallèles aux parois soient dans le même état. Il se présente aussi quand de l'eau s'écoule régulièrement par-dessus un déversoir rectiligne horizontal : la nappe qui s'écoule forme une couche cylindrique dans laquelle toutes les vitesses sont parallèles à une section droite et identiques le long d'une génératrice, etc. Si l'on prend, dans un mouvement de cette nature, un plan des xy parallèle au plan fixe, la composante w de la vitesse d'un élément est nulle, et les deux autres composantes u, v dépendent uniquement de x, y, t et non de z. La composante Z de la force appliquée à l'unité de masse doit être nulle, X et Y doivent dépendre uniquement de x et y. Enfin la pression et la densité sont fonctions uniquement de x, y, t.

Dans ces conditions, les équations du mouvement se réduisent à deux

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Les lignes de courant et les trajectoires sont dans des plans fixes parallèles au plan des xy.

Quant au vecteur tourbillon d'un élément quelconque, il est perpendiculaire au plan des xy, à moins qu'il ne soit nul : en effet, ξ et η sont nuls, et

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Les lignes de tourbillon sont donc des droites perpendiculaires au plan des xy et les tubes de tourbillon des cylindres perpendiculaires à ce plan : si $d\sigma$ est la section droite d'un tube de tourbillon infiniment délié, l'intensité de ce tube est

$$I = 2\zeta\, d\sigma,$$

car le tourbillon Ω se confond avec sa composante ζ.

Le problème devient alors un problème de Mécanique à deux dimensions. Il suffira de savoir comment se meuvent les éléments situés dans le plan des xy, pour connaître le mouvement de toute la masse fluide.

781. Cas d'un liquide; fonction de courant. — Dans le cas d'un liquide incompressible, l'équation de continuité devient

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Elle exprime que, à chaque instant t, l'expression

$$-v\,dx + u\,dy$$

est la différentielle totale d'une certaine fonction $\psi(x, y, t)$ définie à une fonction additive de t près. On peut donc poser

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

On appelle cette fonction la *fonction de courant* (*current function*) parce qu'elle donne les lignes de courant : en effet, à l'in-

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, À PARIS.

RÉSAL (H.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à l'École des Mines, Inspecteur général des Mines, adjoint au Comité d'Artillerie pour les études scientifiques. — **Traité de Mécanique générale**, comprenant les *Leçons professées à l'École Polytechnique et à l'École des Mines*. 7 volumes in-8, se vendant séparément.

MÉCANIQUE RATIONNELLE.

TOME I : *Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides*. 2e édition. In-8, avec 47 figures; 1895 ..... 10 fr. 10 c.

TOME II : *Du mouvement des solides en égard aux frottements. — Équilibre intérieur. — Élasticité. — Hydrostatique. — Hydrodynamique. — Hydraulique*. 2e édition. In-8, avec 41 figures; 1895 ..... 5 fr.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE (Moteurs et Machines).

TOME III : *Des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — Application de la Mécanique à l'Horlogerie*. In-8, avec 213 belles figures; 1875 ..... 11 fr.

TOME IV : *Moteurs animés. — De l'eau et du vent considérés comme moteurs. — Machines hydrauliques et élévatoires. — Machines à vapeur, à air chaud et à gaz*. In-8, avec 200 belles figures levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1876 ..... 12 fr.

CONSTRUCTIONS.

TOME V : *Résistance des matériaux. — Constructions en bois. — Maçonneries. — Fondations. — Murs de soutènement. — Réservoirs*. In-8, avec 308 belles figures, levées et dessinées d'après les meilleurs types; 1880 ..... 12 fr. 50 c.

TOME VI : *Voûtes droites et biaises, en dôme, etc. — Ponts en bois. — Planchers et combles en fer. — Ponts suspendus. — Ponts-levis. — Cheminées. — Fondations de machines industrielles. — Amélioration des cours d'eau. — Substruction des chemins de fer. — Navigation intérieure. — Ports de mer*. In-8, avec 519 figures et 3 planches chromolithographiques; 1881 ..... 15 fr.

DÉVELOPPEMENTS ET EXERCICES.

TOME VII : *Développements sur la Mécanique rationnelle et la Cinématique pure*, comprenant de nombreux *Exercices*. In-8, av. 41 fig.; 1889 ..... 12 fr.

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**, revu et corrigé par *E. Prouhet*, Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique, et augmenté de la **Théorie élémentaire des fonctions elliptiques**, par *H. Laurent*, répétiteur à l'École Polytechnique. 12e édition, mise au courant des nouveaux programmes de la Licence, par *J. de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. 2 volumes in-8, avec figures dans le texte; 1901.

Broché ..... 15 fr.

Cartonné ..... 16 fr. 50 c.

[illegible] — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRARY
Phys 7767.7
Bowditch fund
(III 3)

COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

PAR

Paul APPELL,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME TROISIÈME.

ÉQUILIBRE ET MOUVEMENT DES MILIEUX CONTINUS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903
Troisième fascicule.

stant t, les lignes de courant ont pour équation différentielle, dans le plan xOy,

$$-v\,dx + u\,dy = 0$$

ou

$$d\psi = 0, \qquad \psi = \text{const.}$$

782. Conditions aux parois. — L'introduction de cette fonction ψ, dans les mouvements des liquides à deux dimensions, simplifie l'expression de certaines conditions aux limites.

Supposons d'abord que le liquide soit assujetti à rester en contact avec une surface cylindrique fixe ayant ses génératrices perpendiculaires au plan xOy et ayant pour trace sur ce plan une courbe donnée; à chaque instant t, la vitesse d'un élément en contact avec cette courbe doit lui être tangente; cette courbe est donc une ligne de courant et la fonction ψ doit être, à chaque instant, constante le long de la courbe.

Supposons ensuite que la paroi soit une surface cylindrique rigide perpendiculaire au plan des xy, ayant un mouvement donné. La section de cette surface par le plan des xy sera une courbe C de forme invariable animée d'un mouvement connu. Soit M_1 un point pris sur la courbe et invariablement lié à la courbe, x, y les coordonnées de ce point à l'instant t, W_1 la vitesse de ce point dans le mouvement de la courbe et u_1, v_1 les projections de cette vitesse; on aura

$$u_1 = -\omega(y-b), \qquad v_1 = \omega(x-a),$$

a et b étant les coordonnées du centre instantané de rotation de la courbe C et ω la vitesse angulaire instantanée de cette courbe : ces quantités sont des fonctions connues de t. D'autre part, soit M un élément liquide en contact avec la paroi en M_1; cet élément a aussi pour coordonnées x et y, mais sa vitesse $W(u, v)$ est différente de W_1. La condition à la paroi est que la vitesse relative W_r de l'élément liquide par rapport à la paroi soit tangente à la paroi; mais cette vitesse relative est la différence géométrique de la vitesse absolue W et de la vitesse d'entraînement W_1,

$$(W_r) = (W) - (W_1),$$

et ses projections sur les axes sont

$$u - u_1, \qquad v - v_1,$$

c'est-à-dire

$$(W_r) \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} + \omega(y-b), \qquad -\frac{\partial\psi}{\partial x} - \omega(x-a).$$

Exprimons que ce vecteur W_r est tangent à la paroi à l'instant t : en appelant dx, dy les projections d'un élément d'arc de la courbe C, on devra avoir, tout le long de C,

$$\frac{u-u_1}{dx} = \frac{v-v_1}{dy},$$

ou en chassant les dénominateurs

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -\omega[(x-a)\,dx + (y-b)\,dy],$$

ce qui donne, en intégrant,

$$(2) \qquad \psi = -\frac{\omega}{2}[(x-a)^2 + (y-b)^2] + \text{const.}$$

tout le long de C, la constante pouvant dépendre du temps. Si le mouvement de C est une simple rotation autour d'un point fixe, on peut prendre ce point pour origine ; alors a et b sont nuls.

I. — MOUVEMENT IRROTATIONNEL D'UN LIQUIDE.

783. Équations générales; fonctions conjuguées. — Si le mouvement d'un liquide est irrotationnel et parallèle à un plan fixe xOy, les composantes u, v de la vitesse à l'instant t dérivent d'un potentiel $\varphi(x, y, t)$

$$(3) \qquad u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

L'équation de continuité devient actuellement

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0;$$

cette équation montre que φ est un potentiel logarithmique (n° 605). Les surfaces équipotentielles $\varphi = \text{const.}$ sont des cylindres perpendiculaires au plan des xy; leurs traces sur ce plan sont les *lignes équipotentielles*.

Si les forces appliquées dérivent d'une fonction de forces $U(x, y, z)$, la pression p est donnée par la première des équations (48) du n° 738, dans laquelle φ est indépendant de z,

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial\varphi}{\partial t}-U+\frac{p}{\rho}=0.$$

Fonction de courant. — Dans le cas actuel, la fonction de courant ψ définie au n° 781 est liée au potentiel des vitesses φ par les deux relations

$$(6) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

qui donnent, par l'élimination de φ, la relation

$$(7) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$$

Comme la vitesse en chaque point est tangente à une ligne de courant et normale à une ligne équipotentielle, ces deux sortes de lignes $\psi = \text{const.}$ et $\varphi = \text{const.}$ *se coupent à angle droit.*

Introduction des fonctions d'une variable complexe. — Les deux relations (6) entre φ et ψ montrent que, en désignant par i l'unité complexe $\sqrt{-1}$, la quantité

$$\varphi + i\psi$$

est une fonction de la variable complexe $x+yi$; et, réciproquement, si l'on prend une fonction d'une variable complexe $f(x+yi)$ pouvant contenir le temps t, et si on la met sous la forme $\varphi+i\psi$, φ et ψ étant réels, on a deux fonctions de x et y vérifiant les relations (6). Ces propositions élémentaires sont bien connues; elles servent de base à la théorie des fonctions d'une variable complexe (Riemann, *Œuvres complètes,* traduction française de Laugel : *Théorie des fonctions abéliennes,* p. 89; Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques;* Picard, *Traité d'Analyse,* etc.).

A chaque mouvement plan irrotationnel d'un liquide correspond ainsi une certaine fonction de la variable complexe $x+yi$ et du temps t; et, réciproquement, si l'on prend une fonction de $x+yi$ et de t, on en déduit les deux fonctions conjuguées φ et ψ pouvant

être prises, avec un choix convenable de conditions aux limites et de conditions initiales, pour le potentiel des vitesses et la fonction de courant d'un certain mouvement irrotationnel d'un liquide. Si le mouvement est permanent, la fonction de $x+yi$ ne contient pas t.

L'identité

$$\varphi + i\psi = f(x+yi)$$

devient, après multiplication par i,

$$-\psi + i\varphi = if(x+yi);$$

à la fonction $if(x+yi)$ correspondrait donc un deuxième mouvement ayant pour potentiel des vitesses $-\psi$ et pour fonction de courant φ. C'est ce qui résulte aussi des relations (6), qui conservent la même forme quand on fait $-\psi = \varphi_1$ et $\varphi = \psi_1$.

784. **Mouvements ondulatoires d'un liquide pesant.** — Imaginons un liquide pesant en équilibre : supposons qu'à un certain instant on écarte le liquide très peu de sa position d'équilibre en produisant des dénivellations de la surface, puis qu'on imprime aux divers éléments des vitesses très petites. Il se produit alors un mouvement ondulatoire que nous nous proposons d'étudier dans les cas les plus simples. Lorsque le liquide a une profondeur indéfinie, le problème a été résolu par Cauchy dans le Mémoire déjà cité, *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant d'une profondeur indéfinie* (Prix de l'Académie royale des Sciences de 1815 et de 1816).

Nous supposerons ici que le mouvement se fait parallèlement à un plan fixe et qu'il est irrotationnel; nous donnerons d'abord quelques indications sur la Cinématique du phénomène, en portant notre attention sur la surface libre.

785. **Cinématique du mouvement, par ondes parallèles, de la surface d'un liquide pesant.** — Imaginons un liquide pesant dont les éléments se meuvent parallèlement à un plan vertical fixe : nous prendrons, dans ce plan, l'origine O au niveau que présenterait le liquide s'il était immobile, l'axe Ox horizontal et l'axe Oy vertical ascendant.

Onde progressive simple. — On dit qu'une *onde progressive*

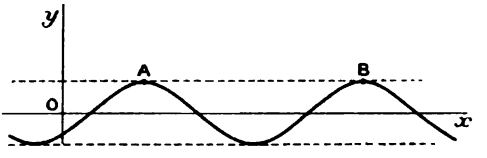
simple se propage à la surface quand l'équation de la surface libre, à un instant quelconque t, est de la forme

$$y = a\cos(mx - st + \alpha), \tag{8}$$

a, m, s, α désignant des constantes. Le liquide lui-même est alors animé d'un mouvement *ondulatoire simple*.

A l'instant t, la surface libre est un cylindre ondulé (*fig.* 341)

Fig. 341.



dont la base sur le plan xOy est la courbe sinusoïdale (8); les maxima de l'ordonnée de cette courbe, tous égaux à a, ont lieu aux abscisses

$$x_0 = \frac{st - \alpha}{m}, \qquad x_k = \frac{st - \alpha}{m} + \frac{2k\pi}{m}, \tag{9}$$

k étant un entier qui prend toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$: un minimum $-a$ de l'ordonnée a lieu à égale distance de deux maxima consécutifs; la longueur a est l'*amplitude* de l'onde.

La distance constante AB de deux maxima consécutifs, c'est-à-dire des crêtes de deux vagues consécutives, est la *longueur l* de l'ondulation

$$l = \frac{2\pi}{m}. \tag{10}$$

Si maintenant nous portons notre attention sur les maxima A, B, ..., c'est-à-dire sur les crêtes des vagues, ces points géométriques, ayant des ordonnées constantes et égales à a, se déplacent, quand t varie, sur une parallèle à Ox, avec une vitesse V qui est la même pour tous, car la distance de deux maxima consécutifs est constante; la valeur de cette vitesse est, en désignant par x_0 l'abscisse du point A,

$$V = \frac{dx_0}{dt} = \frac{s}{m}, \tag{11}$$

d'après la valeur (9) de x_0. Cette vitesse V est la *vitesse de propagation* de l'onde : il va de soi que cette vitesse est absolument différente des vitesses que possèdent aux divers instants les éléments matériels du fluide, vitesses que nous déterminerons approximativement plus loin.

D'après cela, la surface libre est, au point de vue géométrique, un cylindre ondulé de forme invariable qui glisse parallèlement à Ox avec une vitesse V : à l'instant t le cylindre occupe une certaine position (*fig.* 341), puis il se déplace avec la vitesse V et, au bout du temps

$$T = \frac{l}{V} = \frac{2\pi}{s}, \tag{12}$$

il a glissé d'une longueur l égale à la distance AB de deux vagues consécutives : *il offre alors le même aspect qu'à l'instant t*, car chaque vague a remplacé la précédente. Le temps T ainsi défini est la *période* de l'ondulation.

Avec ces notations, on peut écrire l'équation de la surface libre sous l'une des formes

$$y = a\cos\left[\frac{2\pi}{l}(x - Vt) + \alpha\right],$$

$$y = a\cos\left[2\pi\left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T}\right) + \alpha\right],$$

où l'homogénéité est en évidence.

Ondes progressives simples superposées. — Quand la surface libre a une équation de la forme

$$y = a_1\cos(m_1x - s_1t + \alpha_1) + a_2\cos(m_2x - s_2t + \alpha_2) + \dots + a_n\cos(m_nx - s_nt + \alpha_n),$$

on dit que n ondes progressives simples se propagent simultanément à la surface du liquide : chacune de ces ondes possède son amplitude, sa longueur, sa vitesse de propagation et sa période.

Ondes stationnaires. Clapotis. — Supposons, pour prendre un exemple particulier, que deux ondes progressives simples de même amplitude et de même longueur se propagent en même temps à la surface d'un liquide *avec des vitesses égales et opposées,* et cherchons la forme de la surface libre à l'instant t. Cette surface aura

pour équation

$$y = a\cos\left[\frac{2\pi}{l}(x - Vt) + \alpha\right] + a\cos\left[\frac{2\pi}{l}(x + Vt) + \beta\right];$$

en remplaçant la somme des deux cosinus par un produit de cosinus, on a

$$y = 2a\cos\left(\frac{\pi V}{l}t + \frac{\beta - \alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{l}x + \frac{\beta + \alpha}{2}\right). \tag{13}$$

A l'instant t la surface est encore un cylindre ondulé dont la base est une courbe sinusoïdale, mais la forme de cette courbe change avec t. Les valeurs de x qui rendent y maximum ou minimum sont *indépendantes de t*.

$$x_0 = -l\frac{\beta + \alpha}{2\pi}, \qquad x_k = -l\frac{\beta + \alpha}{2\pi} + kl;$$

par contre, la valeur d'un maximum ou d'un minimum déterminé

$$\pm 2a\cos\left(\frac{\pi V}{l}t + \frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

varie avec t et oscille entre $-2a$ et $+2a$. La crête d'une vague ne fait donc que monter et descendre sur la même verticale d'un mouvement oscillatoire : quand son ordonnée est nulle, la surface libre redevient momentanément plane : après cet instant, la vague fait place à un creux qui va en s'accusant jusqu'au moment où le fond du creux a atteint l'ordonnée $-2a$; puis le fond du creux remonte, etc. Des ondes de cette nature s'appellent *ondes stationnaires*. Elles donnent naissance au phénomène du *clapotis* (*voir* n° 788).

786. Dynamique du mouvement irrotationnel par ondes parallèles à la surface d'un liquide pesant. — Soit un liquide pesant en équilibre dans un canal indéfini, de profondeur constante, limité latéralement par deux parois planes verticales et parallèles entre elles. Prenons le plan xOy parallèle aux parois, l'axe Ox étant horizontal et situé sur la surface libre, l'axe Oy étant vertical ascendant. Écartons le liquide très peu de sa position d'équilibre de telle façon que chaque élément se déplace parallèlement au plan des xy et que tous les éléments situés sur une même perpendicu-

laire à ce plan subissent le même déplacement initial; imprimons, en outre, à chaque élément une vitesse initiale très petite parallèle au plan des xy, de telle façon que tous les éléments situés sur une même perpendiculaire à ce plan aient une même vitesse. Le liquide prendra alors un mouvement ondulatoire parallèle au plan des xy.

Nous supposons ici que ce mouvement est *irrotationnel:* pour cela, il faut et il suffit, d'après le théorème de Lagrange (n° 730) que les vitesses initiales (u_0, v_0, w_0) dérivent d'un potentiel φ_0; dans les hypothèses actuelles w_0 est nul, et le potentiel φ_0 dépend uniquement des coordonnées initiales x et y et non de z. On pourrait, par exemple, réaliser ces conditions en immergeant légèrement dans le liquide des cylindres solides perpendiculaires au plan des xy, laissant le liquide revenir au repos, puis retirant brusquement, au même instant, tous les cylindres; dans cette hypothèse, les vitesses initiales seraient nulles, et la fonction φ_0 serait nulle.

A un instant quelconque t, les vitesses u, v d'un élément fluide de coordonnées x, y dériveront d'un potentiel $\varphi(x, y, t)$. Ce potentiel devra remplir les conditions suivantes :

1° *Condition indéfinie.* — Le potentiel φ doit vérifier, à chaque instant t, dans toute la masse liquide, l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

2° *Conditions aux limites.* — Le liquide est borné par les parois latérales du canal, par le fond, situé à la profondeur $y = -h$, et par la surface libre. Tout d'abord, le long des parois latérales, les vitesses doivent être tangentes à ces parois, ce qui a lieu puisque le mouvement se fait parallèlement au plan xOy. Puis, sur le fond, la vitesse doit être tangente au fond; la composante v doit donc être nulle, et l'on doit avoir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad \text{pour} \qquad y = -h. \tag{15}$$

Enfin la surface libre doit être, à chaque instant, une surface d'égale pression, car sur cette surface s'exerce la pression atmosphérique p_a. On a (n° 783), pour déterminer la pression p_1, la

formule (5) où la fonction des forces U est $-gy$:

$$\frac{p_1}{\rho} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gy. \tag{16}$$

Désignons, pour simplifier, par p l'excès de la pression réelle p_1 en un point sur la pression atmosphérique p_a :

$$p = p_1 - p_a;$$

on aura, en remplaçant la fonction φ par la nouvelle fonction

$$\varphi + t\frac{p_a}{\rho},$$

qui peut également servir de fonction des vitesses,

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gy. \tag{17}$$

La surface libre a alors pour équation

$$p = p_1 - p_a = 0. \tag{18}$$

Comme cette surface est une surface limite mobile, les vitesses doivent y vérifier la condition du n° **727**, où l'on remplace u, v, w par $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, 0 :

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

3° *Conditions initiales.* — A l'instant $t = 0$, la surface libre a une forme arbitrairement donnée, et le potentiel φ des vitesses se réduit à une fonction donnée $\varphi_0(x, y)$.

Tel est l'énoncé général du problème. On ne peut le résoudre qu'approximativement, en supposant les vitesses assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits.

C'est cette solution approchée que nous allons exposer. Nous nous contenterons d'abord de trouver une fonction simple $\varphi(x, y, t)$ vérifiant les conditions indéfinies et les conditions aux limites : une telle fonction donnera une solution du problème, si l'on imagine que les conditions initiales sont précisément celles que l'on obtient en faisant dans cette fonction $t = 0$. La solution générale sera composée de la somme d'une infinité de solutions simples.

787. Équations approchées. — Supposons les vitesses assez petites pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits, c'est-à-dire les carrés et les produits de $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ et des dérivées de ces quantités par rapport à t. L'expression (17) de l'excès de la pression sur la pression atmosphérique devient

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - gy, \tag{20}$$

et la condition (19) à la surface libre devient, en remplaçant p par cette valeur,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial y} + g\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

ou, en négligeant le premier et le deuxième terme,

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{21}$$

Solution simple donnant une onde progressive simple. — En cherchant à satisfaire à l'équation de Laplace (14) par le produit d'une fonction de y par une fonction de x, on voit qu'on peut satisfaire à la condition indéfinie et aux conditions aux limites par une fonction φ de la forme

$$\varphi(x, y, t) = A\left(e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}\right)\sin(mx - st + \alpha), \tag{22}$$

A, α, m, s étant des constantes parmi lesquelles les trois premières sont arbitraires. On devra supposer la constante A très petite, de l'ordre de u et v, puisque u et v sont égaux repectivement à $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Tout d'abord l'équation de Laplace (14) est satisfaite, quelles que soient les constantes; ensuite la condition au fond (15), que $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ s'annule pour $y = -h$, est également satisfaite.

Restent les conditions à la surface libre : l'équation de cette surface $p = 0$ est, d'après (20),

$$gy + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

c'est-à-dire

$$y = \frac{As}{g}(e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)})\cos(mx - st + \alpha).$$

L'ordonnée y d'un point de cette surface est très petite : elle est, d'après l'équation ci-dessus, de l'ordre de grandeur de A; dès lors, en développant e^{my} et e^{-my} en séries et négligeant les termes en Ay, Ay^2, ..., on voit qu'on peut remplacer ces exponentielles par 1 et écrire pour l'équation de la surface libre

$$y = \frac{As}{g}(e^{mh} + e^{-mh})\cos(mx - st + \alpha). \tag{23}$$

Le mouvement est donc bien un mouvement ondulatoire simple : les constantes m et s sont liées par une relation que nous allons obtenir en exprimant la dernière condition (21) relative à la surface libre

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

D'après la valeur (22) de φ, cette condition devient, après suppression du facteur $\sin(mx - st + \alpha)$,

$$gm(e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}) - s^2(e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}) = 0,$$

sur la surface libre. Comme, sur cette surface, y est très petit, nous pourrons remplacer approximativement y par 0 et nous aurons, pour déterminer s en fonction de m, l'équation

$$s^2 = gm\frac{e^{mh} - e^{-mh}}{e^{mh} + e^{-mh}}. \tag{24}$$

Avec cette valeur de la constante s, la fonction φ donnée par (22) remplit toutes les conditions aux limites. Elle donne donc une solution du problème, avec des conditions initiales obtenues en faisant dans les équations précédentes $t = 0$.

La relation (24) donne la vitesse de propagation de l'onde progressive simple V en fonction de la longueur d'onde l : en effet, d'après les équations (10) et (11), on a

$$m = \frac{2\pi}{l}, \qquad s = mV = \frac{2\pi V}{l};$$

la relation (24) s'écrit donc

$$V^2 = \frac{gl}{2\pi} \frac{e^{\frac{2\pi h}{l}} - e^{-\frac{2\pi h}{l}}}{e^{\frac{2\pi h}{l}} + e^{-\frac{2\pi h}{l}}}. \tag{25}$$

La période T de l'ondulation est ensuite donnée par la formule (12) :

$$T = \frac{l}{V} = \frac{2\pi}{s}.$$

Si la profondeur h du canal est très grande par rapport à la longueur l de l'onde, le rapport des exponentielles est voisin de 1 et l'on a

$$V^2 = \frac{gl}{2\pi}, \qquad T = \sqrt{2\pi \frac{l}{g}},$$

Si, au contraire, l'onde est très longue par rapport à la profondeur, $\frac{h}{l}$ est petit et l'on peut remplacer approximativement le numérateur $e^{\frac{2\pi h}{l}} - e^{-\frac{2\pi h}{l}}$ par le premier terme de son développement en série $\frac{4\pi h}{l}$ et le dénominateur par 2 ; on a alors

$$V^2 = gh, \qquad T = \sqrt{\frac{l^2}{gh}}.$$

Remarque sur l'équation de la surface libre. — On pourrait obtenir également l'équation approchée de la surface libre par la méthode suivante. Soit

$$y = f(x, t) \tag{26}$$

l'équation de cette surface. Comme elle est une surface limite, on doit avoir sur cette surface (n° 727)

$$v = f'_x u + f'_t; \tag{27}$$

mais f'_x étant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (26) est très petit, car la surface libre diffère peu d'un plan horizontal; on a donc, en négligeant le produit uf'_x et remarquant que $f'_t = \frac{\partial y}{\partial t}$,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = v.$$

D'après la valeur (22) du potentiel des vitesses, on a ainsi

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{A}\, m (e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}) \sin(mx - st + \alpha)$$

sur la surface libre, c'est-à-dire pour y très petit. D'où approximativement, en faisant $y = 0$,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \mathrm{A}\, m (e^{mh} - e^{-mh}) \sin(mx - st + \alpha),$$

et en intégrant on a, pour équation de cette surface,

$$y = \frac{\mathrm{A}\, m}{s} (e^{mh} - e^{-mh}) \cos(mx - st + \alpha). \tag{28}$$

Si l'on compare cette équation à celle que nous avons trouvée par une méthode directe (éq. 23), on voit que ces deux équations sont identiques en vertu de la relation (24) qui lie s, m et h.

Oscillations des molécules. — Soient a et b les coordonnées d'une molécule dans l'état d'équilibre, x et y ses coordonnées à l'instant t et x_1, y_1 les projections de son déplacement; on a :

$$x = a + x_1, \qquad y = b + y_1,$$
$$\frac{dx_1}{dt} = u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

D'après la valeur (22) de φ, on a donc

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathrm{A}\, m [e^{m(y+h)} + e^{-m(y+h)}] \cos(mx - st + \alpha),$$
$$\frac{dy_1}{dt} = \mathrm{A}\, m [e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}] \sin(mx - st + \alpha);$$

comme x_1 et y_1 sont très petits, x et y diffèrent très peu de a et b. Nous pourrons donc, dans les deuxièmes membres, remplacer x et y par a et b ; l'intégration devient alors immédiate et donne, à des constantes additives près,

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\mathrm{A}\, m}{s} [e^{m(b+h)} + e^{-m(b+h)}] \sin(ma - st + \alpha), \\ y_1 = \dfrac{\mathrm{A}\, m}{s} [e^{m(b+h)} - e^{-m(b+h)}] \cos(ma - st + \alpha). \end{cases} \tag{29}$$

Dans ces équations, la seule variable du deuxième membre

est t : la molécule décrit donc une petite ellipse dans le temps $T = \frac{2\pi}{s}$. Pour le fond $b = -h$, cette ellipse est infiniment aplatie, car $y_1 = 0$.

Si la profondeur est infinie, $h = \infty$, ces ellipses se réduisent à des cercles (Basset, *Elementary Treatise*, p. 90).

Fonction de courant. — La fonction de courant ψ se déduit du potentiel φ par les formules du n° 783 :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

On a donc, dans le mouvement actuel, d'après l'expression (22) de φ :

$$\psi = A\left[e^{m(y+h)} - e^{-m(y+h)}\right]\cos(mx - st + \alpha).$$

788. Cas général. Exemple du clapotis. — Puisque dans le problème approché toutes les conditions sont linéaires, si l'on a n solutions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ vérifiant les conditions indéfinies et aux limites, on en obtient une nouvelle en les ajoutant et en prenant

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

Les coefficients A, m et α étant arbitraires dans la fonction φ donnée par la formule (22), on aura une infinité de solutions en donnant à ces constantes telles valeurs que l'on voudra et, en les ajoutant, on aura une solution dépendant d'une infinité de constantes. On pourra ensuite disposer de ces constantes de façon à satisfaire à des conditions initiales données. Il faut remarquer qu'à chaque valeur de m correspondent deux solutions, car, m étant donné, la formule (24) détermine pour s deux valeurs égales et de signes contraires.

La place nous manque pour indiquer des applications de cette méthode dont on trouvera le développement dans le Mémoire de Cauchy pour le cas d'une profondeur indéfinie. Nous nous bornerons à un exemple.

Clapotis. — L'application la plus simple de cette méthode générale consiste à composer deux ondes progressives simples de même période, de même amplitude, avec des vitesses de propagation égales et opposées. On obtient alors une onde station-

naire (n° 785) appelée *clapotis*. La période T de l'ondulation est la même que celle des deux ondes progressives composantes. Par exemple, pour une profondeur indéfinie

$$T = \sqrt{2\pi \frac{l}{g}}.$$

On trouvera dans une thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris en 1897 : *Formation et extinction du clapotis,* par M. Nau (Gauthier-Villars), un résumé des travaux publiés sur cette question, avec des reproductions de photographies de M. Marey.

789. **Onde solitaire. Indications.** — L'expérience montre qu'une onde solitaire, c'est-à-dire une intumescence unique, peut se propager à la surface d'un liquide. On peut obtenir une onde de ce genre en versant brusquement du dehors, à l'entrée d'un canal, un certain volume d'eau ; il se propage alors dans le canal un gonflement tout en relief ayant ses deux moitiés d'avant et d'arrière symétriques, et se propageant comme tout d'une pièce le long du canal avec la vitesse d'un corps tombé dans le vide d'une hauteur moitié de la profondeur totale de l'eau au-dessous du sommet de l'onde. A la même classe de mouvement appartiennent également les *ondes solitaires négatives* constituées par un creux et non par un gonflement (1).

Des expériences sur ce sujet ont été faites par Scott Russell (2), puis par MM. Darcy et Bazin (3).

Un premier essai de théorie a été tenté par Earnshaw (4) en 1845, mais n'a pas donné de résultats satisfaisants. La véritable théorie du phénomène a été découverte par M. Boussinesq (5) en 1871 ; une théorie analogue a ensuite été donnée par lord Rayleigh (6) en 1876.

790. **Jets liquides parallèles à un plan. Indications.** — Supposons un vase cylindrique ayant ses génératrices perpendiculaires au plan des xy et ayant pour base sur ce plan une courbe indéfinie comme une parabole : enlevons la portion de paroi du vase comprise entre deux génératrices de traces A et B et supposons que par la fente ainsi constituée il s'échappe

---

(1) BOUSSINESQ, *Notice sur les travaux scientifiques.* Lille, Imprimerie Danel, 1885.

(2) *British Assoc.* Rep. on Waves, 1844.

(3) *Rapport de Clapeyron à l'Académie des Sciences* (10 août 1863).

(4) *Transactions Cambridge Philosophical Society,* vol. VIII, p. 326.

(5) *Comptes rendus,* t. LXII.

(6) *Philosophical Magazine,* avril 1876.

un jet liquide parallèle au plan des xy, le mouvement dans le vase étant parallèle au même plan. Nous aurons ainsi le problème du mouvement d'un jet liquide parallèle à un plan. Ce problème n'a été résolu que dans un petit nombre de cas.

Helmholtz, le premier, a déterminé, dans un cas particulier, la forme d'un jet fluide libre, en supposant que le fluide est incompressible, qu'aucune force extérieure n'agit sur ses éléments, que le mouvement est permanent, irrotationnel et a lieu parallèlement à un plan fixe (*Monatsberichte der Berliner Academie*, avril 1868). La méthode de Helmholtz a ensuite été généralisée par Kirchhoff, qui a résolu le même problème dans un certain nombre de cas (*Vorlesungen über mathematische Physik*, leçons XXI et XXII).

Ces méthodes reposent sur l'emploi de la représentation conforme.

Dans une thèse présentée en 1893 à la Faculté des Sciences de Paris, M. Sautreaux a exposé les recherches de Helmholtz et Kirchhoff et a, en outre, traité le cas nouveau où des forces extérieures agissent sur le fluide; il est revenu sur ce problème dans un Mémoire publié en 1896 dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan.

II. — MOUVEMENTS TOURBILLONNAIRES D'UN LIQUIDE.

791. Propriétés et équations générales. — Soit un liquide qui se meut parallèlement au plan fixe xOy.

Comme nous l'avons dit au commencement de ce Chapitre, le liquide peut être limité par des parois fixes ayant la forme d'un cylindre droit perpendiculaire au plan des xy, le cylindre étant fermé par deux bases planes parallèles à ce plan. Le liquide peut, en outre, présenter des surfaces libres qui seront aussi des surfaces cylindriques perpendiculaires au plan des xy. Le mouvement, étant le même dans chaque section droite du cylindre liquide, est évidemment indépendant de la hauteur de ce cylindre. Nous supposerons alors cette hauteur infinie dans les deux sens, au-dessus et au-dessous du plan des xy.

Si, dans un élément dm du liquide situé dans le plan xOy au point x, y, le tourbillon Ω n'est pas nul, il est perpendiculaire au plan xOy (n° 780) et sa projection ζ sur un axe Oz normal au plan du mouvement est

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right); \tag{1}$$

cette projection est positive ou négative suivant le sens dans lequel

se fait la rotation de l'élément considéré. Les lignes de tourbillon sont actuellement des droites indéfinies perpendiculaires au plan des xy, et les tubes de tourbillon des cylindres perpendiculaires à ce plan.

Soient un tube de tourbillon infiniment délié, $d\sigma$ la section droite de ce tube, c'est-à-dire sa trace sur le plan des xy. Le moment ou l'intensité d'un tube de tourbillon est, en général,

$$I = 2\Omega\, d\sigma;$$

actuellement, le tourbillon se réduit à sa composante parallèle à Oz, $\Omega = \pm\zeta$; nous prendrons pour intensité du tube

$$I = 2\zeta\, d\sigma, \tag{2}$$

en convenant de donner un signe à l'intensité, suivant que le tube tourbillonne dans un sens ou dans l'autre.

Quand t varie, ce tube se déplace, *mais* $d\sigma$ *et* ζ *restent constants.* En effet, considérons le plan des xy et un plan parallèle situé à la distance h du plan des xy : ces deux plans découpent, dans le tube de tourbillon, un élément liquide de volume $h\, d\sigma$. Comme un tube de tourbillon reste toujours composé des mêmes éléments fluides et que le fluide est supposé être un liquide incompressible, le volume $h\, d\sigma$ est constant; donc $d\sigma$ *est constant.* D'autre part, l'intensité (2) d'un tube de tourbillon est constante dans le temps; donc le produit $\zeta\, d\sigma$ est constant, et *comme* $d\sigma$ *est constant,* ζ *l'est aussi.*

Un tube de tourbillon de section droite finie étant la réunion de tubes infiniment déliés, la section droite de ce tube a une aire constante, et, en chaque élément de cette aire fluide, ζ est constant.

Il faut alors, à un instant t, se représenter la masse liquide du plan des xy comme décomposée en deux sortes d'aires : les unes, S_1, S_2, ..., S_n, formant les sections droites des tubes de tourbillon, les autres comprenant les éléments animés d'un mouvement irrotationnel; les aires liquides S_1, S_2, ..., S_n se déplacent en conservant une grandeur constante et, en chacun des éléments matériels qui les constituent, ζ a une valeur, constante dans le temps, pouvant varier d'un élément à l'autre; l'ensemble des aires

restantes est également constante, si elle est finie, et en tous les points de ces aires restantes ζ est nul.

Expressions analytiques. — En introduisant la fonction de courant $\psi(x, y, t)$, on a, dans tout le fluide (n° 783), pour les composantes de la vitesse,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3}$$

d'où, d'après (1),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2\zeta. \tag{4}$$

On peut dire que la fonction ψ vérifie à chaque instant cette équation en tous les points de l'aire totale occupée par le liquide dans le plan des xy, ζ étant différent de zéro dans les aires S_1, S_2, ..., S_n et nul à l'extérieur de ces aires. Cette fonction ψ est en outre assujettie à vérifier les conditions initiales et les conditions aux limites. L'équation (4) montre une analogie remarquable entre la fonction ψ et le potentiel logarithmique (n° 605), analogie que nous retrouverons plus loin.

792. Tubes infiniment déliés dans un liquide indéfini dans le sens xOy. — Étudions en détail le cas particulier où le liquide s'étend à l'infini dans tous les sens dans le plan xOy; comme dans ce qui précède nous l'avons déjà supposé indéfini normalement au plan xOy, on voit que nous sommes en présence d'un liquide indéfini animé d'un mouvement parallèle au plan xOy.

Nous avons étudié d'une manière générale la théorie des tourbillons dans un fluide indéfini (n° 768), et nous avons déterminé la part contributive de chaque élément matériel en rotation dans la vitesse d'un élément quelconque de la masse. On pourra appliquer ces théorèmes au cas actuel. D'après les analogies électrodynamiques que nous avons mises en évidence, chaque tube de tourbillon infiniment délié est analogue à un courant d'intensité I parcourant ce tube; actuellement, tous ces courants sont rectilignes, indéfinis, perpendiculaires au plan xOy, et la vitesse d'un élément dm du fluide est identique à l'action résultante de tous ces courants sur un pôle magnétique placé en dm.

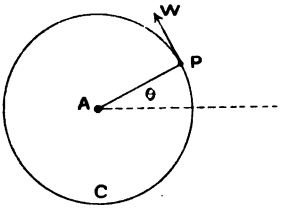
La détermination de la vitesse d'un élément fluide, quand on

connaît les positions et les intensités des divers tubes de tourbillon à l'instant considéré, se trouve ainsi ramenée à un problème élémentaire de Physique.

Nous allons traiter directement le problème en envisageant successivement les cas où il y aurait un seul tube de tourbillon infiniment délié, ou un nombre quelconque de ces tubes.

Un seul tube de tourbillon infiniment délié. — Soit à l'instant t un seul tube de tourbillon infiniment délié, d'intensité I, ayant pour trace sur le plan xOy une aire infiniment petite $d\sigma$ située en un point A (*fig.* 342). La part contributive de chaque

Fig. 342.



élément infiniment petit de ce tube dans la vitesse W d'un élément liquide placé au point P du plan des xy est perpendiculaire au plan de l'élément du tube et du point P : la vitesse W elle-même est donc aussi perpendiculaire au plan passant par le tube et par P; elle est dans le plan de xy, perpendiculaire à la droite AP, dans le sens dans lequel la rotation ζ des éléments du tube tend à entraîner le point P (*fig.* 342). Calculons directement la grandeur W de cette vitesse.

Par raison de symétrie, la valeur numérique de W est la même en tous les points d'une circonférence C décrite de A comme centre avec $AP = r$ comme rayon. L'espace occupé par le fluide irrotationnel indéfini extérieur au tube est doublement connexe (n° 763), la circulation *a la même valeur numérique* sur toutes les lignes fermées entourant une fois le tube : cette valeur est précisément l'intensité $I = 2\zeta\, d\sigma$ du tube (n°s 759 - 760). Prenons, en particulier, la circulation le long de la circonférence C; nous aurons

$$I = \int_C u\, dx + v\, dy = \int_C W\, ds \cos(W, ds),$$

ds étant un élément de la circonférence C, et l'intégration étant faite le long de la circonférence. Or $\cos(W, ds) = 1$, car W est tangent à la circonférence; en outre, W ayant la même valeur numérique le long de la circonférence peut être mis en facteur, et l'on a

$$I = W \int_C ds = W . 2\pi r,$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}. \tag{5}$$

On a ainsi la distribution des vitesses dans la partie irrotationnelle : la vitesse en P est perpendiculaire au rayon $AP = r$ et varie en raison inverse de ce rayon.

Quant au tube tourbillon lui-même, il reste évidemment *immobile,* en vertu de la symétrie du mouvement autour du tube.

On déduit de là les expressions analytiques suivantes pour les projections u et v de la vitesse W de l'élément liquide placé au point P (x, y). Soient θ l'angle de AP avec Ox, a, b les coordonnées du point A; on a

$$x - a = r\cos\theta, \qquad y - b = r\sin\theta,$$

puis, comme W est perpendiculaire à AP,

$$u = -W\sin\theta, \qquad v = W\cos\theta,$$

d'où enfin, d'après (5),

$$u = -\frac{I}{2\pi} \frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2}, \qquad v = \frac{I}{2\pi} \frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}. \tag{6}$$

Comme ce sont là les composantes de la vitesse dans la partie irrotationnelle, il existe un potentiel φ des vitesses qui est

$$\varphi = \frac{I}{2\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{y-b}{x-a} = \frac{I}{2\pi}\theta; \tag{7}$$

la fonction de courant ψ est

$$\psi = -\frac{I}{2\pi} \operatorname{Log} \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = -\frac{I}{2\pi} \operatorname{Log} r. \tag{8}$$

En désignant par i l'unité complexe $\sqrt{-1}$, nous avons vu que $\varphi + i\psi$ est une fonction de $x + iy$ (n° 793). Actuellement, on a

$$\varphi + i\psi = \frac{I}{2\pi i} \operatorname{Log}[x - a + i(y - b)],$$

comme on le vérifie immédiatement. Posons, pour simplifier,

$$x + iy = z, \qquad a + ib = \alpha; \tag{9}$$

nous aurons

$$\varphi + i\psi = \frac{I}{2\pi i}\operatorname{Log}(z - \alpha). \tag{10}$$

Enfin, on peut remarquer aussi, soit directement à l'aide des relations (6), soit en prenant les dérivées partielles par rapport à x des deux membres de (10), que l'on a

$$u - iv = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{I}{x - a + i(y - b)} = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{I}{z - \alpha}. \tag{11}$$

Plusieurs tubes infiniment déliés. — Soient, à un instant t, plusieurs tubes rectilignes indéfinis perpendiculaires au plan des xy; $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots, d\sigma_n$ les traces de ces tubes sur ce plan en des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de coordonnées $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$, et $I_1, I_2, \ldots, I_n$ les valeurs algébriques des intensités des tubes, d'après la convention faite plus haut (n° 791). Un élément fluide, placé en un point $P(x, y)$ du plan des xy en dehors des tubes, possède une vitesse W, qui est la somme géométrique des vitesses $W_1, W_2, \ldots, W_n$ que posséderait ce point si chacun des tubes existait seul.

Ces vitesses composantes sont déterminées par les formules que nous venons d'établir. Joignons le point P aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, où les tubes rencontrent le plan des xy, et soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les longueurs des droites $A_1P, A_2P, \ldots, A_nP$, et $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ les angles qu'elles font avec Ox. La vitesse W_k dérive du potentiel

$$\varphi_k = \frac{I_k}{2\pi}\theta_k;$$

la fonction de courant correspondante est

$$\psi_k = -\frac{I_k}{2\pi}\operatorname{Log} r_k,$$

et l'on a

$$\varphi_k + i\psi_k = \frac{I_k}{2\pi i}\operatorname{Log}(z - \alpha_k),$$

en posant

$$z = x + iy, \qquad \alpha_k = a_k + ib_k;$$

enfin, les composantes u_k et v_k de cette vitesse W_k suivant ces axes sont données par l'équation

$$u_k - iv_k = \frac{1}{2\pi i}\frac{I_k}{z - a_k}.$$

D'après cela, la vitesse W du point P, somme géométrique des vitesses $W_1, W_2, \ldots, W_n$, dérive du potentiel

$$\varphi = \sum \varphi_k = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n} I_k \theta_k; \tag{12}$$

la fonction de courant ψ est

$$\psi = \sum \psi_k = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{k=n} I_k \operatorname{Log} r_k, \tag{13}$$

où

$$r_k = \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2}.$$

Les projections u, v de la vitesse W communiquée au point $P(x, y)$ par l'ensemble des tubes $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont alors données par l'un ou l'autre des systèmes équivalents

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \tag{14}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{15}$$

On peut écrire aussi

$$u - iv = \sum u_k - iv_k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{I_k}{z - a_k},$$

et remarquer enfin que l'on a

$$\varphi + i\psi = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=n} I_k \operatorname{Log}(z - a_k).$$

Ces formules donnent la distribution des vitesses dans la partie irrotationnelle à un instant t; on en déduit immédiatement les lignes de courant $\psi = \text{const}$.

Mais, quand t varie, les tubes de tourbillons se déplacent en conservant des intensités constantes, de sorte que les coordonnées

a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n de leurs traces sont des fonctions du temps. Ce sont ces fonctions qu'il faudrait connaître pour avoir le mouvement des tubes. Nous allons donner les équations qui les déterminent.

Mouvement des tubes de tourbillon infiniment déliés. — Prenons la trace A_1 du tube d'intensité I_1 sur le plan des xy et soient, comme plus haut, a_1 et b_1 les coordonnées de cette trace, variables avec t. Comme un tube de tourbillon est toujours composé des mêmes éléments matériels, la vitesse V_1 de l'élément liquide placé en A_1 se confond avec la vitesse de la trace du tube et a pour projections $\frac{da_1}{dt}$ et $\frac{db_1}{dt}$. Cela posé, cette vitesse V_1 est la résultante des vitesses imprimées à l'élément A_1 d'une part par le tube I_1 lui-même, et d'autre part par les autres tubes I_2, I_3, ..., I_n. Mais nous avons vu (p. 476) que, si un tube infiniment délié, I_1 par exemple, existait seul, il resterait immobile : la vitesse communiquée à l'élément A_1 par le tube I_1 est donc nulle, et la vitesse cherchée V_1 de cet élément est la résultante des vitesses qui lui sont communiquées par les autres tubes I_2, I_3, ..., I_n. D'après ce que nous venons de voir (formules 15), les composantes u, v de la vitesse que communiquent à un point quelconque $P(x, y)$ les tubes I_2, I_3 ..., I_n sont données par les relations

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{16}$$

ψ désignant la somme

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \sum I_k \log r_k$$

relative à ces tubes, c'est-à-dire, en détaillant, puisque le tube 1 est laissé de côté,

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} (I_2 \operatorname{Log} r_2 + I_3 \operatorname{Log} r_3 + \ldots + I_n \operatorname{Log} r_n), \tag{17}$$

où

$$r_k = \sqrt{(x - a_k)^2 + (y - b_k)^2}.$$

Pour avoir en particulier les composantes $\frac{da_1}{dt}$ et $\frac{db_1}{dt}$ de la vitesse V_1, que communiquent ces tubes au point $A_1(a_1, b_1)$, il suf-

fira de faire, dans les formules (16) et (17),

$$x = a_1, \qquad y = b_1;$$

par cette substitution, la fonction ψ définie par (17) devient

$$\psi_1 = -\frac{1}{2\pi}(I_2 \operatorname{Log} r_{12} + I_3 \operatorname{Log} r_{13} + \ldots + I_k \operatorname{Log} r_{1k}), \tag{18}$$

où

$$r_{1k} = \sqrt{(a_1 - a_k)^2 + (b_1 - b_k)^2},$$

et les formules (16) donnent

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1}, \qquad \frac{db_1}{dt} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial a_1}. \tag{19}$$

On obtiendra, par un calcul analogue, en permutant les indices, les expressions des dérivées de $a_2, b_2, \ldots a_n, b_n$ par rapport au temps,

$$\frac{da_2}{dt} = \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2}, \qquad \frac{db_2}{dt} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial a_2}, \tag{19}'$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{2\pi}(I_1 \operatorname{Log} r_{21} + I_3 \operatorname{Log} r_{23} + \ldots + I_n \operatorname{Log} r_{2n}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On obtient ainsi un système de $2n$ équations différentielles du premier ordre définissant $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ en fonction du temps : ce sont les équations du mouvement des tubes considérés.

Réduction des équations du mouvement des tubes à la forme canonique. — On peut faire en sorte que dans les seconds membres des équations du mouvement (19), (19)', ... figurent les dérivées partielles *d'une même fonction*. Pour cela, désignons par r_{hk} la distance des points $A_h A_k$

$$r_{hk} = \sqrt{(a_h - a_k)^2 + (b_h - b_k)^2}$$

et posons

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{hk} I_h I_k \operatorname{Log} r_{hk}, \tag{20}$$

la somme étant étendue à toutes les combinaisons des points $A_h A_k$ deux à deux, de telle façon que, dans cette somme, figure une fois, et une seule fois, la distance de deux des points. En

mettant en évidence tous les termes qui contiennent a_1 et b_1, on peut écrire

$$H = -\frac{I_1}{2\pi}(I_2 \operatorname{Log} r_{12} + I_3 \operatorname{Log} r_{13} + \ldots + I_n \operatorname{Log} r_{1n}) + K,$$

les termes compris dans K ne contenant plus ni a_1 ni b_1 : on peut écrire aussi, d'après la valeur (18) de ψ_1,

$$H = I_1 \psi_1 + K.$$

Donc

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} = I_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial a_1}, \qquad \frac{\partial H}{\partial b_1} = I_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial b_1}.$$

On aura de même

$$\frac{\partial H}{\partial a_2} = I_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial a_2}, \qquad \frac{\partial H}{\partial b_2} = I_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial b_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations du mouvement (19), (19)', ... peuvent alors être écrites

$$(21) \quad \begin{cases} I_1 \dfrac{da_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial b_1}, & I_1 \dfrac{db_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial a_1}, \\ I_2 \dfrac{da_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial b_2}, & I_2 \dfrac{db_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial a_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_n \dfrac{da_n}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial b_n}, & I_n \dfrac{db_n}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial a_n}, \end{cases}$$

où H désigne la fonction (20).

Ces équations sont d'une forme très voisine de la forme canonique (Chap. XXV) : pour les ramener exactement à la forme canonique, il suffirait de prendre comme variables les quantités

$$c_1 = I_1 b_1, \qquad c_2 = I_2 b_2, \qquad \ldots, \qquad c_n = I_n b_n,$$

et d'écrire

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial c_1}, \qquad \frac{dc_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial a_1}, \qquad \ldots;$$

mais nous laisserons aux équations la forme (21).

Nous allons obtenir quelques propriétés simples du mouvement en nous basant sur certaines propriétés de la fonction H.

Propriétés de la fonction H. — La fonction H dépendant seu-

lement des distances mutuelles r_{hk} des points $A_1, \ldots, A_k$, ne change pas de valeur quand on déplace l'ensemble de ces points comme une figure invariable.

1° Tout d'abord, imaginons qu'on déplace l'ensemble de ces points d'une quantité infiniment petite parallèlement à Ox : les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ restent constantes et les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ augmentent toutes d'une même quantité infiniment petite δa. La fonction H devant garder la même valeur, sa différentielle totale correspondante est nulle.

$$\frac{\partial H}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial H}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial a_n}\delta a_n = 0,$$

ou encore comme

$$\delta a_1 = \delta a_2 = \ldots = \delta a_n = \delta a,$$

$$\frac{\partial H}{\partial a_1} + \frac{\partial H}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial a_n} = 0. \tag{22}$$

Cette identité est d'ailleurs très facile à vérifier directement. De même, en écrivant qu'un transport d'ensemble parallèlement à Oy n'altère pas H, on a l'identité

$$\frac{\partial H}{\partial b_1} + \frac{\partial H}{\partial b_2} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial b_n} = 0. \tag{23}$$

2° La fonction H reste inaltérée quand on fait tourner le système des points A_k d'un angle infiniment petit $\delta\theta$ autour de l'origine; or on a, dans ce cas, pour les déplacements infiniment petits des points A_k,

$$\delta a_k = -b_k\delta\theta, \qquad \delta b_k = a_k\delta\theta,$$

comme on l'a vu plusieurs fois à propos du théorème du travail virtuel. La variation correspondante de H

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial H}{\partial b_1}\delta b_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial b_n}\delta b_n$$

étant nulle, on a l'identité

$$-b_1\frac{\partial H}{\partial a_1} + a_1\frac{\partial H}{\partial b_1} - \ldots - b_n\frac{\partial H}{\partial a_n} + a_n\frac{\partial H}{\partial b_n} = 0, \tag{24}$$

facile à vérifier directement.

3° Enfin, nous obtiendrons une dernière identité pour la fonc-

tion H par le théorème des fonctions homogènes. Cette fonction est une fonction linéaire et homogène des quantités $\operatorname{Log} r_{hk}$. Si l'on remplace a_h, b_h et a_k, b_k par λa_h, λb_h, λa_k, λb_k, r_{hk} devient λr_{hk}, et $\operatorname{Log} r_{hk}$ devient $\operatorname{Log} \lambda r_{hk} = \operatorname{Log} r_{hk} + \operatorname{Log} \lambda$.

La formule

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum I_h I_k \operatorname{Log} r_{hk}$$

donne donc identiquement

$$\begin{aligned} &H(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n, \lambda b_1, \lambda b_2, \ldots, \lambda b_n) \\ &\quad = H(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n) - \frac{\operatorname{Log} \lambda}{2\pi} \sum I_h I_k. \end{aligned}$$

Prenons les dérivées partielles des deux membres par rapport à λ, puis dans le résultat faisons $\lambda = 1$; nous aurons

$$(25) \quad a_1 \frac{\partial H}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial H}{\partial a_n} + b_1 \frac{\partial H}{\partial b_1} + \ldots + b_n \frac{\partial H}{\partial b_n} = -\frac{1}{2\pi} \sum I_h I_k,$$

identité que l'on pourra vérifier directement.

Revenons maintenant au mouvement des tubes.

THÉORÈME I. — *Immobilité du centre de gravité du système de tubes.*

Considérons le centre G de masses fictives $I_1, I_2, \ldots, I_n$ placées respectivement aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ qui forment les traces des tubes de tourbillon sur le plan des xy. Les coordonnées x_0, y_0 de ce point sont données par

$$(G) \qquad x_0 \Sigma I_k = \Sigma a_k I_k, \qquad y_0 \Sigma I_k = \Sigma b_k I_k,$$

les sommes étant étendues aux valeurs $1, 2, \ldots, n$ de k. Comme les quantités I_k peuvent être positives ou négatives, le point G pourrait exceptionnellement ne pas exister si ΣI_k était nul; nous écartons ce cas. On a alors le théorème suivant :

Le point G *reste immobile.* En effet, d'après les équations (21) du mouvement, on a, pour les projections de la vitesse du point G,

$$(26) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_0}{dt} \sum I_k = \sum I_k \dfrac{da_k}{dt} = \sum \dfrac{\partial H}{\partial b_k}, \\ \dfrac{dy_0}{dt} \sum I_k = \sum I_k \dfrac{db_k}{dt} = -\sum \dfrac{\partial H}{\partial a_k}. \end{cases}$$

Mais, d'après les identités (22) et (23), les sommes $\sum \frac{\partial H}{\partial a_k}$ et $\sum \frac{\partial H}{\partial b_k}$ sont *nulles;* donc x_0 et y_0 sont *constants*, ce qu'il fallait démontrer.

Dans le cas exceptionnel où $\Sigma I_k = 0$, le point G n'existe plus, mais on aura toujours les deux équations

$$\sum I_k \frac{da_k}{dt} = 0, \qquad \sum I_k \frac{db_k}{dt} = 0,$$

qui donnent les deux intégrales premières

$$\Sigma I_k a_k = \text{const.}, \qquad \Sigma I_k b_k = \text{const.}$$

THÉORÈME II. — *La somme des moments d'inertie des masses fictives* $I_1, I_2, \ldots, I_n$, *placées aux points* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *par rapport à un axe fixe* Oz *parallèle aux tubes, est constante.*

En effet, d'après les équations du mouvement (21), on a

$$\frac{d}{dt}\left[I_k(a_k^2 + b_k^2) \right] = 2\left(a_k \frac{\partial H}{\partial b_k} - b_k \frac{\partial H}{\partial a_k} \right).$$

Faisant la somme de toutes ces équations pour tous les tubes, on a

$$\frac{d}{dt} \sum I_k(a_k^2 + b_k^2) = 2 \sum \left(a_k \frac{\partial H}{\partial b_k} - b_k \frac{\partial H}{\partial a_k} \right).$$

Mais la somme du second membre est nulle, d'après l'identité (24) établie plus haut. On a donc l'intégrale première

$$\Sigma I_k(a_k^2 + b_k^2) = \text{const.},$$

qui exprime le théorème énoncé.

THÉORÈME III. — *Dans le mouvement des tubes la fonction* H *reste constante.*

En effet, la fonction H dépend du temps par l'intermédiaire des lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, qui sont fonctions de t. On a donc

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a_1}\frac{da_1}{dt} + \frac{\partial H}{\partial b_1}\frac{db_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial a_n}\frac{da_n}{dt} + \frac{\partial H}{\partial b_n}\frac{db_n}{dt}.$$

Mais, en portant dans le second membre les valeurs de $\frac{da_1}{dt}$, $\frac{db_1}{dt}$, ... tirées des équations du mouvement (21), on trouve immédiatement *zéro* dans le second membre. Donc la dérivée totale de H par rapport à t est nulle, et H est constant,

$$H = \text{const.}.$$

THÉORÈME IV. — *La somme des moments des quantités de mouvement des masses* $I_1, I_2, \ldots, I_n$ *par rapport à un axe fixe* Oz *parallèle aux tubes est constante.*

En effet, d'après les équations du mouvement (21), on a

$$\sum I_k \left(a_k \frac{db_k}{dt} - b_k \frac{da_k}{dt} \right) = - \sum \left(a_k \frac{\partial H}{\partial a_k} + b_k \frac{\partial H}{\partial b_k} \right);$$

et d'après l'identité (25), déduite du théorème des fonctions homogènes, cette dernière quantité est égale à la constante numérique

$$\frac{1}{2\pi} \sum I_h I_k.$$

Le théorème est donc démontré. Il diffère des précédents en ce qu'il exprime simplement une propriété des équations du mouvement, sans en fournir une intégrale première.

Résumé. — En résumé, nous avons trouvé quatre intégrales premières des équations du mouvement des tubes : deux par le théorème I, une autre par chacun des théorèmes II et III. On peut vérifier que l'on obtiendrait la dernière (th. III) en appliquant le théorème des forces vives à une tranche du liquide comprise entre deux plans fixes parallèles au plan xOy (*voir* POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, p. 78).

Cas particulier de deux tubes infiniment déliés. — Dans le cas de deux tubes seulement, I_1 et I_2, on peut trouver complètement le mouvement des deux tubes. Nous laisserons au lecteur le soin de traiter directement le problème, et nous le résoudrons en appliquant les théorèmes généraux que nous venons de trouver.

La fonction H est ici

$$H = - \frac{1}{2\pi} I_1 I_2 \operatorname{Log} r_{12}.$$

Nous avons vu que H reste *constant* pendant le mouvement : donc la distance r_{12} des deux tubes est constante.

Supposons $I_1 + I_2 \gtrless 0$; alors le centre de gravité G existe. C'est un point situé sur la droite A_1A_2 de telle façon que l'on ait en grandeur et en signe

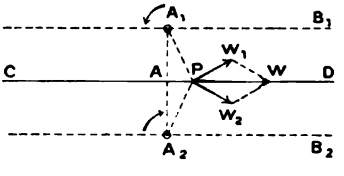
$$\frac{GA_1}{I_1} = -\frac{GA_2}{I_2} = \frac{A_2A_1}{I_1 + I_2}.$$

Comme la distance A_1A_2 des deux tubes est constante, les segments GA_1 et GA_2 sont eux-mêmes constants ; comme le point G est fixe, les points A_1 et A_2 décrivent des cercles ayant le point G comme centre. En outre, la somme des moments des quantités de mouvement étant constante par rapport à un axe Gz parallèle aux tubes, les points A_1 et A_2 se meuvent sur leurs cercles respectifs avec des vitesses constantes.

Les deux cercles de centre G que décrivent les deux tubes sont parcourus dans le même sens ou dans des sens contraires, suivant que le centre de gravité G est extérieur ou intérieur au segment A_1A_2, c'est-à-dire suivant que I_1 et I_2 sont de signes contraires ou de même signe.

Cas spécial où $I_1 + I_2 = 0$. — Si les deux tubes ont des intensités égales, mais tourbillonnent en sens contraires, on a $I_1 + I_2 = 0$ (*fig.* 343) ; le point G est alors rejeté à l'infini, dans la direc-

Fig. 343.



tion A_1A_2, et les points A_1 et A_2 décrivent, avec des vitesses égales, des droites fixes A_1B_1 et A_2B_2 perpendiculaires à A_1A_2 : la valeur commune des deux vitesses est alors

$$V = \frac{1}{2\pi}\frac{I}{A_1A_2},$$

I désignant la valeur absolue de l'intensité des deux tubes.

Une particule P placée sur la perpendiculaire CD au milieu

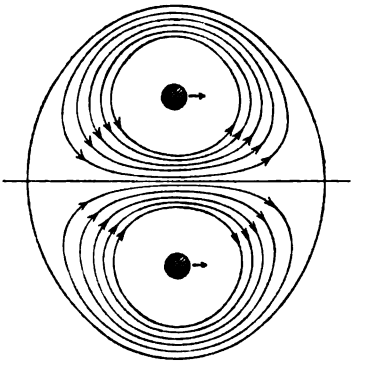
de A_1A_2 a une vitesse W résultant de deux vitesses W_1 et W_2 provenant des tubes de tourbillon I_1 et I_2; ces deux vitesses sont respectivement perpendiculaires à PA_1 et PA_2 dans les sens donnés par les rotations des tourbillons, elles sont égales au quotient de $\frac{1}{2\pi} I$ par la valeur commune des distances PA_1 et PA_2; la vitesse résultante W est donc dirigée suivant CD. En particulier, la vitesse de la particule placée au point A, milieu de A_1A_2, est

$$\frac{1}{2\pi}\frac{I}{AA_1} + \frac{1}{2\pi}\frac{I}{AA_2} = \frac{1}{2\pi}\frac{2I}{A_1A_2};$$

elle est quadruple de la vitesse V des deux tubes de tourbillon.

Atmosphère d'un tube de tourbillon. — Ce dernier cas particulier fournit un exemple simple d'un fait général signalé par sir W. Thomson (lord Kelvin) dans les *Proceedings R. S. Ed.*, 1867, à savoir que chaque tube-tourbillon est accompagné d'une certaine quantité de fluide sans rotation qui lui forme une sorte d'atmosphère. Ainsi, dans le cas de deux tubes parallèles et de rotations inverses que nous venons de traiter, la vitesse de translation des tourbillons est moindre que celle qu'ils produisent entre eux sur une certaine étendue du plan médian; il existe un

Fig. 343 *bis*.



cylindre lieu des points où la vitesse du fluide a sa composante perpendiculaire au plan des deux tubes égale à leur vitesse de translation commune V : c'est ce cylindre qui limite l'atmosphère ; il entoure les deux tubes. A l'intérieur de ce cylindre, la compo-

sante de la vitesse du liquide parallèle à la vitesse de translation des tourbillons est supérieure à V; elle est moindre à l'extérieur. Les courbes tracées sur la figure 343 *bis* sont des lignes de flux par rapport aux tourbillons. Les lignes extérieures qui n'ont pas été tracées sont grossièrement parallèles à l'axe de symétrie, dont elles s'écartent pour contourner l'atmosphère des tourbillons mobiles. Les équations de ces lignes sont très faciles à déduire de l'analogie électromagnétique. Elles sont indépendantes de l'intensité (¹).

793. Tubes de dimensions finies. — Des tubes de dimensions finies peuvent être regardés comme formés par la réunion d'un très grand nombre de tubes infiniment déliés. Soient, à l'instant t, $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les sections des tubes par le plan des xy; divisons $S_1, S_2, \ldots, S_n$ en aires infiniment petites $d\sigma$ de coordonnées a et b, et appelons ζ la valeur du tourbillon en $d\sigma$. L'ensemble des tubes sera la réunion de tubes infiniment déliés de bases $d\sigma$ et d'intensités respectives $I = 2\zeta\, d\sigma$.

Prenons par exemple le cas d'un fluide indéfini dans tous les sens, parallèlement au plan des xy; on pourra appliquer à l'ensemble des tubes les théorèmes précédents. Par exemple, le centre de gravité G du système de tubes est *immobile;* ce point a des coordonnées x_0, y_0 données par les formules (G), qui deviennent actuellement

$$x_0 \iint \zeta\, d\sigma = \iint a\zeta\, d\sigma,$$
$$y_0 \iint \zeta\, d\sigma = \iint b\zeta\, d\sigma,$$

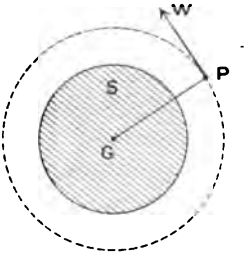
en remplaçant chaque intensité I_k par sa valeur $2\zeta d\sigma$.

Tube cylindrique homogène dans un liquide indéfini. — Soit, par exemple, un seul tube ayant pour base un cercle S de centre G (*fig.* 344) et de rayon R : supposons qu'en chaque point du cercle S le tourbillon ait une valeur constante ζ, le tourbillon étant nul à l'extérieur. Cherchons la distribution des vitesses. Tout d'abord, le centre de gravité qui se confond avec le

(¹) BRILLOUIN, *Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique,* 1891, p. 18.

centre G du cercle est *fixe*. Ensuite, il est évident, par raison de symétrie, que la vitesse W d'un élément quelconque P est per-

Fig. 344.



pendiculaire à GP et fonction de x, y seulement; le mouvement est *permanent*. Pour avoir W, prenons la circulation le long d'une circonférence C décrite de G comme centre, avec GP $= r$ comme rayon; cette circulation est

$$\int u\,dx + v\,dy = \int \mathrm{W}\,ds\cos(\mathrm{W}, ds) = 2\pi r\,\mathrm{W}.$$

D'autre part, d'après le théorème de Stokes, elle est égale (n° 756) à l'intégrale double

$$2\iint \zeta\,d\sigma \tag{27}$$

étendue à l'aire du cercle C. Deux cas sont à distinguer :

1° Le point P est extérieur au tube de tourbillon S, $r > \mathrm{R}$; alors l'intégrale double (27) est étendue seulement à l'aire du cercle de base S, car, en dehors de S, $\zeta = 0$. Comme dans S, ζ est constant, l'intégrale double (27) est

$$2\zeta\pi\mathrm{R}^2,$$

et l'on a

$$\mathrm{W} = \zeta\frac{\mathrm{R}^2}{r} \qquad (r > \mathrm{R}). \tag{28}$$

2° Le point P est intérieur au tube de tourbillon S, $r < \mathrm{R}$; alors l'intégrale (27) est étendue à l'aire du cercle C de rayon r, et, comme ζ est constant, elle a pour valeur

$$2\zeta\pi r^2.$$

Égalant cette expression à la circulation, on a

$$W = \zeta r \qquad (r < R). \tag{29}$$

Le cercle liquide servant de base au tube de tourbillon tourne donc autour de son centre avec une vitesse angulaire ζ.

Ces deux formules (28 et 29) donnent la même valeur pour $r = R$; ce que nous pouvions prévoir, car la vitesse varie d'une manière continue dans le liquide.

Fonction de courant. — En appelant ψ la fonction de courant, nous avons posé (n° 781),

$$d\psi = u\,dy - v\,dx.$$

Si l'on prend comme origine le point G en désignant par θ l'angle polaire xGP, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = r\cos\theta, & y = r\sin\theta, \\ u = -W\sin\theta, & v = W\cos\theta, \end{array} \right. \tag{30}$$

d'où

$$d\psi = -W\,dr.$$

Si le point P est extérieur au tube, on a (formule 28)

$$d\psi = -\zeta\frac{R^2}{r}dr, \qquad \psi = -\zeta R^2 \operatorname{Log} r;$$

si le point est intérieur au tube (formule 29)

$$d\psi = -\zeta r\,dr, \qquad \psi = -\tfrac{1}{2}\zeta r^2.$$

Il serait alors aisé de vérifier que, comme nous l'avons indiqué pour le cas général (n° 791), la quantité $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ est nulle en dehors du tube et égale à -2ζ dans le tube.

A l'extérieur du tube, il existe une fonction des vitesses donnée par

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy = W r\,d\theta,$$

comme il résulte des formules (30); on a donc, d'après l'expression (28) de W,

$$d\varphi = \zeta R^2 d\theta, \qquad \varphi = \zeta R^2\theta.$$

On peut vérifier que, à l'extérieur, $\varphi + i\psi$ est une fonction

de $x + iy$; en effet,

$$\varphi + i\psi = -i\zeta R^2 \operatorname{Log}(x + iy).$$

A l'intérieur du tube, il n'existe pas de potentiel des vitesses, car le mouvement y est *rotationnel.*

794. Cas d'un liquide limité par des cloisons perpendiculaires au plan des xy. — Si le liquide n'est pas indéfini parallèlement au plan des xy, on peut employer des considérations analogues à celles du n° 775 pour un liquide dans un vase quelconque.

On peut aussi se servir de la méthode des images dans certains cas simples.

Supposons, par exemple, un liquide limité par une cloison plane indéfinie perpendiculaire au plan xOy et ayant pour trace la droite CD (*fig.* 343), le liquide recouvrant toute la partie du plan des xy au-dessus de CD. Imaginons, dans ce liquide, un seul tube de tourbillon infiniment délié ayant pour intensité I et pour trace A_1; cherchons le mouvement de ce tube et la distribution des vitesses.

Il est aisé de voir que la distribution des vitesses est la même que si la cloison n'existait pas, si le fluide recouvrait tout le plan des xy et si un deuxième tube de tourbillon A_2, symétrique du premier par rapport à CD, existait dans le liquide indéfini ainsi obtenu. En effet, d'après ce que nous avons vu (p. 486) pour le cas où deux tubes égaux et de sens contraires se meuvent dans un liquide indéfini, les deux tubes tourbillons décriraient des droites parallèles à CD (*fig.* 343), et chaque particule placée sur CD aurait sa vitesse W dirigée suivant CD. Dès lors, d'après le principe des images, on peut remplacer CD par une cloison solide sans rien changer au mouvement du fluide placé d'un côté de CD. La proposition est donc démontrée.

795. **Exemple de mouvement ondulatoire rotationnel d'un liquide pesant : ondes trochoïdales de Gerstner (houle).** — Nous avons traité, dans le § I de ce Chapitre, le mouvement ondulatoire irrotationnel d'un liquide pesant en employant une méthode d'approximation. Dans le cas du mouvement ondulatoire rotationnel d'un liquide pesant de profondeur indéfinie, il est remarquable qu'il existe une solution, découverte par Gerstner en 1802, qui vérifie *rigoureusement* les équations du mouve-

ment (¹). L'exposé de cette question va nous fournir une application intéressante du système des variables de Lagrange.

Soit un liquide pesant, de profondeur indéfinie, animé d'un mouvement parallèle au plan vertical xOy, l'axe Ox étant horizontal et l'axe Oy vertical descendant. Appelons x, y, z les coordonnées d'une particule liquide à l'instant t; a, b, c ses coordonnées initiales : comme le mouvement est parallèle au plan xOy, x et y dépendent uniquement de a, b, t, et z est constamment égal à c.

Les équations du mouvement (n° 726) se réduisent alors aux deux suivantes :

$$(31)\qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = g - \frac{d^2y}{dt^2},$$

auxquelles il faut joindre l'*équation de continuité* $D = 1$ (n° 694), D désignant le déterminant fonctionnel de x, y, z par rapport à a, b, c. Mais actuellement on a

$$z = c, \qquad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial c} = 1,$$

et l'équation de continuité se réduit à

$$(32)\qquad \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} = 1;$$

on pourrait écrire immédiatement cette équation en remarquant que, le liquide étant incompressible, l'aire occupée par une partie du liquide dans le plan xOy reste invariable dans le mouvement.

On peut vérifier les équations (31) et (32) en prenant pour x et y les expressions suivantes :

$$(33)\qquad \begin{cases} x = \alpha + \dfrac{1}{k} e^{-k\beta} \sin k(\alpha + st), \\ y = \beta + \dfrac{1}{k} e^{-k\beta} \cos k(\alpha + st), \end{cases}$$

où k et s sont des constantes absolues, α et β des constantes dépendant des coordonnées initiales a et b et non du temps : les constantes α et β sont supposées définies en fonction des coordonnées initiales de façon que, pour $t = 0$, x et y prennent les valeurs a et b :

$$(34)\qquad \begin{cases} a = \alpha + \dfrac{1}{k} e^{-k\beta} \sin k\alpha, \\ b = \beta + \dfrac{1}{k} e^{-k\beta} \cos k\alpha. \end{cases}$$

(¹) Voyez BASSET, *Treatise on Hydrodynamics*, t. II, p. 148.

Pour simplifier les calculs, il est plus commode de prendre comme variables indépendantes α, β et t au lieu de a, b, t, les variables a et b étant données en fonction de α et β par les formules (34).

La pression p, à l'instant t, en un point (x, y), est une fonction de x, y, t; mais x, y sont des fonctions de α, β, t; on a donc

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial p}{\partial \beta} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta}.$$

En remplaçant dans les deuxièmes membres de ces deux relations $\frac{\partial p}{\partial x}$ et $\frac{\partial p}{\partial y}$ par leurs valeurs tirées des équations (31) du mouvement, on obtient les équations du mouvement sous la nouvelle forme

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{p}{\rho} - gy\right) = -\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} - \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{p}{\rho} - gy\right) = -\dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial \beta} - \dfrac{d^2y}{dt^2}\dfrac{\partial y}{\partial \beta}; \end{cases}$$

enfin l'équation de continuité (32) se transforme facilement à l'aide des relations telles que

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial a},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et elle devient

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\left(\frac{\partial \alpha}{\partial a}\frac{\partial \beta}{\partial b} - \frac{\partial \alpha}{\partial b}\frac{\partial \beta}{\partial a}\right) = 1,$$

comme on le vérifie directement et comme il résulte de la propriété bien connue des déterminants fonctionnels :

$$\frac{d(x, y)}{d(a, b)} = \frac{d(x, y)}{d(\alpha, \beta)}\frac{d(\alpha, \beta)}{d(a, b)}.$$

D'après cela, l'équation de continuité revient à écrire que l'on a

$$(36)\qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = A,$$

A étant une constante indépendante de t.

Cela posé, les expressions (33) de x et y permettent de vérifier les équations (35) et (36).

D'abord ces équations donnent, pour $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \beta}$, ..., des valeurs qui, por-

tées dans l'équation de continuité (36), donnent, après des réductions faciles,

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 1 - e^{-2k\beta},$$

équation qui est bien de la forme (36) où le deuxième membre est constant.

Ensuite ces mêmes équations (33) fournissent, pour $\frac{\partial x}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{d^2x}{dt^2}, \ldots$, des valeurs qui, portées dans les équations du mouvement (35), donnent

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{p}{\rho} - gy\right) = ks^2 e^{-k\beta}\sin k(\alpha + st),$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{p}{\rho} - gy\right) = ks^2 e^{-k\beta}\cos k(\alpha + st) - ks^2 e^{-2k\beta}.$$

Ces formules donnent les dérivées partielles de $\frac{p}{\rho} - gy$ par rapport à α et β, ces dérivées étant prises en regardant t comme constant. On a donc, en intégrant,

$$\frac{p}{\rho} - gy = -s^2 e^{-k\beta}\cos k(\alpha + st) + \frac{1}{2}s^2 e^{-2k\beta} + C,$$

où C est indépendant de α et β mais pourrait contenir t. Remplaçant y par son expression (33), on a la pression en fonction de α, β, t :

$$(37) \qquad \frac{p}{\rho} = g\beta + \left(\frac{g}{k} - s^2\right)e^{-k\beta}\cos k(\alpha + st) + \frac{1}{2}s^2 e^{-2k\beta} + C.$$

Sur la surface libre, la pression doit avoir une valeur constante égale à la pression atmosphérique p_a.

Pour satisfaire à cette condition, prenons pour C une constante indépendante de t et assujettissons les constantes k et s, jusqu'ici quelconques, à vérifier la relation

$$(38) \qquad \frac{g}{k} - s^2 = 0,$$

qui annule le coefficient de $\cos k(\alpha + st)$. La pression est alors

$$(39) \qquad p = \rho\left(g\beta + \frac{1}{2}s^2 e^{-2k\beta} + C\right),$$

où C est déterminé par la condition $p = p_a$ sur la surface libre. D'après cette formule (39), on voit que la pression est indépendante de t : elle conserve la même valeur pour une particule déterminée du liquide. En outre, comme p dépend uniquement de β, les surfaces de niveau, $p = \text{const.}$,

sont les surfaces $\beta = \text{const.}$ En particulier, la surface libre se compose des molécules pour lesquelles β a une valeur constante particulière β_0.

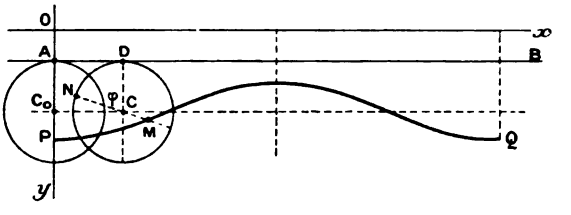
Forme de la surface libre — Sur la surface libre, β prend une valeur constante β_0. Une particule de la surface libre au temps t a donc pour coordonnées

$$(40)\qquad \begin{cases} x = \alpha + \frac{1}{k} e^{-k\beta_0} \sin k(\alpha + st), \\ y = \beta_0 + \frac{1}{k} e^{-k\beta_0} \cos k(\alpha + st). \end{cases}$$

Pour une particule déterminée, α reste constant. Inversement, on obtiendra à un instant t les diverses particules de la surface libre en donnant à t une valeur numérique et faisant varier α de $-\infty$ à $+\infty$. La surface libre est alors un cylindre dont les génératrices sont perpendiculaires au plan des xy et dont la trace sur ce plan est la courbe définie par les équations (40), dans lesquelles t est constant et α variable. Construisons d'abord cette courbe à l'instant initial $t = 0$. Alors x et y prennent des valeurs a, b, et les coordonnées d'un point de la surface libre à l'instant initial sont

$$(41)\qquad \begin{cases} a = \alpha + \frac{1}{k} e^{-k\beta_0} \sin k\alpha, \\ b = \beta_0 + \frac{1}{k} e^{-k\beta_0} \cos k\alpha. \end{cases}$$

Fig. 345.



La courbe décrite par le point $M(a, b)$ quand α varie est une *trochoïde* ou *cycloïde* raccourcie, c'est-à-dire la courbe décrite par un point de l'intérieur d'un cercle roulant sur une droite fixe. En effet, imaginons un cercle de rayon $r = \frac{1}{k}$ roulant sur une droite horizontale AB d'ordonnée

$$y = \beta_0 - \frac{1}{k},$$

au-dessous de cette droite. Soit M un point invariablement lié au cercle à une distance

$$(42)\qquad CM = \frac{1}{k} e^{-k\beta_0}$$

du centre C (*fig.* 345). Supposons que, le point de contact du cercle étant

en A sur Oy, le point décrivant M soit également sur Oy en P au-dessous du centre C_0. Le cercle ayant roulé sur AB de façon que son point de contact avec AB soit venu en D, le point de la circonférence primitivement en A est venu en N, et l'arc DN est égal à AD : si l'on appelle α la longueur AD, l'angle au centre NCD $= \varphi$ est tel que $r\varphi = \alpha$, d'où, d'après la valeur de r, $\varphi = k\alpha$. Les coordonnées de M sont alors

$$a = \alpha + \mathrm{CM}\sin\varphi,$$
$$b = \beta_0 + \mathrm{CM}\cos\varphi;$$

en remplaçant CM par sa valeur (42) et φ par $k\alpha$, on a précisément, pour le lieu de M, la courbe (41) à construire.

Le point M est nécessairement à *l'intérieur* du cercle roulant, car, s'il était sur la circonférence ou à l'extérieur, la courbe aurait des rebroussements ou des points doubles, ce qui est physiquement impossible. D'après cela, CM est moindre que r, ce qui exige $e^{-k\beta_0} < 1$, $\beta_0 > 0$.

Nous avons ainsi la courbe PMQ, dont une ondulation seulement est tracée, formant la trace de la surface libre sur le plan xOy à l'instant $t = 0$. Dans cette courbe, la longueur d'onde l, c'est-à-dire la distance PQ entre les fonds de deux creux consécutifs P et Q, ou les sommets de deux vagues consécutives, est égale à la longueur de la circonférence roulante

$$l = \mathrm{PQ} = 2\pi r = \frac{2\pi}{k}. \tag{43}$$

Cherchons maintenant la forme de la surface libre à l'instant t : nous allons voir que cette surface a pour trace la même courbe qui se serait transportée parallèlement à Ox d'une longueur st. En effet, dans les équations (40), où t a une valeur numérique et où α est un paramètre variable, faisons le changement de paramètre

$$\alpha + st = \alpha';$$

les équations deviennent

$$\begin{cases} x = -st + \alpha' + \frac{1}{k}e^{-k\beta_0}\sin k\alpha', \\ y = \beta_0 + \frac{1}{k}e^{-k\beta_0}\cos k\alpha'. \end{cases} \tag{44}$$

Quand α' varie de $-\infty$ à $+\infty$, le lieu de ce point (x, y) est identique au lieu du point (a, b), défini par les relations (41), qu'on aurait transporté d'une longueur $-st$, parallèlement à Ox. La vitesse de propagation de l'onde est donc

$$\mathrm{V} = \frac{d(st)}{dt} = s.$$

D'après la relation (38), qui lie s et k, on a, en y remplaçant s par V

et k par sa valeur (43) $\frac{2\pi}{l}$,

$$V = \sqrt{\frac{gl}{2\pi}}.$$

Quant à la durée T de l'ondulation, elle résulte immédiatement des expressions (33) de x et y, qui ne changent pas quand t augmente de $\frac{2\pi}{ks}$; donc

$$T = \frac{2\pi}{ks} = \frac{l}{V} = \sqrt{2\pi\frac{l}{g}}.$$

Ces quantités V et T ont donc les valeurs que nous avons déjà trouvées (n° 787) pour la vitesse de propagation et la période d'une onde simple progressive à la surface d'un liquide pesant de profondeur indéfinie.

Houle. — L'onde que nous venons d'étudier analytiquement constitue le phénomène appelé *houle* (1). C'est ce qu'on verra en détail dans l'Ouvrage de M. Guyou intitulé : *Théorie du navire,* 2e édition, Berger-Levrault, 1894, p. 261-284, où l'on trouvera la théorie de la houle exposée par une méthode élémentaire des plus élégantes que le défaut de place nous empêche de reproduire.

Trajectoires des particules. — D'après les équations (33), pour suivre une particule déterminée sans son mouvement, il faut donner à α et β des valeurs constantes et faire varier t : la trajectoire d'une particule est donc le cercle

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{1}{k^2}e^{-2k\beta}$$

de centre (α, β) parcouru dans le temps T. Le rayon $\frac{1}{k}e^{-k\beta}$ de ce cercle décroît et tend vers zéro quand son centre descend, c'est-à-dire quand la profondeur augmente.

Tourbillon. — Le mouvement que nous venons d'étudier est *rotationnel.* En effet, les projections u, v de la vitesse d'une particule sont

$$(45)\qquad \begin{cases} u=\dfrac{dx}{dt} = se^{-k\beta}\cos k(\alpha+st), \\ v=\dfrac{dy}{dt} = -se^{-k\beta}\sin k(\alpha+st). \end{cases}$$

On peut considérer u et v comme des fonctions de x et y; d'ailleurs, x et y sont fonctions de α et β par les équations (33). On a donc, à un

(1) *Voir* BERTIN, *Sur la théorie et l'observation de la houle et du roulis.* Mémoire présenté à l'Académie des Sciences le 11 avril 1870; *Mémorial du Génie maritime,* 1873.

instant t,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta}.$$

Résolvant par rapport à $\frac{\partial u}{\partial y}$ en tenant compte de l'équation de continuité, on a

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -(1 - e^{-2k\beta})\frac{\partial u}{\partial y}.$$

On trouve de même

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = (1 - e^{-2k\beta})\frac{\partial v}{\partial x}.$$

En ajoutant, on obtient, dans le deuxième membre, le double du tourbillon 2ζ

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial v}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha} = 2(1 - e^{-2k\beta})\zeta.$$

En calculant le premier membre d'après les valeurs (33) et (45) de x, y, u, v, on trouve

$$\zeta = ks\frac{e^{-2k\beta}}{1 - e^{-2k\beta}},$$

expression différente de zéro. On voit que la grandeur du tourbillon diminue quand la profondeur augmente.

EXERCICES.

1. Étudier le mouvement des particules liquides dans un *clapotis*, mouvement ondulatoire résultant de deux ondes progressives simples identiques, mais de vitesses opposées (n° 788).

Réponse. — Les trajectoires des particules sont des segments de droites dont on étudiera l'inclinaison sur l'horizon (*voir* NAU, *Thèse*, 1897).

2. Mouvement de trois tubes de tourbillon infiniment déliés dans un liquide indéfini qui se meut parallèlement à un plan fixe.

On résoudra ce problème en appliquant les équations générales (21) au cas de trois tubes (n° 792).

Le problème se ramène à des quadratures, comme on peut le prévoir d'après le théorème du dernier multiplicateur (Chap. XXV). (*Voir* GRÖBLI, *Inaugural Dissertation*, Gœttingen, 1877; KIRCHHOFF, *Mechanik*, p. 260; POINCARÉ, *Leçons sur la théorie des tourbillons*, p. 84.)

3. Mouvement d'un seul tube de tourbillon infiniment délié A_1 dans un liquide qui se meut parallèlement au plan xOy et qui est limité par deux cloisons Ox et Oy formant un dièdre droit.

Réponse. — Le mouvement est le même que si le liquide recouvrait tout le plan xOy et contenait quatre tourbillons placés aux sommets d'un rectangle, le tourbillon A_1 et ses symétriques A_2, A_3, A_4 par rapport aux axes et au point O. (Application du principe des images analogue à celle du n° 794.)

4. Dans la houle du n° 795, vérifier que le niveau de l'eau à l'état d'équilibre est au-dessous de la ligne des centres C_0C du cercle générateur de la trochoïde (*fig.* 345).

Réponse. — On démontre que, dans l'étendue d'une onde PQ, les aires des sections des vagues au-dessus de C_0C sont moindres que les aires des sections des creux au-dessous. La différence entre ces deux aires est égale à l'aire du cercle de rayon CM. Le niveau de l'eau à l'état d'équilibre doit être tel que les aires, des sections des vagues au-dessus du niveau soient équivalentes aux aires des sections des creux au-dessous. (GUYOU, *Théorie du navire,* 2ᵉ édition, p. 270.)

5. *Tourbillon elliptique de Kirchhoff.* — Dans le mouvement d'un liquide indéfini parallèlement à un plan fixe, il peut exister un seul tube de tourbillon, homogène, c'est-à-dire tel que ζ ait la même valeur en tous ses points, ce tube ayant pour section droite une ellipse de grandeur invariable qui tourne d'un mouvement uniforme autour de son centre avec la vitesse angulaire

$$\lambda = 2\zeta \frac{ab}{(a+b)^2},$$

a et b désignant les axes de l'ellipse. Les diverses particules décrivent des cercles non concentriques avec la vitesse angulaire 2λ. (*Voir* KIRCHHOFF, *Mechanik,* p. 261, 264.)

Pour $a = b$, on retrouve les résultats de l'exemple du n° 793.

6. Appliquer aux équations canoniques définissant le mouvement des tubes de tourbillon infiniment déliés (p. 481), les théorèmes généraux sur les équations canoniques (Chap. XXV). (*Voir* une Note de M. ERNESTO LAURA, *Accademia Reale delle Scienze di Torino,* 11 mai 1902.)

CHAPITRE XXXVII.

NOTIONS SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITE.

796. **Généralités et indications bibliographiques.** — La théorie de l'élasticité a pour but l'étude des déformations que subissent les corps sous l'action de forces extérieures. Les principaux fondateurs de cette théorie sont Navier, Cauchy, Poisson, Lamé, Clebsch, Lord Kelvin (sir W. Thomson), Kirchhoff, Saint-Venant.

Nous nous limiterons ici au cas élémentaire où les forces déformantes sont assez petites pour que la déformation puisse être regardée comme *infiniment petite*. Dans ce cas, la distribution intérieure des efforts est liée à celle des déformations par la loi dite de *Hooke*. Mais la considération de ce cas est loin d'être suffisante pour les applications : en suivant une voie ouverte par Lord Kelvin (W. Thomson) (1), on peut rattacher la théorie des déformations finies aux principes de la Thermodynamique, par l'introduction de l'*énergie de déformation :* c'est ce qu'ont fait M. Boussinesq (2), M. Brillouin (3) et MM. Eugène et François Cosserat (4). On peut espérer, en suivant cette voie, arriver à l'explication des faits singuliers que M. Considère a signalés (5),

(1) *On the thermo-elastic and thermo-magnetic properties of matter* (*Mathematical and Physical Papers*, de Lord KELVIN, t. I).

(2) *Mémoires presentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XX.

(3) *Déformations homogènes finies; énergie d'un corps isotrope* (*Comptes rendus*, t. CXII, 1891). — *Leçons sur l'Élasticité et l'Acoustique*, Toulouse, librairie Labouche, 1884-1885.

(4) *Sur la théorie de l'élasticité* (premier Mémoire) (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. X, 1896. Gauthier-Villars).

(5) *Commission des méthodes d'essai des matériaux de construction* (1re session, t. II et III, 1895).

et des résultats si intéressants par leur généralité et leur régularité géométrique que W. Lüders (1) et M. le colonel Hartmann (2) ont fait connaître.

Le problème fondamental de la théorie de l'élasticité est d'exprimer les efforts dans le milieu déformé en fonction des éléments caractéristiques de la déformation en chaque point, afin d'en déduire les équations de l'équilibre ou du mouvement du milieu sous l'action de forces extérieures données. Si l'on appelle, comme nous l'avons fait au Chapitre XXXII, x, y, z les coordonnées d'un élément avant la déformation et x_1, y_1, z_1 les coordonnées du même élément après la déformation, on peut écrire les équations de l'équilibre ou du mouvement en prenant comme variables indépendantes le temps t et les variables x_1, y_1, z_1 définissant les positions des éléments à l'instant t, ou le temps t et les variables x, y, z définissant les positions initiales des éléments. Le système des variables t, x_1, y_1, z_1 est analogue au système des variables d'Euler en Hydrodynamique, et celui des variables t, x, y, z analogue au système des variables de Lagrange. Le premier système a été employé par les fondateurs de la théorie; M. Boussinesq (3) et, après lui, M. Brillouin (4) ont montré, par des méthodes différentes, comment on peut écrire les équations dans le système des variables t, x, y, z : les équations ainsi obtenues sont exposées d'une manière simple et rapprochées les unes des autres à la page 41 du Mémoire déjà cité de MM. Cosserat.

Comme nous l'avons déjà dit, nous nous bornerons ici au cas des déformations infiniment petites : nous suivrons, dans ses

---

(1) *Ueber die Æusserung der Elasticität an stahlartigen Eisenstäben....* (*Dinglers Polytechnisches Journal,* Bd CLV, S. 18. Stuttgart, 1860.)

(2) *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (*Revue d'Artillerie,* t. XLV et XLVI, 1894-95). *Voir* également le compte rendu des séances du *Congrès international des méthodes d'essai des matériaux de construction,* tenu à Paris du 9 au 16 juillet 1900, à l'occasion de l'Exposition universelle (Paris, Dunod); et l'Ouvrage de M. Ch. Duguet, *Déformation des corps solides :* 1re Partie, *Statique spéciale,* 1882; 2e Partie, *Statique générale,* 1885. (Paris, Gauthier-Villars.)

(3) *Théorie des ondes liquides périodiques,* p. 516 (*Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,* t. XX).

(4) *Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. CXII, p. 1500-1502; 1891).

grands traits, le mode d'exposition élémentaire adopté par M. Sarrau dans l'Ouvrage intitulé : *Notions sur la théorie de l'élasticité* (Gauthier-Villars, 1889).

On trouvera de nombreuses indications historiques dans le Mémoire déjà cité de MM. Cosserat et dans l'Ouvrage de Todhunter et Pearson, *A History of the Elasticity and of the strength of materials, from Galilei to the present time.*

I. — ÉQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DES MILIEUX ÉLASTIQUES ISOTROPES ET HOMOGÈNES, POUR DES DÉFORMATIONS INFINIMENT PETITES.

797. Étude des efforts intérieurs. — Nous avons, dans le Chapitre XXX, étudié la distribution des efforts intérieurs aux divers points d'un milieu continu. Nous avons vu que, pour connaître à chaque instant en chaque point du milieu l'effort $T\,d\sigma$ qui s'exerce sur la face négative d'un élément $d\sigma$ dont la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ, il suffit de connaître, à chaque instant t, six fonctions $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ des coordonnées du point; on a alors, pour les projections de l'effort T rapporté à l'unité de surface,

$$(1)\qquad \begin{cases} T_x = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ T_y = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ T_z = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma. \end{cases}$$

Nous appellerons *état naturel* du système continu la configuration du système dans laquelle tous les efforts intérieurs sont *nuls*, c'est-à-dire dans laquelle $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ sont nuls en tous les points.

Imaginons qu'on déforme le système, *à partir de cet état naturel,* en lui appliquant des forces extérieures qui peuvent être des forces analogues à des pressions appliquées aux éléments de la surface extérieure du milieu, et des forces analogues à des poids appliquées aux éléments de volume. Alors chaque point du milieu subit un déplacement $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ que nous regarderons comme infiniment petit; de telle façon que l'élément P, qui, à l'état naturel, avait pour coordonnées x, y, z, prenne une nouvelle position P_1

de coordonnées

$$(P_1) \qquad x_1 = x + u, \qquad y_1 = y + v, \qquad z_1 = z + w.$$

Dans cette nouvelle configuration du système, les efforts intérieurs ne sont plus nuls et, en chaque point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ du milieu déformé, les six quantités N et T définies au Chapitre XXX prennent des valeurs $N_1^1, N_2^1, N_3^1, T_1^1, T_2^1, T_3^1$ qui sont des fonctions de x_1, y_1, z_1 à l'instant considéré, fonctions qui dépendent de l'ensemble des déformations subies par le milieu.

Pour rappeler que ces quantités se rapportent au point x_1, y_1, z_1, nous les affectons de l'indice supérieur 1.

Le premier problème à résoudre est de trouver en chaque point x_1, y_1, z_1 du milieu déformé les valeurs de $N_1^1, N_2^1, N_3^1, T_1^1, T_2^1, T_3^1$ connaissant la déformation du système.

Une fois ces valeurs trouvées, on aura pour les équations de l'équilibre ou du mouvement du système les équations suivantes identiques aux équations (14) du n° 616 :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_1^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_3^1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial T_2^1}{\partial z_1} = \rho_1 (X_1 - J_x^1), \\ \dfrac{\partial T_3^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial N_2^1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial T_1^1}{\partial z_1} = \rho_1 (Y_1 - J_y^1), \\ \dfrac{\partial T_2^1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial T_1^1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial N_3^1}{\partial z_1} = \rho_1 (Z_1 - J_z^1). \end{cases}$$

où ρ_1 est la densité du système au point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ après la déformation, X_1, Y_1, Z_1 la force intérieure rapportée à l'unité de masse agissant en ce point, et J^1 l'accélération en ce point, accélération qui est nulle dans le cas de l'équilibre. Les composantes de l'accélération s'expriment d'une manière simple, comme il suit : on a, à l'instant t,

$$(3) \qquad x_1 = x + u, \qquad y_1 = y + v, \qquad z_1 = z + w,$$

u, v, w étant des fonctions des coordonnées initiales x, y, z de l'élément et du temps t : pour un élément déterminé, x, y, z coordonnées de l'élément au temps t_0 sont des constantes, et x_1, y_1, z_1 sont des fonctions du temps définies par les équations (3). Les

projections de l'accélération J^1 de l'élément sont donc

$$(4)\qquad \begin{cases} J_x^1 = \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ J_y^1 = \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ J_z^1 = \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{cases}$$

où nous employons pour les dérivées de u, v, w le ∂ de ronde afin d'indiquer que les dérivées de u, v, w par rapport à t sont prises en regardant x, y, z comme constants.

Servons-nous maintenant de ce fait que la déformation considérée est *infiniment petite :* il en résulte que x_1, y_1, z_1 diffèrent infiniment peu de x, y, z; les valeurs des quantités $N_1^1, N_2^1, N_3^1, T_1^1, T_2^1, T_3^1$ au point $P_1(x_1, y_1, z_1)$ diffèrent infiniment peu de leurs valeurs $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ au point $P(x, y, z)$, et les dérivées partielles $\frac{\partial N_1^1}{\partial x_1}, \frac{\partial T_3^1}{\partial y_1}, \dots$ diffèrent infiniment peu de $\frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial T_3}{\partial y}, \dots$. De même, la densité ρ_1 et la force X_1, Y_1, Z_1 au point x_1, y_1, z_1 diffèrent infiniment peu de la densité ρ et de la force X, Y, Z au point x, y, z. Les équations (2) peuvent donc être remplacées par les suivantes qui s'en déduisent en écrivant $N_1, \dots, T_3, \dots$ au lieu de $N_1^1, \dots, T_3^1, \dots$, ρ au lieu de ρ_1, X, Y, Z au lieu de X_1, Y_1, Z_1 et en mettant pour J_x^1, J_y^1, J_z^1 leurs expressions (4)

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial N_1}{\partial x} + \dfrac{\partial T_3}{\partial y} + \dfrac{\partial T_2}{\partial z} = \rho\left(X - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right), \\ \dfrac{\partial T_3}{\partial x} + \dfrac{\partial N_2}{\partial y} + \dfrac{\partial T_1}{\partial z} = \rho\left(Y - \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right), \\ \dfrac{\partial T_2}{\partial x} + \dfrac{\partial T_1}{\partial y} + \dfrac{\partial N_3}{\partial z} = \rho\left(Z - \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right). \end{cases}$$

Remarque sur la définition de l'état naturel. — Nous venons de donner une définition purement théorique de l'état naturel. On peut aussi, et c'est ce que fait par exemple M. Poincaré dans ses *Leçons sur l'élasticité* (Carré et Naud, 1892), considérer comme état naturel un état d'équilibre contraint quelconque obtenu par l'action de certaines forces et supposer que l'on déforme le milieu, à partir de cet état, en faisant agir de nouvelles

forces. Nous reviendrons sur ce point, dans un cas particulier, à propos de la superposition des déformations infiniment petites (n° 803).

798. **Expressions des N et des T en fonction des éléments de la déformation.** — Nous allons maintenant exprimer les N et les T en chaque point $P(x, y, z)$ en fonction des éléments de la déformation. Cauchy et Poisson ont traité ce problème en adoptant l'hypothèse des forces centrales, c'est-à-dire en admettant que deux points matériels quelconques du milieu s'attirent ou se repoussent suivant une certaine fonction de leur distance. Cette même hypothèse a été adoptée par Lamé, qui a admis en outre que l'action mutuelle de deux points quelconques est nulle dans l'état naturel, et que ces points s'attirent ou se repoussent suivant que leur distance est supérieure ou inférieure à celle qui correspond à l'état naturel.

Cette hypothèse de Lamé est beaucoup plus particulière que celle que nous faisons ici en admettant que les efforts intérieurs sont nuls dans l'état naturel, car nous admettons seulement que les forces intérieures agissant sur un point matériel du milieu ont une *résultante nulle* dans l'état naturel et non qu'elles sont nulles *séparément,* comme le fait Lamé.

Nous faisons en outre, sur les forces intérieures, une deuxième hypothèse que nous avons déjà discutée (n° 609) : c'est que les *actions mutuelles des éléments matériels du milieu deviennent nulles dès que les distances mutuelles de ces éléments sont supérieures à une longueur très petite* appelée *rayon d'activité moléculaire.*

Par suite de cette dernière hypothèse, les valeurs des quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 en un point P du milieu, à un instant t, dépendent uniquement de la déformation d'un élément de volume très petit entourant P et ne dépendent pas de la déformation du reste du milieu.

Appelons, comme plus haut (n° 683), $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ le déplacement *infiniment petit* subi par un point $P(x, y, z)$ à partir de l'état naturel, déplacement qui amène ce point P dans une position $P_1(x_1, y_1, z_1)$ telle que

$$x_1 = x + \mathbf{u}, \qquad y_1 = y + \mathbf{v}, \qquad z_1 = z + \mathbf{w}. \tag{6}$$

Nous avons vu, dans la théorie des déformations infiniment petites (Chap. XXXII, § IV), que la déformation infiniment petite est caractérisée en chaque point $P(x, y, z)$ par les valeurs que prennent en ce point les six fonctions caractéristiques

$$(7)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}; \end{cases}$$

rappelons que ε_1, ε_2, ε_3 sont les coefficients des dilatations linéaires des éléments issus de P et parallèles aux axes de coordonnées, et que la somme de ces trois coefficients est égale au coefficient de dilatation cubique θ au point P,

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3;$$

comme la somme $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ a ainsi une signification physique en chaque point P, on voit, comme nous l'avons déjà dit, qu'elle est *indépendante de l'orientation des axes*.

Les valeurs de N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 au même point P étant des fonctions de la déformation d'un élément infiniment petit entourant P, c'est-à-dire de la déformation au point P, sont des fonctions des six quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 qui caractérisent cette déformation :

$$(8)\quad \begin{cases} N_1 = f_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \ \ldots, \\ T_1 = \varphi_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \ \ldots; \end{cases}$$

les quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, s'annulant par hypothèse dans l'état naturel, doivent s'annuler quand la déformation est nulle, c'est-à-dire quand ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont nuls à la fois.

Comme ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 sont infiniment petits, développons les six fonctions f_1, ..., φ_1, ... des formules (8) par la formule de Mac-Laurin : nous obtenons des séries procédant suivant les puissances positives croissantes de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 ; ces séries ne contiennent pas de termes constants, car elles s'annulent avec les variables. Négligeons maintenant les termes contenant les carrés et les produits des ε et des γ ; nous avons finalement pour les N et les T des expressions linéaires et homogènes en ε_1, ε_2, ε_3,

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$(9)\qquad \begin{cases} N_1 = A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_2 + A_3\varepsilon_3 + B_1\gamma_1 + B_2\gamma_2 + B_3\gamma_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ T_1 = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3. \end{cases}$$

Dans ces formules, les coefficients $A_1, A_2, \dots, a_1, a_2, \dots$ des ε et des γ sont au nombre de $6 \times 6 = 36$. Ces trente-six coefficients dépendent de la constitution du milieu autour du point $P(x, y, z)$; pour un milieu dont la constitution varierait d'un point à l'autre, ces coefficients seraient des fonctions de x, y, z.

Nous supposerons dans tout ce qui suit que le milieu est *homogène,* c'est-à-dire que sa constitution, à l'état naturel, est la même en chaque point. La densité ρ est alors constante; en outre, les trente-six coefficients sont des *constantes*. Le nombre de ces coefficients se réduit quand, à l'état naturel, la constitution du système est, autour de chaque point, symétrique par rapport à certains plans ou à certains axes.

Cette réduction est la plus grande possible quand le système homogène est en outre *isotrope :* c'est le cas que nous allons examiner en détail.

799. Cas d'un système homogène et isotrope. — Un milieu homogène est dit *isotrope* quand, à l'état naturel, la constitution du milieu autour de chaque point P est la même *dans toutes les directions*. Dans ce cas, autour de chaque point P, la constitution du milieu est symétrique par rapport à tout plan passant par P : le nombre des coefficients constants qui figurent dans les relations (9) entre les N, T et les ε, γ se réduit alors à *deux,* comme nous allons le montrer.

Nous avons vu (n° 617) que, autour d'un point P d'un milieu, la distribution des efforts peut être définie par une certaine *quadrique directrice* (Q) ayant ce point pour centre; si l'on prend en P trois axes rectangulaires Px', Py', Pz' parallèles aux axes de coordonnées, l'équation de cette quadrique est [n° 617, éq. (17)]

$$(Q)\qquad \begin{cases} \varphi(x', y', z') = N_1x'^2 + N_2y'^2 + N_3z'^2 \\ \qquad + 2T_1y'z' + 2T_2z'x' + 2T_3x'y' = 1. \end{cases}$$

D'autre part, nous avons vu (n° 668) que les déformations du milieu, autour du même point, peuvent être définies à l'aide d'une

autre quadrique (E), appelée *ellipsoïde des dilatations,* ayant pour équation, par rapport aux mêmes axes [n° 668, éq. (17)],

$$(E)\qquad \begin{cases} \psi(x',y',z') = (1+2\varepsilon_1)x'^2+(1+2\varepsilon_2)y'^2 \\ \qquad +(1+2\varepsilon_3)z'^2+2\gamma_1 y'z'+2\gamma_2 z'x'+2\gamma_3 x'y' = 1. \end{cases}$$

D'après les expressions (9) des N, T en fonction des ε, γ, les coefficients N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 de la première quadrique (Q) sont des fonctions linéaires et homogènes à coefficients constants des coefficients ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 de la deuxième (E). Comme le milieu est *isotrope*, la constitution du système autour de P est la *même* par rapport à n'importe quel système d'axes rectangulaires issus de P. La liaison entre ces deux quadriques est donc *indépendante du choix des axes.* Il en résulte, au point de vue analytique, que, si l'on prenait un autre système d'axes de directions Px'', Py'', Pz'', les équations des deux quadriques prendraient les formes

$$\begin{gathered} N'_1 x''^2+N'_2 y''^2+N'_3 z''^2+2T'_1 y''z''+2T'_2 z''x''+2T'_3 x''y''=1, \\ (1+2\varepsilon'_1)x''^2+(1+2\varepsilon'_2)y''^2+(1+2\varepsilon'_3)z''^2 \\ +2\gamma'_1 y''z''+2\gamma'_2 z''x''+2\gamma'_3 x''y''=1, \end{gathered}$$

et les relations entre les coefficients des deux quadriques resteraient *les mêmes,* c'est-à-dire que les N', T' seraient exprimés en fonctions linéaires et homogènes des ε', γ' par les mêmes relations, avec les mêmes coefficients, que les N, T en fonction des ε, γ. C'est ce fait que nous allons exprimer. Mais, pour éviter des calculs, nous procéderons géométriquement, en nous servant des deux quadriques (Q) et (E) (¹).

Puisque les N, T sont des fonctions des ε et des γ, la quadrique (Q) est déterminée dès que l'on connaît la quadrique (E). Nous allons caractériser géométriquement la liaison entre ces deux quadriques (Q) et (E), en montrant que cette liaison est la suivante : *les deux quadriques ont les mêmes plans principaux et les mêmes plans de sections circulaires.*

Tout d'abord, les deux quadriques *ont les mêmes plans principaux.* En effet, soient PX, PY, PZ les directions principales de la quadrique (E); cette quadrique étant symétrique par rapport aux plans YPZ, ZPX, XPY, les déformations autour de P sont

(¹) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques,* mai 1902.

symétriques par rapport à ces mêmes plans; donc les efforts sont aussi distribués symétriquement par rapport à ces plans, et la quadrique directrice des efforts admet ces mêmes plans comme plans principaux.

Imaginons qu'on prenne les axes PX, PY, PZ comme axes de coordonnées; l'équation de la quadrique Q devient

$$\Phi(X, Y, Z) = n_1 X^2 + n_2 Y^2 + n_3 Z^2 = 1 \tag{10}$$

et celle de la quadrique (E)

$$\Psi(X, Y, Z) = (1 + 2e_1)X^2 + (1 + 2e_2)Y^2 + (1 + 2e_3)Z^2 = 1. \tag{11}$$

Les coefficients n_1, n_2, n_3 de la quadrique (Q) sont, dans ce nouveau système d'axes, donnés en fonction des coefficients e_1, e_2, e_3 de la quadrique (E) par les formules (9) qui sont indépendantes du choix des axes : comme, actuellement, les valeurs de γ_1, γ_2, γ_3 sont nulles, on aura, en particulier,

$$n_1 = A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3.$$

Mais, si l'on permute les axes PY et PZ, le coefficient n_1 de l'équation (10) ne change pas et les coefficients e_2 et e_3 de l'équation (11) se permutent. Donc n_1 ne doit pas changer quand on permute e_2 et e_3, et l'on a

$$A_2 = A_3.$$

Nous aurons alors

$$n_1 = A_1 e_1 + A_2(e_2 + e_3),$$

ou encore

$$n_1 = (A_1 - A_2)e_1 + A_2(e_1 + e_2 + e_3). \tag{12}$$

La somme $e_1 + e_2 + e_3$ est le coefficient de dilatation cubique θ au point P :

$$\theta = e_1 + e_2 + e_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Nous écrirons alors l'expression (12) de n_1 :

$$n_1 = -\lambda\theta - 2\mu e_1, \tag{13}$$

λ et μ désignant de nouvelles constantes. En permutant circulairement les axes PX, PY, PZ, c'est-à-dire n_1, n_2, n_3 et e_1, e_2, e_3, on a

$$\begin{cases} n_2 = -\lambda\theta - 2\mu e_2, \\ n_3 = -\lambda\theta - 2\mu e_3. \end{cases} \tag{14}$$

Dès lors, le premier membre $\Phi(X, Y, Z)$ de l'équation (10) de la quadrique (Q) est lié au premier membre de l'équation (11) de (E) par l'identité

$$(15) \qquad \Phi(X, Y, Z) \equiv -\mu\,\Psi(X, Y, Z) - (\lambda\theta - \mu)(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

qui montre comment l'équation de l'une des quadriques se déduit de l'équation de l'autre.

Si l'on revient maintenant aux axes primitifs Px', Py', Pz', la fonction $\Phi(X, Y, Z)$ se transforme en $\varphi(x', y', z')$, la fonction $\Psi(X, Y, Z)$ en $\psi(x', y', z')$, et enfin $X^2 + Y^2 + Z^2$ se transforme en

$$x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

L'identité (15) donne alors la suivante :

$$(16) \qquad \varphi(x', y', z') \equiv -\mu\,\psi(x', y', z') - (\lambda\theta - \mu)(x'^2 + y'^2 + z'^2),$$

ou, en remplaçant φ et ψ par leurs expressions développées,

$$\begin{aligned} &N_1 x'^2 + N_2 y'^2 + N_3 z'^2 + 2T_1 y' z' + 2T_2 z' x' + 2T_3 x' y' \\ &\quad \equiv -\mu[(1 + 2\varepsilon_1)x'^2 + (1 + 2\varepsilon_2)y'^2 \\ &\qquad\qquad + (1 + 2\varepsilon_3)z'^2 + 2\gamma_1 y' z' + 2\gamma_2 z' x' + 2\gamma_3 x' y'] \\ &\qquad - (\lambda\theta - \mu)(x'^2 + y'^2 + z'^2). \end{aligned}$$

En écrivant que le premier membre est identique au second, on a les relations

$$(17). \qquad \begin{cases} N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_1, & T_1 = -\mu\gamma_1, \\ N_2 = -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_2, & T_2 = -\mu\gamma_2, \\ N_3 = -\lambda\theta - 2\mu\varepsilon_3, & T_3 = -\mu\gamma_3, \end{cases}$$

où

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Ces relations donnent, pour un milieu homogène et isotrope, les expressions des N et T en fonction des ε, γ avec deux constantes λ et μ. D'après les valeurs des ε et γ en fonction de u, v, w dans le cas d'une déformation infiniment petite [éq. (7)], les expressions ci-dessus s'écrivent

$$(18) \qquad \begin{cases} N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\dfrac{\partial u}{\partial x}, & T_1 = -\mu\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ N_2 = -\lambda\theta - 2\mu\dfrac{\partial v}{\partial y}, & T_2 = -\mu\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \\ N_3 = -\lambda\theta - 2\mu\dfrac{\partial w}{\partial z}, & T_3 = -\mu\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right), \end{cases}$$

avec

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{19}$$

Résumé des liaisons géométriques entre les deux quadriques. — L'identité (16) montre que les deux quadriques (Q) et (E) *ont les mêmes plans de sections circulaires.* Cette propriété entraîne la première, à savoir que les deux quadriques ont les mêmes plans principaux. On achèvera de caractériser la relation qui lie les longueurs des axes des deux quadriques, en remarquant que l'on a

$$N_1 + N_2 + N_3 = -(3\lambda + 2\mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

800. Constantes caractéristiques d'un milieu élastique homogène et isotrope. — Les deux constantes λ et μ caractérisent le milieu élastique isotrope considéré. Cauchy (¹), en adoptant l'hypothèse des forces centrales, a montré que si la déformation a lieu à partir de l'état naturel, on a, pour les solides,

$$\lambda = \mu.$$

Mais cette conclusion, fondée sur une hypothèse trop étroite, doit être rejetée. On admet, par exemple, dans la théorie de la lumière, que l'éther, en dehors des corps cristallisés, est un milieu élastique isotrope pour lequel $\lambda + 2\mu = 0$. D'autre part, pour un fluide parfait élastique, μ est nul, car dans un fluide parfait tous les efforts tangentiels intérieurs sont nuls : les quantités T_1, T_2, T_3 doivent alors toujours être nulles, ce qui exige $\mu = 0$.

C'est surtout par le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ qu'est caractérisé un milieu élastique : Kirchhoff désigne ce rapport par $2k$; MM. Cosserat ont introduit le nombre

$$\xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1.$$

M. Duhem (*Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. II, p. 213-214, 231, 240) discute le problème et met en évidence l'hypothèse suivante, souvent adoptée :

$$\mu > 0, \qquad 3\lambda + 2\mu > 0,$$

(¹) Voir *Anciens exercices*, 1828; *voir* également *Théorie de l'élasticité des corps solides*, par CLEBSCH, traduction Saint-Venant, p. 79.

c'est-à-dire

$$\mu > 0, \qquad \xi - \frac{1}{3} > 0.$$

La même question est aussi envisagée par M. Cesàro (*Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, p. 34).

En se plaçant à un point de vue analytique, on peut enfin se demander pour quels systèmes de valeurs de λ et μ les problèmes énoncés aux nos 801 et 802 ont une *solution unique*.

801. Équations de l'équilibre et du mouvement intérieurs. — En remplaçant, dans les équations (5) du n° 797, les N et les T par les valeurs (18) que nous venons de trouver, on obtient, pour déterminer les déplacements $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ en fonction de x, y, z, t, les équations différentielles

$$(20)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\,\Delta\mathbf{u} + \rho\mathrm{X} = \rho\dfrac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta\mathbf{v} + \rho\mathrm{Y} = \rho\dfrac{\partial^2\mathbf{v}}{\partial t^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta\mathbf{w} + \rho\mathrm{Z} = \rho\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}, \end{cases}$$

où θ a la valeur (19) du numéro précédent et où le symbole Δ, appliqué à une fonction F, désigne, comme précédemment, l'opération

$$\Delta\mathrm{F} = \frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial z^2}.$$

Dans chaque problème particulier, il faudra trouver des fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vérifiant les équations différentielles (20) qu'on appelle les *équations indéfinies*, et satisfaisant, en outre, aux conditions initiales et aux conditions aux limites.

Conditions initiales. — Les conditions initiales consistent en ce que, à l'instant $t = 0$, les positions et les vitesses des points du milieu sont connues : les fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ et leurs dérivées $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ doivent donc prendre, pour $t = 0$, des déterminations connues en x, y, z.

Conditions aux limites. — Les conditions aux limites consistent en ce que, pendant toute la durée du mouvement, les éléments de la surface extérieure du milieu sont assujettis à certaines conditions : il peut, par exemple, arriver que la distribution des efforts

soit connue sur la surface, ou encore que les déplacements des points de cette surface soient imposés à l'avance, ou enfin que, pour certaines parties de la surface, on connaisse les efforts, pour les autres les déplacements.

Dans leurs Notes des *Comptes rendus* du 5 et du 12 août 1901, MM. Cosserat ont considéré un autre genre de conditions aux limites, dans lequel *une combinaison linéaire du déplacement et de l'effort serait donnée à la frontière;* ce genre de conditions aux limites apparaît, par exemple, dans ce que les ingénieurs appellent un *demi-encastrement*.

Nous nous bornerons presque exclusivement à l'*équilibre élastique*.

II. — ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE.

802. Équations de l'équilibre élastique. — Imaginons un milieu élastique dans l'état naturel, puis déformons le système en faisant agir des forces extérieures : 1° sur les éléments de sa surface extérieure; 2° sur les divers éléments de volume. Supposons que, dans ces conditions, le système prenne un état d'équilibre contraint, la déformation étant infiniment petite. En appelant $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ les déplacements subis par un point quelconque $P(x, y, z)$, on voit que ces quantités ne dépendent pas du temps, puisque, après la déformation, les particules restent immobiles. Les dérivées $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \dots$ sont donc nulles.

Les équations générales (20) donnent alors les *équations indéfinies de l'équilibre élastique* sous la forme

$$(21)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu\,\Delta \mathbf{u} + \rho \mathrm{X} = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu\,\Delta \mathbf{v} + \rho \mathrm{Y} = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial z} + \mu\,\Delta \mathbf{w} + \rho \mathrm{Z} = 0, \\ \theta = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial z}. \end{cases}$$

Pour obtenir la déformation subie par le corps, il faudra trouver des fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ de x, y, z vérifiant ces équations et satisfaisant aux conditions aux limites.

Conditions aux limites. — Les fonctions u, v, w doivent, sur la surface extérieure S du corps, vérifier des conditions qui peuvent être de formes diverses :

1° Dans certains problèmes, les déplacements des points de la surface sont donnés à l'avance; alors u, v, w doivent prendre, sur la surface S du milieu, des valeurs données à l'avance.

2° Dans d'autres problèmes, on donne la force extérieure élémentaire $F_e\,d\sigma$ que l'on fait agir sur la face extérieure de chaque élément $d\sigma$ de la surface S limitant le corps. Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à l'élément $d\sigma$ vers l'extérieur de la surface S, et $X_e\,d\sigma$, $Y_e\,d\sigma$, $Z_e\,d\sigma$ les projections de la force extérieure $F_e\,d\sigma$ appliquée à la face positive de $d\sigma$. L'élément $d\sigma$ est attaché au milieu par sa face intérieure ou face négative : sur cette face s'exerce un effort provenant de l'action du milieu sur cet élément et ayant pour projections :

$$T_x\,d\sigma, \quad T_y\,d\sigma, \quad T_z\,d\sigma,$$

T_x, T_y, T_z étant donnés par les relations (1)

$$T_x = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme l'élément considéré $d\sigma$ est en équilibre, les forces appliquées sur ses deux faces se font équilibre et l'on a

$$X_e\,d\sigma + T_x\,d\sigma = 0, \qquad \ldots.$$

D'où les trois conditions

$$(22)\qquad \begin{cases} X_e + N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma = 0, \\ Y_e + T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma = 0, \\ Z_e + T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma = 0, \end{cases}$$

qui doivent être remplies en tous les points de la surface. Si, dans ces conditions, on remplace les N et les T par leurs expressions (18) en fonction des dérivées partielles des u, v, w, on obtient trois relations différentielles que doivent vérifier les u, v, w *sur la surface.*

Quand les conditions aux limites sont définies de cette façon, les forces extérieures données $X\rho\,d\tau$, $Y\rho\,d\tau$, $Z\rho\,d\tau$ et $X_e\,d\sigma$, $Y_e\,d\sigma$, $Z_e\,d\sigma$, appliquées aux éléments de volume $d\tau$ et aux élé-

ments superficiels $d\sigma$, doivent évidemment vérifier les six conditions d'équilibre d'un système de forces appliquées à un corps solide, puisque, sous l'action de ces forces extérieures, le système est en équilibre après sa déformation.

3° On peut combiner entre elles les deux espèces de conditions aux limites qui précèdent. On peut, sur certaines parties de la surface S du milieu, se donner les déplacements et, sur les autres, les forces extérieures $X_e\,d\sigma$, $Y_e\,d\sigma$, $Z_e\,d\sigma$.

4° Enfin, on peut, comme l'ont fait MM. Cosserat (n° 801), se donner à la frontière une combinaison linéaire du déplacement et de l'effort.

Le milieu étant donné, ainsi que ces conditions aux limites, *il existe une seule déformation possible* pour des valeurs convenables de λ et μ. C'est là un théorème fondamental que l'on a quelquefois regardé comme évident au point de vue physique, mais qu'il importe de démontrer analytiquement. Cette démonstration a été donnée par Betti et Kirchhoff pour certaines conditions aux limites et complétée par MM. Cosserat (*voir* n° 809).

Nous admettrons ici ce théorème. Il en résulte que si, par un procédé quelconque, on a découvert des fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ de x, y, z vérifiant dans le milieu les équations indéfinies (21) et sur la surface les conditions aux limites, la déformation correspondante est précisément celle que subit réellement le milieu. Cela ne veut pas dire qu'il n'y a jamais qu'un système de fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vérifiant les conditions énoncées, mais que, si l'on a un système particulier de fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vérifiant ces conditions, le système le plus général de fonctions qui les vérifie représente, pour chaque point, un déplacement qui s'obtient en composant le déplacement particulier $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ de ce point avec le déplacement qu'il subirait dans un déplacement d'ensemble de tout le système regardé comme un solide invariable de forme (translation et rotation infiniment petites). Tous les systèmes de déplacements ainsi obtenus doivent être regardés comme *équivalents*. Dans le cas particulier où *les déplacements eux-mêmes sont donnés à la frontière,* il n'existe qu'un système de fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ pouvant vérifier les conditions données.

On pourrait dire aussi qu'aux conditions imposées au milieu correspond, dans le milieu, un seul système de déterminations

des u, v, w prennent, dans l'hypothèse actuelle, la forme suivante :

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad T_1 = -2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z},$$

.....

Conditions aux limites. — Supposons que l'on donne la force extérieure $F_e\,d\sigma$ appliquée sur les éléments de la surface du milieu : les conditions aux limites (22) deviennent, d'après les valeurs ci-dessus des N et des T,

$$X_e = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\alpha + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\beta + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\gamma, \tag{25}$$

.....

ou, en remarquant que $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u$ et que

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z}$$

désigne la dérivée $\frac{du}{dn}$ de u prise, suivant la normale extérieure à la surface S (n° 536),

$$\begin{cases} X_e = \lambda\theta\alpha + 2\mu\dfrac{du}{dn}, \\ Y_e = \lambda\theta\beta + 2\mu\dfrac{dv}{dn}, \\ Z_e = \lambda\theta\gamma + 2\mu\dfrac{dw}{dn}. \end{cases} \tag{26}$$

Remarque. — On peut ramener au cas que nous venons de traiter le cas, en apparence plus général, où les composantes de la rotation moléculaire (n° 682) seraient *constantes* dans toute l'étendue du milieu. En effet, il suffirait d'imprimer d'abord au système une rotation d'ensemble égale à cette rotation constante pour que les nouveaux déplacements amenant le système de sa nouvelle position à la position finale d'équilibre contraint aient lieu sans rotation moléculaire.

805. **Équilibre élastique en l'absence de forces extérieures appliquées aux éléments de volume.** — Si les forces $X\rho\,d\tau$, $Y\rho\,d\tau$, $Z\rho\,d\tau$ sont nulles, les équations indéfinies (21) prennent la

forme

$$(27)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\,\Delta u = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\,\Delta v = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\,\Delta w = 0. \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont les mêmes que plus haut.

Dans le cas où il existe un système de déplacements possible dérivant d'une fonction φ, il faut et il suffit, pour que les équations d'équilibre indéfinies soient satisfaites, que *la dilatation cubique soit constante dans le milieu déformé.* En effet, dans cette hypothèse, les équations (23) du numéro précédent, où

$$X = Y = Z = 0,$$

deviennent

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

en supposant $\lambda + 2\mu$ différent de zéro. Elles montrent qne θ est *constant.* Comme θ est égal à $\Delta\varphi$, on voit que la fonction φ vérifie alors une équation de la forme

$$\Delta\varphi = k,$$

k étant la valeur constante de θ. Les conditions aux limites prennent la forme (26) indiquée au numéro précédent.

806. **Exemple I : Compression normale et uniforme d'un milieu isotrope** (¹). — Soit un milieu isotrope limité par une surface S : faisons agir, sur chaque élément superficiel $d\sigma$ de la surface, une pression normale $P\,d\sigma$ proportionnelle à $d\sigma$, P étant le même pour tous les points de la surface. Ce fait se présenterait, par exemple, si le milieu était un corps solide plongé dans un gaz à une pression donnée.

Dans cet exemple, on donne les forces extérieures sur la surface. Si l'on appelle α, β, γ les cosinus de la normale extérieure, on a ici, comme la pression $P\,d\sigma$ est normale, mais dirigée vers

(¹) LAMÉ, *Leçons sur la theorie mathématique de l'élasticité des corps solides.*

des $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ prennent, dans l'hypothèse actuelle, la forme suivante :

$$N_1 = -\lambda\theta - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad T_1 = -2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z},$$

.....

Conditions aux limites. — Supposons que l'on donne la force extérieure $F_e\,d\sigma$ appliquée sur les éléments de la surface du milieu : les conditions aux limites (22) deviennent, d'après les valeurs ci-dessus des N et des T,

$$(25)\qquad X_e = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)\alpha + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\beta + 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\gamma,$$

.....

ou, en remarquant que $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathbf{u}$ et que

$$\alpha\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}$$

désigne la dérivée $\frac{d\mathbf{u}}{dn}$ de $\mathbf{u}$ prise, suivant la normale extérieure à la surface S (n° 536),

$$(26)\qquad \begin{cases} X_e = \lambda\theta\alpha + 2\mu\dfrac{d\mathbf{u}}{dn}, \\ Y_e = \lambda\theta\beta + 2\mu\dfrac{d\mathbf{v}}{dn}, \\ Z_e = \lambda\theta\gamma + 2\mu\dfrac{d\mathbf{w}}{dn}. \end{cases}$$

Remarque. — On peut ramener au cas que nous venons de traiter le cas, en apparence plus général, où les composantes de la rotation moléculaire (n° 682) seraient *constantes* dans toute l'étendue du milieu. En effet, il suffirait d'imprimer d'abord au système une rotation d'ensemble égale à cette rotation constante pour que les nouveaux déplacements amenant le système de sa nouvelle position à la position finale d'équilibre contraint aient lieu sans rotation moléculaire.

805. **Équilibre élastique en l'absence de forces extérieures appliquées aux éléments de volume.** — Si les forces $X\rho\,d\tau$, $Y\rho\,d\tau$, $Z\rho\,d\tau$ sont nulles, les équations indéfinies (21) prennent la

forme

$$(27)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w = 0. \end{cases}$$

Les conditions aux limites sont les mêmes que plus haut.

Dans le cas où il existe un système de déplacements possible dérivant d'une fonction φ, il faut et il suffit, pour que les équations d'équilibre indéfinies soient satisfaites, que *la dilatation cubique soit constante dans le milieu déformé.* En effet, dans cette hypothèse, les équations (23) du numéro précédent, où

$$X = Y = Z = 0,$$

deviennent

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

en supposant $\lambda + 2\mu$ différent de zéro. Elles montrent qne θ est *constant*. Comme θ est égal à $\Delta\varphi$, on voit que la fonction φ vérifie alors une équation de la forme

$$\Delta\varphi = k,$$

k étant la valeur constante de θ. Les conditions aux limites prennent la forme (26) indiquée au numéro précédent.

806. Exemple I : Compression normale et uniforme d'un milieu isotrope (¹). — Soit un milieu isotrope limité par une surface S : faisons agir, sur chaque élément superficiel $d\sigma$ de la surface, une pression normale $P\,d\sigma$ proportionnelle à $d\sigma$, P étant le même pour tous les points de la surface. Ce fait se présenterait, par exemple, si le milieu était un corps solide plongé dans un gaz à une pression donnée.

Dans cet exemple, on donne les forces extérieures sur la surface. Si l'on appelle α, β, γ les cosinus de la normale extérieure, on a ici, comme la pression $P\,d\sigma$ est normale, mais dirigée vers

(¹) LAMÉ, *Leçons sur la theorie mathématique de l'élasticité des corps solides.*

l'intérieur,

$$X_e\,d\sigma = -P\alpha\,d\sigma, \qquad Y_e\,d\sigma = -P\beta\,d\sigma, \qquad Z_e\,d\sigma = -P\gamma\,d\sigma,$$

et les conditions aux limites (22) deviennent

$$(28)\qquad \begin{cases} P\alpha = N_1\alpha + T_3\beta + T_2\gamma, \\ P\beta = T_3\alpha + N_2\beta + T_1\gamma, \\ P\gamma = T_2\alpha + T_1\beta + N_3\gamma, \end{cases}$$

sur la surface S.

On vérifie immédiatement qu'on peut satisfaire aux équations indéfinies (27) et aux conditions (28) aux limites en prenant

$$(29)\qquad u = cx, \qquad v = cy, \qquad w = cz$$

(c constant), valeurs qui dérivent de la fonction

$$\varphi = \frac{1}{2}c(x^2+y^2+z^2).$$

D'abord les équations indéfinies (27) sont satisfaites, car toutes les quantités $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, Δu, ... sont nulles.

Restent les équations à la surface (28). D'après les valeurs (29) de u, v, w, on a, en se reportant aux expressions (18) des N et T en fonction des composantes du déplacement

$$\theta = 3c, \qquad N_1 = N_2 = N_3 = -(3\lambda + 2\mu)c,$$
$$T_1 = T_2 = T_3 = 0$$

dans tout le milieu. En particulier, sur la surface, on devra avoir [éq. (28)]

$$P\alpha = N_1\alpha, \qquad P\beta = N_2\beta, \qquad P\gamma = N_3\gamma,$$

d'où l'on tire

$$(30)\qquad c = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu},$$

ou encore, en désignant par ξ la quantité $\frac{\lambda}{\mu} + 1$,

$$c = -\frac{P}{3\mu}\,\frac{1}{\xi - \frac{1}{3}}.$$

Toutes les conditions sont ainsi satisfaites. On peut remarquer que la constante c, considérée comme fonction de ξ, admet le pôle $\frac{1}{3}$.

Nous avons donc obtenu un déplacement particulier (29) remplissant toutes les conditions; dans ce déplacement, l'origine est fixe et chaque point P du milieu se déplace suivant le rayon PO d'une quantité proportionnelle à PO. Les nouvelles positions des points du milieu sont donc homothétiques des anciennes par rapport à O.

Le système de déplacements le plus général vérifiant les conditions données s'obtient en composant le système particulier que nous venons de définir avec une translation et une rotation d'ensemble. On peut donc dire qu'après la compression le système devient *semblable* à ce qu'il était primitivement.

Coefficient de compressibilité. — Imaginons un corps homogène isotrope de volume V soumis à une compression normale et uniforme P : le volume V change et devient $V - \delta V$. La quantité

$$q = \frac{1}{P}\frac{\delta V}{V}$$

s'appelle le *coefficient de compressibilité*. On peut exprimer ce coefficient à l'aide des constantes λ et μ. En effet, $\frac{-\delta V}{V}$ est le coefficient de dilatation cubique θ, qui est ici négatif si l'on suppose $3\lambda + 2\mu$ positif; on a alors, d'après (30),

$$q = -\frac{\theta}{P} = -\frac{3c}{P} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

807. Exemple II : Extension longitudinale d'un cylindre droit à base quelconque par des tractions uniformes exercées sur les bases (1). — Soit un cylindre droit dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz, l'une des bases étant dans le plan des xy et l'autre ayant une cote $z = H$ égale à la hauteur du cylindre.

Supposons qu'aucune force extérieure n'agisse sur les éléments superficiels de la surface latérale, mais appliquons à chaque élément $d\sigma$ des deux bases une traction $F\,d\sigma$ normale à cet élément, dirigée vers l'extérieur de façon à allonger le cylindre, F étant

(1) LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.*

une constante appelée *traction par unité de surface*. Le cylindre prend un état d'équilibre contraint.

Les déplacements $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ des divers points doivent satisfaire aux équations indéfinies et aux conditions à la surface que nous allons énumérer.

Surface latérale. — Comme sur cette surface la force extérieure X_e, Y_e, Z_e est nulle et que le cosinus γ de l'angle de la normale extérieure avec Oz est nul aussi, les conditions (22) deviennent

$$(31)\qquad \begin{cases} 0 = N_1\alpha + T_3\beta, \\ 0 = T_3\alpha + N_2\beta, \\ 0 = T_2\alpha + T_1\beta. \end{cases}$$

Bases. — Sur la base $z = 0$, la force extérieure est $F\,d\sigma$ et ses projections sont $0, 0, -F\,d\sigma$; d'ailleurs, les cosinus directeurs de la normale extérieure sont $\alpha = \beta = 0, \gamma = -1$. Les équations (22) donnent donc

$$T_1 = T_2 = 0, \qquad -F - N_3 = 0.$$

Sur la deuxième base $z = H$, on a $X_e = Y_e = 0$, $Z_e = F$, $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, et les équations (22) donnent les conditions

$$(32)\qquad T_1 = T_2 = 0, \qquad F + N_3 = 0$$

identiques aux précédentes.

Le problème étant ainsi posé, on peut satisfaire à toutes les conditions à l'aide du déplacement particulier

$$(33)\qquad \mathbf{u} = ax, \qquad \mathbf{v} = ay, \qquad \mathbf{w} = cz$$

(a et c constants), dérivant de la fonction

$$\varphi = \frac{1}{2}\,a(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}\,cz^2.$$

La valeur correspondante de θ est

$$\theta = 2a + c$$

et les équations indéfinies sont évidemment satisfaites.

Les expressions (18) donnant les valeurs des N et T en fonction

des u, v, w deviennent actuellement

$$N_1 = N_2 = -\lambda(2a + c) - 2\mu a,$$
$$N_3 = -\lambda(2a + c) - 2\mu c,$$
$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

Exprimons alors que les conditions aux limites sont vérifiées. Sur la surface latérale, on doit avoir les conditions (31); comme les T sont nuls, ces conditions se réduisent à $N_1 = N_2 = 0$, c'est-à-dire à

$$\lambda(2a + c) + 2\mu a = 0. \tag{34}$$

Sur les bases on a $-N_3 = F$, c'est-à-dire

$$\lambda(2a + c) + 2\mu c = F. \tag{35}$$

Ces deux équations déterminent, en fonction des données, les valeurs des constantes a et c :

$$a = -\frac{F}{2\mu}\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}, \qquad c = \frac{F}{\mu}\frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu}. \tag{36}$$

La constante a étant négative en supposant $\lambda\mu(3\lambda + 2\mu) > 0$ (n° 800), le cylindre se contracte latéralement en même temps qu'il s'allonge.

Nous avons ainsi obtenu un système de déplacements particuliers remplissant toutes les conditions du problème. Le système de déplacements le plus général répondant à la question s'obtient en composant le système précédent avec un déplacement d'ensemble du cylindre.

En introduisant dans ces formules (36) le nombre $\xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1$, on voit que les constantes a et c deviendraient infinies pour $\xi = \frac{1}{3}$.

Coefficient d'élasticité. — Soit un cylindre de hauteur H, soumis sur ses bases à une traction uniforme ayant pour intensité F par unité de surface. Ce cylindre s'allonge de δH ; le coefficient d'élasticité ou module de Young est le rapport

$$E = \frac{FH}{\delta H}.$$

Le résultat précédent permet d'exprimer ce coefficient en fonction de λ et μ. En effet, dans les formules précédentes, les points du plan $z = 0$ restent dans ce plan, un point du cylindre de cote z subit, dans le sens des génératrices, un déplacement $w = cz$; un point de la base $z = H$ subit donc un déplacement dans le sens des génératrices égal à cH. C'est là l'allongement δH du cylindre :

On a donc, d'après (36),

$$E = \frac{FH}{\delta H} = \frac{F}{c} = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}. \tag{37}$$

En comparant ce coefficient au coefficient de compressibilité q du numéro précédent, on voit que

$$Eq = \frac{3\mu}{\lambda + \mu};$$

le deuxième membre de cette relation se réduit à $\frac{3}{4}$ dans l'hypothèse de Cauchy $\lambda = \mu$.

Rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale. — Ce rapport est égal à $-\frac{a}{c}$; d'après les formules (36) sa valeur est

$$-\frac{a}{c} = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{38}$$

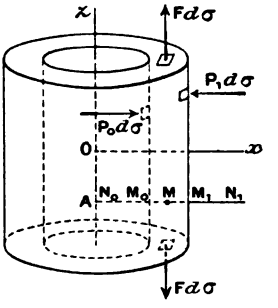
Dans l'hypothèse de Cauchy $\lambda = \mu$, on aurait pour le rapport la valeur $\frac{1}{4}$ donnée par Poisson.

808. Exemple III : Équilibre d'une couche cylindrique. — Soit un solide homogène et isotrope limité par deux cylindres de révolution concentriques et par deux plans perpendiculaires aux arêtes. Ce solide est soumis, sur chacune des surfaces cylindriques, à une pression normale et uniforme et, sur chacune des bases, à une traction parallèle aux arêtes; on se propose de déterminer l'état d'équilibre (1).

(1) *Voir* LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, et *Cours* de M. SARRAU à l'École Polytechnique, 1re Division, 1899-1900 (feuille 70).

Plaçant l'origine au centre de figure (*fig.* 346), prenons l'axe Oz parallèle aux arêtes. Considérons un point quelconque M;

Fig. 346.



désignons par (x, y, z) ses coordonnées dans l'état naturel et par r sa distance à l'axe Oz de sorte que

$$r^2 = x^2 + y^2. \tag{39}$$

Les forces appliquées au solide sont telles que, dans la déformation, le point M se déplace dans le plan méridien passant par sa position primitive, de sorte que l'on peut décomposer son déplacement en deux, l'un ε suivant le prolongement de la distance r, l'autre $\mathbf{w}$ parallèle aux arêtes.

Nous supposerons que ε ne dépend que de r et que $\mathbf{w}$ est proportionnel à z; en posant, en conséquence,

$$\mathbf{u} = \varepsilon \frac{x}{r}, \qquad \mathbf{v} = \varepsilon \frac{y}{r}, \qquad \mathbf{w} = cz, \tag{40}$$

nous allons vérifier que l'on satisfait à toutes les conditions de l'équilibre par des valeurs convenablement choisies de la fonction ε et de la constante c.

Remarquons d'abord que les valeurs admises pour $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont les dérivées partielles d'une fonction φ de x, y, z; on a, en effet,

$$\mathbf{u}\,dx + \mathbf{v}\,dy + \mathbf{w}\,dz = \varepsilon \frac{x\,dx + y\,dy}{r} + cz\,dz.$$

Or, la relation (39) donne

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr;$$

donc l'expression précédente est égale à $\varepsilon dr + cz\,dz$ et elle est, par suite, la différentielle totale de la fonction

$$\varphi = \int \varepsilon\, dr + \frac{1}{2} c z^2. \tag{41}$$

Il en résulte (n° 805) que, pour satisfaire aux équations indéfinies de l'équilibre, il suffit d'exprimer que la dilatation cubique est constante. Or, on déduit des valeurs (40)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \frac{x^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{y^2}{r^3}\varepsilon, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \frac{y^2}{r^2}\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{x^2}{r^3}\varepsilon, \qquad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = c. \tag{42}$$

Il en résulte

$$\theta = \frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} + c,$$

et l'on a, par conséquent, en désignant par a une constante,

$$\frac{d\varepsilon}{dr} + \frac{\varepsilon}{r} = 2a \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(r\varepsilon)}{dr} = 2ar.$$

L'intégrale générale de cette équation est, en appelant b une autre constante,

$$\varepsilon = ar + \frac{b}{r}. \tag{43}$$

En adoptant cette valeur, les déplacements (40) satisfont aux équations indéfinies. Ces déplacements renferment ainsi trois arbitraires a, b, c que nous allons déterminer de manière à satisfaire aux équations aux limites.

Comme ici $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ dérivent d'une fonction φ, on pourra écrire les conditions aux limites sous la forme du n° 804

$$\begin{cases} \mathrm{X}_e = \lambda\theta\alpha + 2\mu\dfrac{d\mathbf{u}}{dn}, \\ \mathrm{Y}_e = \lambda\theta\beta + 2\mu\dfrac{d\mathbf{v}}{dn}, \\ \mathrm{Z}_e = \lambda\theta\gamma + 2\mu\dfrac{d\mathbf{w}}{dn}, \end{cases} \tag{44}$$

les dérivées étant prises suivant la normale extérieure à la surface du milieu.

Bases. — Appelons F la traction par unité de surface exercée

sur les bases. Sur la base située du côté des z positifs $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$, $X_e = Y_e = 0$, $Z_e = F$; la normale extérieure est parallèle à Oz; comme $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne dépendent pas de z, leurs dérivées $\frac{d\mathbf{u}}{dn}$, $\frac{d\mathbf{v}}{dn}$ parallèles à Oz sont nulles; comme $\mathbf{w} = cz$, sa dérivée normale à la base, $\frac{d\mathbf{w}}{dn} = \frac{d\mathbf{w}}{dz}$, est égale à c; les deux premières des relations (44) sont donc identiques et la dernière donne, en y remplaçant θ par sa valeur $2a + c$,

$$F = \lambda(2a + c) + 2\mu c. \tag{45}$$

Pour l'autre base, on obtient la même condition.

Surfaces latérales. — Comme la distribution des déplacements et des efforts est symétrique autour de Oz, il suffit d'exprimer que les conditions aux surfaces latérales sont remplies le long des génératrices situées dans le plan zOx. Nous appellerons r_0 et r_1 les rayons des surfaces cylindriques intérieures et extérieures, P_0 et P_1 les valeurs par unité de surface des pressions normales appliquées sur ces deux surfaces.

Prenons un rayon déterminé AM_0M_1 du cylindre dans le plan zOx (*fig.* 346) : en un point M de ce rayon ayant pour coordonnées x et z, r est égal à x, et y est nul; par suite

$$\varepsilon = ax + \frac{b}{x}$$

et les valeurs (40) de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ deviennent

$$\mathbf{u} = ax + \frac{b}{x}, \qquad \mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{w} = cz. \tag{46}$$

Appliquons maintenant les formules (44) aux deux surfaces cylindriques. Sur la surface extérieure (en M_1), la normale extérieure est M_1N_1 parallèle à Ox dans le sens positif de Ox : donc $\alpha = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Les dérivées $\frac{d\mathbf{u}}{dn}$, $\frac{d\mathbf{v}}{dn}$, $\frac{d\mathbf{w}}{dn}$ prises suivant cette normale sont $\frac{d\mathbf{u}}{dx}$, $\frac{d\mathbf{v}}{dx}$, $\frac{d\mathbf{w}}{dx}$, c'est-à-dire $a - \frac{b}{x^2}$, 0, 0, où il faut faire $x = r_1$. Enfin, en ce point M_1, $X_e = -P_1$, $Y_e = Z_e = 0$. Les deux dernières équations (44) sont alors identiques et la première

donne, en remplaçant θ par sa valeur $2a + c$,

$$(47) \qquad -P_1 = \lambda(2a+c) + 2\mu\left(a - \frac{b}{r_1^2}\right).$$

Sur la surface intérieure, en M_0, on fera un calcul analogue, en remarquant que la normale extérieure M_0N_0 est de sens contraire à Ox, $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 0$; d'où $\frac{du}{dn} = -\frac{du}{dx}$, ...; en outre $X_e = P_0$, $Y_e = Z_e = 0$. On obtient ainsi la condition

$$(48) \qquad P_0 = -\lambda(2a+c) - 2\mu\left(a - \frac{b}{r_0^2}\right).$$

Les trois équations (46), (47) et (48) déterminent les valeurs des constantes a, b, c en fonction des données :

$$(49) \quad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \dfrac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_1^2 - r_0^2} - \dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} F, \\ b = \dfrac{1}{2\mu} \dfrac{r_0^2 r_1^2 (P_0 - P_1)}{r_1^2 - r_0^2}, \\ c = -\dfrac{\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \dfrac{r_0^2 P_0 - r_1^2 P_1}{r_1^2 - r_0^2} + \dfrac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} F. \end{cases}$$

Ces formules, dans lesquelles est encore en évidence le pôle $\xi = \frac{1}{3}$, sont fondamentales pour la théorie du frettage des canons, pour laquelle nous renverrons le lecteur au *Cours de Mécanique* de M. Sarrau à l'École Polytechnique et aux *Études sur la résistance des tubes métalliques simples ou composés avec application à la construction des bouches à feu*, par le général Virgile (*Mémorial de l'Artillerie de la Marine*, t. I).

809. Indications sommaires sur quelques travaux. — Signalons d'abord une autre application classique, celle de la torsion d'un cylindre circulaire (LAMÉ, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*, XIVe Leçon, p. 186 de la première édition), puis le célèbre Mémoire de Barré de Saint-Venant *Sur la torsion des prismes* (*Savants étrangers*, t. XIV, 1855), où le même problème est envisagé pour d'autres sections transversales. Une autre application intéressante est le problème du plan indéfini résolu par M. Boussinesq (*Application des potentiels*, etc.; Gauthier-Villars, 1885) et, à peu près en même temps, par M. Cerruti.

Arrivons maintenant à quelques travaux plus récents relatifs à l'intégration des équations de l'équilibre élastique et supposons, pour fixer les

idées, qu'il n'y ait pas de forces extérieures agissant sur les éléments de volume. En posant

$$\xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1,$$

nous écrirons, avec MM. Cosserat, les équations (27) sous la forme

$$(a) \qquad \Delta u + \xi \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad \Delta v + \xi \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \qquad \Delta w + \xi \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

I. Les questions relatives au système (a) présentent avec celles qui sont relatives à l'équation de Laplace et aux équations similaires une analogie étroite qui, *quoique ne se poursuivant pas jusqu'au bout,* peut être étudiée avec fruit.

Considérons, par exemple, le problème [1] qui consiste à déterminer une fonction v qui s'annule à la frontière d'un domaine et qui, à l'intérieur, vérifie l'équation

$$\Delta v + \xi v + f = 0.$$

1° L'idée, qui a sans doute guidé dans cette question, a été de représenter la fonction v par le développement formel

$$\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

(où les A_i, k_i sont des constantes, les U_i des fonctions de x, y, z), sauf ultérieurement, si c'est nécessaire, à le modifier convenablement [2] par l'application du théorème de M. Mittag-Leffler, par exemple.

On voit immédiatement que la fonction U_i doit s'annuler à la frontière et vérifier à l'intérieur l'équation [3]

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0.$$

2° Admettant que le problème a une solution, supposons que l'on envisage la question de savoir si cette solution est unique; on est conduit de nouveau aux nombres k_i et aux fonctions U_i correspondantes. Car, si pour une valeur k de ξ le problème proposé a deux solutions v_1, v_2, la différence $U = v_1 - v_2$ s'annule à la frontière et vérifie à l'intérieur l'équation

$$\Delta U + k U = 0.$$

II. Par analogie avec la question précédente, envisageons le problème qui consiste à déterminer trois fonctions u, v, w qui, à la frontière d'un

---

(1) POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique,* p. 65. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* t. VIII, 1894.

(2) POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique,* p. 148, 149.

(3) Il en résulte entre deux fonctions U_i, U_j correspondant à des nombres k_i, k_j la relation $\iiint U_i U_j \, d\tau = 0$ qui permet de construire le développement conformément à la méthode habituelle de la Physique mathématique.

domaine, prennent des valeurs données et qui, à l'intérieur, vérifient [1] le système (a).

1° Supposons que l'on cherche à représenter les fonctions $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ par les développements formels :

$$(b)\qquad \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \xi \sum \dfrac{A_i k_i U_i}{\xi - k_i}, \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \xi \sum \dfrac{A_i k_i V_i}{\xi - k_i}, \\ \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \xi \sum \dfrac{A_i k_i W_i}{\xi - k_i}, \end{cases}$$

$\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0$ étant des fonctions de x, y, z qui, à la frontière. prennent les valeurs données pour $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$: les A_i, k_i sont des constantes; les U_i, V_i, W_i sont des fonctions de x, y, z.

On trouve immédiatement que U_i, V_i, W_i doivent s'annuler à la frontière et vérifier le système (a) où l'on suppose $\xi = k_i$ [2].

2° D'autre part, si l'on admet l'existence de la solution et si l'on examine la question de savoir si elle est unique, on est conduit de nouveau aux nombres k_i et aux fonctions (U_i, V_i, W_i) correspondantes.

MM. Cosserat ont cherché, d'une part, à mettre en évidence la possibilité des développements (b), ou de ces développements modifiés par le théorème de M. Mittag-Leffler, et, d'autre part, à déterminer *effectivement* pour des corps donnés les nombres k_i et les fonctions U_i, V_i, W_i correspondantes.

Le premier point présente de grandes difficultés que ces auteurs n'ont pu jusqu'ici que surmonter partiellement. Il est tout d'abord essentiel de préciser l'énoncé de la question à l'égard des conditions de continuité vérifiées par les inconnues. Il ne paraît plus possible ici, comme cela arrive pour l'équation de Laplace [3], de faire abstraction de la façon dont se comportent les dérivées à la frontière.

---

(1) On peut considérer aussi bien le cas où l'on aurait des seconds membres qui ne seraient pas nuls.

(2) De là résulte entre deux systèmes de fonctions (U_i, V_i, W_i), (U_j, V_j, W_j) correspondant à des nombres k_i, k_j la relation $\iiint \Theta_i \Theta_j \, d\tau = 0$ qui permet de construire le développement conformément à la méthode habituelle de la Physique mathématique.

(3) Pour l'équation de Laplace, on peut résoudre le problème de Dirichlet, puis s'occuper, comme l'a fait, par exemple, M. Liapounoff, de la façon dont se comporte à la frontière la dérivée normale. Ici, l'analogie ne semble pas pouvoir se poursuivre et l'on est ainsi conduit dans les démonstrations à des restrictions au sujet de l'existence de la solution. Il est à remarquer que les auteurs qui ont traité, par exemple, du problème de la sphère (comme Lord Kelvin, Lamé et les

La première question à traiter est de préciser, autant que possible, pour quelles valeurs de ξ la solution (si elle existe) est unique. MM. Cosserat ont établi (1) que la solution est unique, non seulement pour $\xi > \frac{1}{3}$, comme cela résultait des recherches antérieures, mais même pour

$$-1 < \xi \leq \frac{1}{3}.$$

Ils ont ensuite étudié $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ comme fonctions de ξ (réel ou complexe) et ils ont cherché à établir (2) que ces fonctions sont uniformes et ont tous leurs points critiques réels et situés à gauche de -1 sur l'axe des quantités réelles. Malheureusement ici, les difficultés, relatives à la façon dont les dérivées se comportent à la frontière, se présentent et entraînent à introduire dans les démonstrations des restrictions.

Il resterait encore à montrer, comme cela est vraisemblable (3), que, dans des cas généraux, les points critiques de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sont généralement des pôles et à établir la possibilité de développements analogues à (*b*).

Relativement au second point, MM. Cosserat ont obtenu pour la sphère (4) les nombres k_i et les fonctions U_i, V_i, W_i en reprenant les formules données par Lord Kelvin. Ils les ont également déterminés pour l'enveloppe sphérique (5) et pour l'ellipsoïde (5); dans ce dernier cas, les fonctions U_i, V_i, W_i sont, comme pour la sphère, des polynomes.

III. Considérons le problème qui consiste à déterminer une fonction v satisfaisant aux conditions

$$(c) \qquad \Delta v + \xi v + f = 0, \qquad \frac{dv}{dn} = 0,$$

ou plus généralement aux suivantes (6)

$$(d) \qquad \Delta v + \xi v + f = 0, \qquad \frac{dv}{dn} + hv = 0.$$

---

géomètres italiens) ne paraissent pas s'être préoccupés de préciser l'énoncé de leur problème et d'examiner si la solution existe effectivement.

(1) *Sur les équations de la théorie de l'élasticité* (*Comptes rendus*, t. CXXVI, 1898, p. 1089).

(2) *Sur la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les valeurs des inconnues à la frontière sont données* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 1901, p. 145).

(3) On peut ici répéter des raisonnements analogues à ceux faits sur l'équation $\Delta u + \xi u + f = 0$ avant la publication du Mémoire cité de M. Poincaré.

(4) *Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 1901, p. 326).

(5) *Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique* (*Comptes rendus*, t. CXXVII, 1898, p. 315).

(6) POINCARÉ, *Sur les équations de la Physique mathématique*, p. 125.

Le problème d'élasticité analogue à celui qui est défini par les équations (c) consiste à déterminer trois fonctions $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vérifiant les équations (a), et pour lesquelles les valeurs à la frontière des composantes de l'effort sont données.

MM. Cosserat ont établi que les seules valeurs de ξ, pour lesquelles on est certain que la solution est unique, sont celles plus grandes que $\frac{1}{3}$, et que, pour la valeur $\frac{1}{3}$ de ξ, la solution ne peut être unique; ils ont donné, pour cette valeur $\frac{1}{3}$ de ξ, les expressions de U, V, W qui vérifient les équations (a) et qui, à la frontière, annulent l'effort [1].

Ils ont déterminé les nombres k_i et les fonctions U_i, V_i, W_i analogues aux nombres k_i et aux fonctions U_i, V_i, W_i du § II pour le cas de la sphère [2], de l'enveloppe sphérique [3] et de l'ellipsoïde [4].

IV. Il est à remarquer que l'on obtient un certain nombre de résultats connus en supposant les données choisies de telle façon que les inconnues $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ soient de la forme (b), les seconds membres étant des sommes d'un nombre limité de termes.

Ainsi, MM. Cosserat ont signalé le cas remarquable où les valeurs données à la frontière des composantes de l'effort sont telles que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ aient des expressions de la forme

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \frac{\frac{1}{3}\xi}{\xi - \frac{1}{3}}\,\mathrm{U}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{\frac{1}{3}\xi}{\xi - \frac{1}{3}}\,\mathrm{V}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \frac{\frac{1}{3}\xi}{\xi - \frac{1}{3}}\,\mathrm{W}.$$

Ces formules donnent, comme cas particuliers, des résultats classiques obtenus par Lamé [5] et par Barré de Saint-Venant.

Au même ordre d'idées peuvent se rattacher les résultats particuliers obtenus en 1895 par M. Chree à l'égard de l'ellipsoïde. (Exercice 5, p. 539.)

([1]) *Sur un point critique particulier de la solution des équations de l'élasticité, dans le cas où les efforts sur la frontière sont donnés* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 1901, p. 382).

([2]) *Sur la déformation infiniment petite d'un corps élastique soumis à des forces données* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 1901, p. 271).

([3]) *Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 1901, p. 326).

([4]) *Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique soumis à des efforts donnés sur la frontière* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, p. 361-364). Cette Note est aussi relative au problème analogue à celui défini par les équations (d) (même remarque pour l'enveloppe sphérique élastique).

([5]) *Voir*, entre autres, les résultats des nos 806, 807, 808, et le résultat indiqué à l'exercice 4 de la page 538.

III. — MOUVEMENTS INTÉRIEURS.

810. Mouvement par ondes planes. — Imaginons un milieu élastique homogène isotrope indéfini en mouvement, sans qu'aucune force extérieure n'agisse sur les éléments de volume. Les équations de ce mouvement sont alors données par les formules (20) du n° 801, où l'on suppose $X = Y = Z = 0$.

$$(50)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\,\Delta u = \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v = \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w = \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Nous nous bornerons à étudier le cas le plus simple d'un mouvement vibratoire, à savoir le cas où les déplacements u, v, w de chaque point x, y, z du milieu, à l'instant t, sont donnés par des expressions de la forme

$$(51)\qquad \begin{cases} u = p\cos(ax+by+cz-st+\alpha), \\ v = q\cos(ax+by+cz-st+\alpha), \\ w = r\cos(ax+by+cz-st+\alpha), \end{cases}$$

p, q, r, a, b, c, s et α étant des constantes. Le mouvement vibratoire ainsi défini s'appelle *mouvement par ondes planes*. Nous allons voir sous quelles conditions un mouvement de cette nature peut se propager dans le milieu. Ce problème est analogue à celui de l'étude du mouvement ondulatoire simple d'un liquide pesant (n° 784).

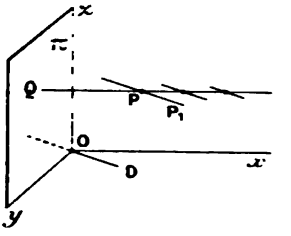
Nous pouvons d'abord, par un changement d'axes, simplifier les équations (51) du mouvement. Pour cela, construisons (*fig.* 347) le plan Π ayant pour équation

$$(\Pi)\qquad aX + bY + cZ = 0,$$

et un segment OD dont les projections sur les axes sont égales à p, q, r.

D'après les formules (51), à un instant quelconque t, le déplacement PP_1 d'un point $P(x, y, z)$ du milieu est parallèle à OD.

Fig. 347.



et le rapport $\frac{PP_1}{OD}$ est en grandeur et signe donné par l'équation

$$\frac{PP_1}{OD} = \cos(ax + by + cz - st + \alpha). \tag{52}$$

Si l'on abaisse du point P la perpendiculaire PQ sur le plan Π, on a, pour la distance QP, la formule élémentaire

$$QP = \frac{1}{h}(ax + by + cz),$$

h désignant la quantité $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. La relation (52), qui donne le déplacement au temps t, prend donc la forme

$$\frac{PP_1}{OD} = \cos(h\,QP - st + \alpha). \tag{53}$$

On voit qu'en tous les points P situés sur une même perpendiculaire au plan Π, les segments PP_1 sont parallèles et varient en fonction de QP comme les ordonnées d'une sinusoïde.

Forme réduite. — Pour simplifier les calculs, on peut toujours prendre pour plan des yz le plan Π, et pour plan des xy un plan mené par OD perpendiculairement au plan Π. Le segment OD est alors dans le plan des xy, et la nouvelle valeur de sa projection r sur Oz est nulle. D'autre part, QP est l'abscisse x du point P dans le nouveau système d'axes. Par rapport à ce nouveau système, les projections du déplacement PP_1 sont donc

données par des équations de la forme

$$(54)\qquad \begin{cases} \mathbf{u} = p\cos(hx - st + \alpha), \\ \mathbf{v} = q\cos(hx - st + \alpha), \end{cases} \qquad \mathbf{w} = 0,$$

p, q désignant les projections de OD sur les nouveaux axes Ox et Oy.

On voit que les divers points P sont animés de mouvements vibratoires simples identiques s'effectuant suivant des droites parallèles à OD et ayant tous la même amplitude maximum égale à $\pm$ OD : mais à un même instant t les divers points ne sont pas dans la même phase du mouvement. La vitesse d'un des points P_1 à l'instant t est évidemment parallèle à OD : elle a pour projections sur les axes Ox et Oy

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = ps\sin(hx - st + \alpha),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = qs\sin(hx - st + \alpha).$$

La période T du mouvement vibratoire de chaque point

$$(55)\qquad \mathrm{T} = \frac{2\pi}{s}$$

est appelée la *durée de la vibration*.

Cherchons quels sont, à un instant déterminé t, les points P du milieu qui ont subi le même déplacement et qui possèdent la même vitesse. Ce sont les points pour lesquels les deux fonctions

$$\cos(hx - st + \alpha), \qquad \sin(hx - st + \alpha)$$

ont des valeurs déterminées

$$\cos\beta, \quad \sin\beta,$$

β désignant une constante. Les points P cherchés sont donc situés sur les plans ayant pour équations

$$(56)\qquad hx - st + \alpha = \beta + 2k\pi \qquad (k \text{ entier});$$

tous ces plans sont parallèles au plan Π et équidistants. La plus courte distance l de deux de ces plans est la *longueur d'ondulation*

$$(57)\qquad l = \frac{2\pi}{h}.$$

Quand t varie, les plans parallèles définis par l'équation (56) se déplacent avec une vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \frac{s}{h}$$

qu'on appelle *vitesse de propagation*

$$G = \frac{s}{h} = \frac{l}{T}. \tag{58}$$

Ces définitions posées, exprimons que les valeurs (54) de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ vérifient les équations générales (50). On a immédiatement

$$\begin{aligned}
\theta &= -hp\sin(hx - st + \alpha),\\
\Delta\mathfrak{u} &= -h^2 p\cos(hx - st + \alpha),\\
\Delta\mathfrak{v} &= -h^2 q\cos(hx - st + \alpha);\\
\frac{\partial^2\mathfrak{u}}{\partial t^2} &= -s^2 p\cos(hx - st + \alpha),\\
\frac{\partial^2\mathfrak{v}}{\partial t^2} &= -s^2 q\cos(hx - st + \alpha).
\end{aligned}$$

Portant ces valeurs dans les équations du mouvement (50), on voit que la dernière est identique, car $\mathfrak{w}$ est nul; les deux autres donnent, après suppression du facteur $\cos(hx - st + \alpha)$,

$$p[\rho s^2 - (\lambda + 2\mu)h^2] = 0, \qquad q(\rho s^2 - \mu h^2) = 0. \tag{59}$$

Ces équations se décomposent : *elles montrent que, si* $\lambda + \mu$ *n'est pas nul, l'une des quantités* p *ou* q *doit être nulle.*

1° Si $p = 0$, la vibration est *transversale :* la direction OD de la vibration est parallèle au plan de l'onde, c'est-à-dire perpendiculaire à la vitesse de propagation. La deuxième équation (59) donne alors

$$\rho s^2 - \mu h^2 = 0,$$

d'où, pour la vitesse de propagation des vibrations transversales,

$$G = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{60}$$

Dans ce cas, $\theta = 0$; le mouvement a lieu sans dilatation ni compression (n° 687).

2° Si $q = 0$, la vibration est *longitudinale :* la direction OD de la vibration est perpendiculaire au plan de l'onde, c'est-à-dire

parallèle à la vitesse de propagation. La première des équations (59) donne alors

$$\rho s^2 - (\lambda + 2\mu)h^2 = 0,$$

d'où, pour la vitesse de propagation des vibrations longitudinales,

$$G = \frac{s}{h} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{61}$$

Dans ce cas, les déplacements **u**, **v**, **w** dérivent de la fonction

$$\varphi = \frac{p}{h}\sin(hx - st + \alpha);$$

la rotation moléculaire est nulle à chaque instant (n° 686).

En résumé, un milieu élastique déterminé ne peut transmettre que deux sortes de vibrations par ondes planes, des vibrations transversales ou des vibrations longitudinales, se propageant avec des vitesses propres caractéristiques du milieu et indépendantes de l'amplitude et de la longueur d'onde.

Les phénomènes lumineux sont attribués aux vibrations d'un milieu élastique, que l'on considère comme isotrope pour les corps non cristallisés, mais qui possède la propriété exprimée par l'équation $\lambda + 2\mu = 0$. Alors la vitesse de propagation des vibrations longitudinales est nulle et le milieu ne peut propager que des ondes planes à vibrations transversales.

Au contraire, pour un fluide parfait, $\mu = 0$, car un fluide parfait ne peut pas exercer d'efforts tangentiels intérieurs

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0;$$

la vitesse de propagation des vibrations transversales est donc nulle, et le fluide ne peut propager que des vibrations longitudinales.

Remarque. — Si $\lambda + \mu$ était nul, les équations (59) pourraient être satisfaites en donnant à p et q des valeurs quelconques et en prenant

$$\rho s^2 - \mu h^2 = 0.$$

EXERCICES.

1. Vérifier, d'après les expressions des N et T en fonction des ε, γ, que les invariants de la quadrique (Q) du n° 799 s'expriment sous forme entière en fonction des invariants de la quadrique (E).

2. Traiter les exemples des n°s 806 et 807, en leur appliquant la forme des conditions aux limites données au n° 804, pour le cas où les déplacements dérivent d'une fonction φ.

3. *Dans le cas où les déplacements* u, v, w dérivent d'une fonction φ, les forces de volume X, Y, Z étant *nulles,* ramener l'équation que vérifie φ à l'équation de Laplace.

Réponse. — On a dans ce cas

$$\theta = k, \qquad \Delta\varphi = k.$$

Soit alors

$$\psi = \varphi(x, y, z) - \frac{1}{6} k(x^2 + y^2 + z^2);$$

on a

$$\Delta\psi = 0, \qquad u = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{3} kx, \qquad \ldots;$$

les conditions aux limites s'écrivent

$$X_n = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)k\alpha + 2\mu \frac{d}{dn}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

.....

4. *Équilibre d'une enveloppe sphérique creuse soumise sur ses deux faces à des pressions normales et uniformes.*

Réponse. — Prenons comme origine le centre O de l'enveloppe et appelons R_0 et R_1 les rayons intérieur et extérieur, P_0 et P_1 les pressions intérieure et extérieure par unité de surface. Par raison de symétrie, on voit, comme pour l'enveloppe cylindrique (n° 808), que le déplacement d'un point M a lieu suivant le rayon OM et est fonction de la seule distance $OM = r$.

Posons

$$u = \varepsilon \frac{x}{r}, \qquad v = \varepsilon \frac{y}{r}, \qquad w = \varepsilon \frac{z}{r},$$

ε étant une fonction de r. Ces déplacements dérivent de la fonction

$$\varphi = \int \varepsilon \, dr.$$

En écrivant que θ est constant et égal à $3c$, on a

$$\frac{d\varepsilon}{dr} + 2\frac{\varepsilon}{r} = 3c, \qquad \varepsilon = cr + \frac{b}{r^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} cr^2 - \frac{b}{r}.$$

Les conditions aux limites donnent ensuite

$$c = \frac{R_0^3 P_0 - R_1^3 P_1}{(3\lambda + 2\mu)(R_1^3 - R_0^3)}, \qquad b = \frac{(P_0 - P_1) R_0^3 R_1^3}{4\mu (R_1^3 - R_0^3)},$$

expressions qui contiennent encore $\xi - \frac{1}{3}$ au dénominateur, en posant

$$\xi = \frac{\lambda}{\mu} + 1.$$

(LAMÉ, *Leçons, etc.* SARRAU, *Notions sur la théorie de l'élasticité;* Gauthier-Villars, p. 43.)

5. *Équilibre d'un ellipsoïde élastique tournant avec une vitesse angulaire constante* ω *autour d'un de ses axes* Oz. On néglige la pesanteur et la pression atmosphérique.

Dans cet exemple, il n'y a pas de forces à la surface, $X_e = Y_e = Z_e = 0$; sur les éléments de volume agit la force centrifuge. Soit r la distance d'un point P à l'axe, la force X, Y, Z dérive de la fonction $U = \frac{1}{2}\omega^2 r^2$.

M. C. Chree, qui avait déjà étudié le problème précédent dans le *Quarterly Journal* de 1888, a traité en 1895, dans le même Recueil (*voir* aussi le Travail antérieur inséré dans les *Proceedings of the Royal Society*, Vol. LVIII), le cas plus général dans lequel la force X, Y, Z dérive de la fonction

$$U = \frac{1}{2}(Px^2 + Qy^2 + Rz^2),$$

P, Q, R étant des constantes et les axes de coordonnées étant les axes de l'ellipsoïde. Il suppose même que, sur la surface, les efforts, au lieu d'être nuls, peuvent être normaux et d'une forme analogue à celle de U.

6. *Équilibre d'un corps élastique pesant immergé dans un liquide parfait de même densité soumis à une pression extérieure donnée* (COSSERAT, *Comptes rendus,* fin de la Note du 19 août 1901).

7. Lorsqu'un milieu élastique est infiniment peu déformé par des forces extérieures appliquées exclusivement à sa surface (n° 805), on a

$$\Delta\theta = 0;$$

en outre, les trois déplacements u, v, w, les six déformations ε_i, γ_i et les six quantités N_i, T_i vérifient l'équation

$$\Delta\Delta\varphi = 0.$$

Réponse. — On obtient ces résultats par dérivation et addition dans les équations (27).

8. Déterminer les dimensions des constantes λ et μ par rapport aux unités fondamentales.

CHAPITRE XXXVIII.

ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE VISQUEUX.

811. Efforts intérieurs dans un fluide visqueux. — Nous avons appelé *fluide parfait* (n° 722) un fluide dans lequel tous les efforts intérieurs sont des *pressions normales* aux éléments sur lesquels elles s'exercent. Mais, comme nous l'avons dit, un fluide parfait est une abstraction dont les fluides naturels s'approchent plus ou moins. Dans tous les fluides, même dans les plus mobiles, il existe une certaine *viscosité* due au frottement intérieur.

Diverses méthodes ont été proposées pour tenir compte de la viscosité : nous exposerons ici la théorie le plus ordinairement adoptée dont Basset [1] fait remonter l'origine à un Mémoire de Stokes (*Trans. Camb. Phil. Soc.*, t. VIII, p. 287); cette théorie est surtout satisfaisante quand les vitesses des particules du fluide sont petites.

La méthode que nous allons exposer est analogue à celle que nous avons suivie pour établir les équations de l'élasticité.

Tout d'abord, on peut appliquer au fluide tout ce qui a été dit des efforts dans un milieu continu. A chaque instant, en chaque point du fluide, ces efforts sont caractérisés par les six quantités N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 (n° 616) qui sont fonctions de x, y, z, t.

Si l'on appelle X, Y, Z la force extérieure rapportée à l'unité de masse agissant au point $P(x, y, z)$, J_x, J_y, J_z les projections de l'accélération de la particule liquide placée en P, et ρ la densité en ce point, les équations du mouvement sont (n° 616)

$$(1) \qquad \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho(X - J_x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si le fluide était *parfait*, on aurait (n° 722)

$$N_1 = N_2 = N_3 = p,$$
$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

[1] BASSET, *Treatise on Hydrodynamics*, t. II, Chap. XX.

Nous poserons en conséquence, dans un fluide visqueux,

$$(2) \qquad N_1 = p + N'_1, \qquad N_2 = p + N'_2, \qquad N_3 = p + N'_3.$$

Nous pourrons dire alors que, si le fluide était parfait, N'_1, N'_2, N'_3, T_1, T_2, T_3 seraient nuls, en chaque point, à chaque instant.

D'autre part, si le fluide, tout en étant visqueux, était en *équilibre*, les mêmes quantités N'_1, N'_2, N'_3, T_1, T_2, T_3 seraient aussi nulles, car, pour qu'un fluide visqueux ou non soit en équilibre, il faut que tous les efforts intérieurs soient des pressions normales (n° 623). D'après cela, les quantités N'_1, N'_2, N'_3, T_1, T_2, T_3 *s'annulent quand toutes les vitesses sont nulles.*

812. Détermination des efforts en fonction des dérivées des composantes de la vitesse. — Dans un fluide en mouvement, lorsque t varie de t à $t+dt$, les points P du fluide subissent des déplacements PP_1 ayant pour projections

$$(3) \qquad \mathbf{u} = u\,dt, \qquad \mathbf{v} = v\,dt, \qquad \mathbf{w} = w\,dt.$$

Si l'on prend un élément fluide dm entourant le point P à l'instant t, cet élément, à l'instant $t+dt$, prend une nouvelle forme et une nouvelle position dm_1 entourant P_1. Nous avons vu, au n° 705, que l'on peut passer de dm à dm_1 en faisant subir à dm :

1° Une translation d'ensemble;

2° Une rotation d'ensemble;

3° Une déformation.

Le frottement résulte uniquement du déplacement relatif des points du fluide : la translation et la rotation, n'altérant pas les positions relatives des points de l'élément dm, ne donnent naissance à aucun frottement intérieur; c'est seulement la déformation qui détermine le frottement.

Les quantités N'_1, N'_2, N'_3, T_1, T_2, T_3, qui représentent l'effet du frottement intérieur, dépendent donc uniquement des éléments caractéristiques de la déformation subie par dm. Or, nous savons que, dans une déformation infiniment petite, définie par les déplacements $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, les six éléments caractéristiques de la déformation sont (n° 684)

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \qquad \dots, \qquad \gamma_1 = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \qquad \dots;$$

actuellement, d'après les expressions (3) des déplacements $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, ces six quantités sont

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}\,dt, \qquad \dots, \qquad \gamma_1 = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) dt, \qquad \dots,$$

et la dilatation cubique θ a pour expression

$$\theta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt.$$

Ces quantités ε et γ sont de l'ordre de dt : les six quotients

$$(4) \qquad \varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon_1}{dt}, \quad \ldots \quad \gamma'_1 = \frac{\gamma_1}{dt}$$

sont finis et mesurent ce qu'on peut appeler la vitesse de déformation en P; ces quotients sont

$$(5) \quad \begin{cases} \varepsilon'_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon'_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon'_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma'_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma'_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma'_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Le quotient de θ par dt mesure de même la *vitesse de dilatation* cubique θ' :

$$(6) \qquad \theta' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 + \varepsilon'_3.$$

Les quantités N'_1, N'_2, N'_3, T_1, T_2, T_3 sont alors des fonctions de ε'_1, ε'_2, ε'_3, γ'_1, γ'_2, γ'_3 s'annulant quand toutes ces variables sont nulles, car les N', T sont nuls dans l'équilibre, comme nous l'avons dit plus haut. *Nous admettrons que* les vitesses u, v, w et leurs dérivées par rapport à x, y, z soient assez petites pour qu'on puisse négliger les carrés et les produits de ces dérivées. Alors, en développant par la formule de Mac-Laurin les N' et les T considérés comme fonctions des ε', γ', on pourra borner ces développements *aux termes du premier degré* et prendre pour les N' et les T des fonctions linéaires et homogènes des ε', γ'. Ces six fonctions linéaires de six variables contiennent trente-six coefficients; mais le fluide étant *isotrope* dans la particule infiniment petite dm, les considérations de symétrie employées en élasticité (n° 799) permettent de réduire ces coefficients à deux et donnent finalement, pour les N' et les T, les expressions suivantes en fonction des ε', γ' :

$$(7) \qquad N'_i = -\lambda'\theta' - 2\mu'\varepsilon'_i, \qquad T_i = -\mu'\gamma'_i;$$

λ' et μ' désignant deux constantes analogues aux constantes λ et μ de la théorie de l'élasticité. D'après les valeurs (5) des ε', γ', on a finalement

$$(8) \quad \begin{cases} N'_1 = -\lambda'\theta' - 2\mu'\dfrac{\partial u}{\partial x}, & T_1 = -\mu'\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En se reportant aux équations (2), on a

$$(9) \quad \begin{cases} N_1 = p - \lambda'\theta' - 2\mu'\dfrac{\partial u}{\partial x}, & T_1 = -\mu'\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

813. Équations du mouvement. — D'après ces valeurs (9) des N et T, les équations du mouvement (1) deviennent

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} - (\lambda' + \mu')\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} - \mu' \Delta u = \rho(X - J_x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \theta' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

où J_x, J_y, J_z s'expriment, comme nous l'avons vu dans la cinématique des fluides, soit avec les variables de Lagrange, soit avec celles d'Euler.

Cas d'un liquide visqueux. — Pour un liquide incompressible, θ' est nul : les équations du mouvement (10) prennent donc la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} - \mu' \Delta u = \rho(X - J_x), \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} - \mu' \Delta v = \rho(Y - J_y), \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} - \mu' \Delta w = \rho(Z - J_z), \end{cases}$$

avec un coefficient μ' appelé *coefficient de viscosité* du liquide.

Cas d'un gaz. — Pour les gaz, on fait *quelquefois* une hypothèse supplémentaire permettant d'établir une relation entre λ' et μ'. Cette hypothèse est la suivante :

Si l'élément gazeux dm se dilate également dans toutes les directions, les composantes normales N_1, N_2, N_3 *deviennent égales à la pression p*, ou encore *les quantités* N'_1, N'_2, N'_3 *deviennent nulles.*

Dire que l'élément *dm* se dilate également dans tous les sens, c'est dire que l'ellipsoïde des dilatations (n° 668) est une sphère $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, et, par suite, $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3$. Les N' données par les relations (7) devraient donc s'annuler quand $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3$, ce qui exige

$$(12)\qquad 3\lambda' + 2\mu' = 0, \qquad \text{ou} \qquad \xi' - \frac{1}{3} = 0$$

en posant $\xi' = \dfrac{\lambda'}{\mu'} + 1$.

Les applications de ces équations sont peu nombreuses et présentent de grandes difficultés. On en trouvera quelques-unes dans l'Ouvrage souvent cité de Basset, dans la *Mécanique* de Kirchhoff, dans les *Leçons sur la théorie des tourbillons* de M. Poincaré, dans divers Mémoires de M. Boussinesq, enfin dans la Thèse de M. Nau sur le clapotis (Gauthier-Villars, 1896). M. Duhem a indiqué, dans les *Comptes rendus* du 12 mai 1902, une autre théorie de la viscosité.

FIN DU TOME III.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE XXVIII.

Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes.

Page

533. Objet du Chapitre 1

I. — Intégrales de volumes et de surfaces. Formule de Green. Flux. Divergence.

534. Transformation d'une intégrale de volume en une intégrale de surface. Formule de Green 1
535. Interprétation géométrique. Flux. Divergence 4
536. Cas particulier où $F\,dx + G\,dy + H\,dz$ admet un facteur intégrant ... 6
Autre forme de la formule 7
537. Remarque 8
538. Cas où $F\,dx + G\,dy + H\,dz$ est une différentielle exacte 8

II. — Intégrales de surfaces et de lignes. Théorème d'Ampère et de Stokes. Tourbillon.

539. Énoncé du théorème 9
540. Démonstration 10
541. Interprétation géométrique de la formule de Stokes 14
542. Cas particuliers 15
543. Invariants 16
544. Première application 16
545. Deuxième application 18
546. Champ résultant de plusieurs champs de vecteurs 23

CHAPITRE XXIX.

Attraction et potentiel.

I. — Attraction de points isolés.

547. Attraction newtonienne 24
Dimensions de f 24
548. Attraction de plusieurs points isolés sur un point. Potentiel 25
549. Champ de forces; lignes de forces; tubes de forces 26
550. Signification mécanique de la fonction U 27
551. Attractions électriques et magnétiques 27

Pages.

552. Exemple ... 28
553. Énergie potentielle d'un système de points soumis à des forces newtoniennes ... 30
554. Flux de force ... 31
Interprétation ... 32
555. Expression du flux de force dans le cas où le champ provient de l'attraction d'un seul point ... 33
1° Flux de force élémentaire ... 33
Premier exemple de la conservation du flux dans un tube de force ... 35
2° Flux à travers une surface d'étendue finie ... 35
3° Flux de force dû à un point à travers une surface fermée ... 36
Premier cas : Point intérieur ... 36
Deuxième cas : Point extérieur ... 37
Troisième cas : Point sur la surface ... 38
556. Théorème de Gauss ... 38
Autre forme du théorème ... 38
557. Conservation du flux dans un tube de force ... 39
558. Équation de Laplace ... 40
559. Autre démonstration du théorème de Gauss ... 41

II. — Masses continues. Généralités. Simple et double couche.

560. Potentiel d'une masse continue ... 44
561. Surfaces de niveau. Lignes et tubes de force. Flux de force ... 45
562. Équation de Laplace ... 45
563. Lignes, surfaces et volumes attirants ... 46
564. Potentiel d'une ligne ... 46
565. Potentiel d'une simple couche ... 47
566. Exemple. Potentiel d'une couche sphérique homogène infiniment mince. 48
Discontinuité de l'attraction ... 50
Énergie potentielle de la couche ... 51
567. Attraction d'une aire plane homogène ... 51
568. Attraction de deux aires planes homogènes, identiques, placées l'une en face de l'autre ... 53
569. Discontinuité de l'attraction d'une simple couche quand le point attiré traverse la couche ... 54
570. Aimant élémentaire ... 55
571. Feuillets magnétiques. Double couche uniforme ... 57
572. Double couche de densité variable ... 60
573. Actions mutuelles d'un courant et d'un aimant ... 60
574. Action d'un courant fermé sur un point magnétique. Potentiel ... 62

III. — Volumes.

575. Composantes de l'attraction. Potentiel ... 65
576. Cas où le point P est dans la masse attirante ... 66
577. Les fonctions U, X, Y, Z restent finies et bien déterminées dans la masse attirante ... 66

Pages.

578. Les relations $X = f\frac{\partial U}{\partial x}, \cdots$ subsistent dans le volume attirant..... 67

579. Dérivées secondes du potentiel..... 69
1° Point extérieur; équation de Laplace..... 69
2° Point intérieur..... 70
580. Flux de force. Théorème de Gauss..... 72
581. Équation de Poisson..... 73
582. Discontinuité des dérivées secondes de U..... 74
583. Équilibre électrique d'un corps conducteur..... 74
584. Calcul de l'attraction d'un corps sur un point très éloigné..... 76
585. Sphère pleine homogène..... 79

IV. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS VÉRIFIANT L'ÉQUATION DE LAPLACE.

586. Objet de ce paragraphe..... 81
587. Signification de ΔU..... 83
588. Absence de maximum et de minimum..... 83
589. Une fonction harmonique ne peut avoir, sur une surface, sur une ligne ou dans un volume, une valeur constante plus grande ou plus petite que toutes les valeurs voisines..... 84
590. Fonction harmonique nulle sur une surface fermée..... 85
Cas d'un volume indéfini..... 86
Conséquence..... 86
591. Une fonction harmonique uniforme finie et bien déterminée en tous les points à distance finie ou infinie est une constante..... 87
592. Détermination d'une fonction harmonique par ses valeurs sur une surface. Théorème d'existence..... 87
593. Principe de Dirichlet..... 88
594. Cas où $\frac{dU}{dn}$ est nul sur une surface fermée..... 89
595. Détermination d'une fonction harmonique U dans un volume quand on connaît U et $\frac{dU}{dn}$ sur la surface..... 90
Cas d'un volume indéfini..... 93
596. *Première application :* Valeur moyenne d'une fonction harmonique sur une sphère..... 94
597. *Deuxième application :* Couche de niveau..... 95
598. Fonction de Green..... 97
599. Fonction de Green dans le cas de la sphère..... 98
600. Application..... 99
601. Propriétés caractéristiques du potentiel d'un système de masses continues..... 100
602. Application au calcul du potentiel d'un ellipsoïde homogène..... 101
603. Ellipsoïde de révolution aplati..... 104

V. — MASSES ATTIRANTES ILLIMITÉES. POTENTIEL LOGARITHMIQUE.

604. Attraction d'une droite homogène indéfinie sur un point..... 105
605. Attraction d'un cylindre indéfini à base finie. Potentiel logarithmique.. 107
606. Attraction d'un plan indéfini. Indétermination du problème..... 109

pages.
607. Indications historiques et bibliographiques 110
Exercices sur le Chapitre XXIX 111

CHAPITRE XXX.

Équilibre ou mouvement intérieur d'une masse continue.

608. Objet du Chapitre et exposé de la méthode 116
609. Discussion des hypothèses précédentes 118
610. Équations d'équilibre 119
611. Équations du mouvement 120
612. Équations de l'équilibre ou du mouvement intérieur 121
613. Effort s'exerçant sur un élément $d\sigma$ 122
614. Expressions des composantes de l'effort en fonction de α, β, γ 123
615. Équations générales 126
616. Résumé 129
617. Quadrique directrice 129
Plans principaux, efforts principaux en un point 132
618. Ellipsoïde des efforts 133
619. Réciprocité des composantes normales 134
620. Autre quadrique pouvant jouer le rôle de directrice 135
621. Changement de coordonnées 135
Exercices sur le Chapitre XXX 135

CHAPITRE XXXI.

Hydrostatique.

I. — Conditions générales d'équilibre des fluides.

622. Fluides 138
Viscosité 139
623. Conditions d'équilibre d'un fluide. Pression en un point 140
624. Équations d'équilibre d'un fluide 141
Équation unique d'équilibre. Interprétation géométrique 141
625. Application du principe du travail virtuel 142
626. Lois de forces capables de tenir un fluide en équilibre 143
627. Équation caractéristique d'un fluide 144
628. Surfaces de niveau 144
629. Application aux fluides pesants 145
630. Formule barométrique 147
631. Cas où les forces dérivent d'une fonction de forces 150
632. Application. Équilibre relatif d'un liquide pesant animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical fixe 151
633. Fluides superposés 153
Cas particuliers 154
634. Principe d'Archimède 154
635. Ensemble des pressions d'un fluide sur les parois d'un vase fermé qui le contient 156

II. — Équilibre isotherme.

Pages.

636. Équilibre isotherme 157
637. Dans l'équilibre isotherme, les forces dérivent nécessairement d'une fonction de forces uniforme 157
Liquide incompressible. Principe de Pascal 158
Gaz parfait à température constante 159
Transmission des pressions dans un fluide en équilibre isotherme.. 159
638. Cas où les forces dérivent d'une fonction de forces non uniforme..... 160
639. Surface libre des mers dans l'hypothèse d'un noyau terrestre sphérique. 162
640. Figures ellipsoïdales d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène animée d'une rotation uniforme 164
Premier cas. Ellipsoïde de révolution aplati 164
Deuxième cas. Ellipsoïde à trois axes inégaux 168
Troisième cas. Cylindre elliptique indéfini 171
Résumé des trois cas 173
641. Théorème de M. Poincaré 173
642. Indications historiques et bibliographiques; recherches de M. Poincaré. 175.

III. — Étude particulière de l'équilibre isotherme des fluides pesants.

643. Gaz en équilibre isotherme 176
Pressions du gaz sur une surface fermée 177
Pressions sur une paroi plane 177
Pressions sur une paroi courbe 177
Projections 177
Moments 178
644. Liquide pesant en équilibre isotherme. Plan de charge. Pressions sur une paroi plane 179
645. Pressions sur une paroi courbe 184
Somme des projections des pressions sur un axe vertical 184
Somme des projections des pressions sur un axe horizontal 185
Somme des moments des pressions par rapport à un axe vertical 185
646. Remarque sur la pression atmosphérique 186
647. Exercice. Toile rectangulaire soumise à la pression d'un liquide pesant. 186

IV. — Équilibre des corps flottants.

648. Indications historiques et bibliographiques 188
649. Conditions nécessaires de l'équilibre d'un corps flottant 190
650. *Définitions.* Flotteurs 190
Axes d'orientation 190
Flottaison 191
Carène 191
Centre de carène 191
Surface des flottaisons isocarènes ou surface (F) 191
Surface des centres de carène ou surface (C) 192
651. Théorèmes de Dupin 192
Premier théorème : Le point de contact de chaque plan de flottaison avec la surface enveloppe (F) est au centre de la flottaison correspondante 192

Pages.

652. *Deuxième théorème :* Le plan tangent en un point C de la surface des centres de carène est parallèle au plan de flottaison correspondant.. 194
653. Définition des métacentres..... 195
654. *Troisième théorème :* Le métacentre est toujours compris entre les centres de courbure principaux de la surface (C) au point C..... 196
655. *Quatrième théorème :* Soit I le moment d'inertie de la flottaison par rapport à un axe d'inclinaison OX, le métacentre correspondant μ est à une distance de C, $C\mu = \frac{I}{V}$..... 198
656. Positions d'équilibre du flotteur..... 202
657. Premier aperçu sur la stabilité..... 202
658. Stabilité de l'équilibre. Méthode..... 203
659. Équilibre d'un solide pesant sur un plan horizontal..... 204
La recherche des positions d'équilibre peut se ramener à la recherche de la plus courte distance du point G à la surface (C)..... 207
Représentation des diverses positions d'équilibre..... 208
Oscillations du corps ébranlé, puis abandonné à lui-même..... 209
Mesure de la stabilité d'une position d'équilibre..... 210
660. Corps flottants..... 211
Oscillations du flotteur ébranlé, puis abandonné à lui-même..... 217
661. Exemples..... 218
1° Flotteur sphérique..... 218
2° Ellipsoïde..... 218
3° Flotteur avec un plan de symétrie..... 218
4° Cylindre de révolution homogène..... 219
Exercices sur le Chapitre XXXI..... 221

CHAPITRE XXXII.

Déformation d'un milieu continu; propriétés géométriques.

I. — Généralités.

662. Formules de transformation..... 227
663. Lignes et surfaces transformées..... 229
664. Équation de continuité..... 230
665. Dilatation cubique en un point..... 233
666. Déformation; déplacement..... 234
667. Les six fonctions associées à une déformation..... 234
Premier théorème..... 236
Indications sur la démonstration analytique..... 237
Second théorème..... 238
668. Dilatations linéaires autour d'un point du milieu primitif; ellipsoïde des dilatations en ce point..... 238
Signification géométrique particulière des coefficients ε_1, ε_2, ε_3; dilatations des éléments primitivement parallèles aux axes de coordonnées..... 241
669. Dilatations angulaires autour d'un point..... 241
Signification particulière des coefficients γ_1, γ_2, γ_3; dilatations des faces du trièdre primitivement parallèle aux axes..... 243

Pages.
670. Dilatations principales 244
671. Invariants 244
672. Déformation inverse 245
673. Équations aux dérivées partielles pour les ε_i et les γ_i 246

II. — Déformation homogène.

674. Définition d'une déformation homogène 246
675. Formules 248
676. Simplification des formules à l'aide d'une translation 249
677. Déformation pure; directions principales; coefficients de dilatation principaux 251
678. Détermination des axes et des coefficients d'une déformation pure 252
Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une déformation homogène soit une déformation pure 252
679. Théorème. Toute déformation homogène peut être obtenue par une translation et une rotation suivies d'une déformation pure 255
Remarque I 256
Remarque II 256

III. — Retour a une déformation quelconque; déformation homogène tangente en un point.

680. Déformation quelconque; déformation homogène tangente en un point. 256
681. Définition analytique de la déformation homogène tangente en un point. 257
682. Conditions pour que les déformations homogènes tangentes en chaque point à une déformation donnée soient toutes des déformations pures. 259

IV. — Déformation infiniment petite.

683. Définition 259
Exemples 259
684. Expressions des six fonctions caractéristiques 260
Dilatations linéaires en un point parallèlement aux axes de coordonnées 260
Dilatations angulaires, en un point, des angles ayant leurs côtés parallèles aux axes. Glissements 260
685. Rotation en chaque point. Dilatations principales 262
686. Cas où la rotation est nulle en chaque point : déformation longitudinale 264
687. Cas où la dilatation cubique est nulle en chaque point : déformation transversale 265
688. Cas où la déformation est nulle en chaque point 265
689. Déformations à la fois longitudinales et transversales 266
Exercices sur le Chapitre XXXII 267

CHAPITRE XXXIII.

Cinématique des milieux continus.

690. Objet du Chapitre 271

I. — Variables de Lagrange.

Pages.

691. Définition ... 272
692. Vitesse d'un élément ... 273
693. Accélération d'un élément ... 274
694. Équation de continuité ... 274

II. — Variables d'Euler.

695. Définitions ... 274
696. Projections de l'accélération d'un élément ... 275
697. Autre méthode; dérivée par rapport au temps prise en suivant un élément dans son mouvement ... 276
698. Résumé des notations pour les dérivées ... 277
699. Équation de continuité ... 278
700. Flux de matière à travers une portion de surface ... 279
Application ... 280
701. Comparaison des deux équations de continuité ... 282
702. Passage d'un des systèmes de variables à l'autre ... 282
Trajectoires ... 283
703. Lignes de courant ou de flux à un instant ... 284
704. Mouvement permanent au point de vue cinématique ... 285
705. Rotation moyenne ou tourbillon en un point à un instant ... 286
706. Définition mécanique du tourbillon en un point à un instant ... 289
707. Lignes de tourbillon ... 291
708. Potentiel des vitesses; mouvement irrotationnel ou non tourbillonnaire ... 292
709. Flux à travers une surface dans le cas d'un potentiel de vitesses ... 293
Équation de continuité ... 294
710. Flux et circulation le long d'une courbe à l'instant t ... 294
711. Un liquide incompressible ne peut pas prendre un mouvement irrotationnel dans un vase fixe et complètement clos ... 295

III. — Sur la propagation des ondes; discontinuités dans le mouvement des fluides.

712. Indications bibliographiques ... 296
713. Discontinuités des divers ordres ... 298
714. Vitesse de propagation de l'onde ... 299
715. Conditions de compatibilité ... 301
716. Discontinuité du premier ordre ... 301
717. Variation de densité dans une discontinuité du premier ordre ... 305
718. Discontinuité du deuxième ordre ... 307
719. Variation des dérivées de la densité dans une discontinuité du deuxième ordre ... 312
720. Variation de la rotation moléculaire instantanée (tourbillon) dans une discontinuité du deuxième ordre ... 314
Exercices sur le Chapitre XXXIII ... 315

CHAPITRE XXXIV.

Dynamique des fluides parfaits; théorèmes généraux.

Pages.
721. Objet du Chapitre 319

I. — Fluides parfaits; équations.

722. Définition; pression en un point.. 319
723. Équations du mouvement d'un fluide parfait..... 320
724. Équation caractéristique 321
725. Discontinuités dans le mouvement des fluides..... 322

II. — Équations du mouvement avec les variables de Lagrange.

726. Équations du mouvement..... 322
727. Conditions initiales et conditions aux limites. Discontinuités..... 324
728. Cas où la densité est fonction de la pression..... 326
729. Cas où, la densité étant fonction de la pression, il existe en même temps une fonction de forces..... 327
730. Cas où il existe un potentiel des vitesses pour une partie de la masse fluide; théorème de Lagrange; démonstration de Cauchy..... 328
731. Interprétation des équations de Cauchy; généralisation du théorème de Lagrange. Équations de Weber..... 334
732. Propagation d'une discontinuité du second ordre dans un gaz. Vitesse du son. Théorème de Hugoniot..... 337
733. Équations du mouvement dans un système quelconque de coordonnées. 340
Équation de continuité analogue à celle de Lagrange..... 343

III. — Variables d'Euler.

734. Équations du mouvement..... 344
735. *Exercice.* Mouvement d'un liquide pesant s'écoulant par le fond d'un vase de révolution d'axe vertical : hypothèse du mouvement par tranches parallèles..... 345
736. Autre forme des équations du mouvement... 347
737. Cas où, ρ étant fonction de p, les forces dérivent d'un potentiel..... 348
Équations de Helmholtz..... 349
Démonstration du théorème de Lagrange déduite des équations de Helmholtz..... 350
738. Cas où, ρ étant fonction de p, les forces et les vitesses dérivent d'un potentiel..... 351
Liquide incompressible..... 353
739. Exercice..... 354
740. Équations analogues à celles d'Euler dans un système quelconque de coordonnées 357

IV. — Mouvement permanent en général.

Pages.
741. Mouvement permanent; filets fluides 360
742. Mouvement permanent dans le cas où les forces dérivent d'une fonction de forces et où ρ est fonction de p 361
Théorème de Bernoulli 361
743. Application à un liquide. Démonstration directe 364
744. Théorème de Torricelli 367
745. Écoulement d'un gaz 369
Formule de Zeuner 370
Formule de Navier 370
746. Variation de la section droite d'un filet gazeux : maximum de contraction, vitesse correspondante 371

V. — Mouvement permanent irrotationnel.

747. Mouvement permanent dans le cas où $\rho = f(p)$ et où il existe un potentiel des forces et des vitesses 372
748. Cas d'un liquide incompressible; analogie avec l'attraction newtonienne 374
749. Sources; doublets 375
1° Une source 375
2° Plusieurs sources 377
3° Doublets 377
750. Quelques problèmes sur les sources 377
751. Principe des images 379
Premier exemple : Image d'une source par rapport à un plan 379
Deuxième exemple : Écoulement permanent irrotationnel d'un liquide par le fond d'un vase indéfini limité par deux plans parallèles 381
Exercices sur le Chapitre XXXIV 383

CHAPITRE XXXV.

Théorie des tourbillons.

752. Indications historiques et bibliographiques 386

I. — Propriétés générales.

753. Hypothèses 387
754. Lignes et surfaces fluides 387
755. Constance de la circulation 388
Autre démonstration 389
756. Expression de la circulation à l'aide du théorème de Stokes. Flux de tourbillon ou intensité tourbillonnaire 390
Cas d'une surface fermée 391
757. Lignes et surfaces de tourbillon; intersection de deux surfaces de tourbillon 391

Pages.

758. Théorème de Helmholtz.... 393
759. Tubes de tourbillon : moment ou intensité d'un tube..... 393
760. Tube de tourbillon infiniment délié (Wirbelfaden; filet de tourbillon). 396
Rapprochement avec les équations de Helmholtz..... 397
761. Démonstration de Kirchhoff; équations de Cauchy..... 398
762. Mouvement permanent..... 400
Équation des surfaces Σ..... 402

II. — PARTIE DU FLUIDE ANIMÉE D'UN MOUVEMENT IRROTATIONNEL. CONNEXION.

763. Circulation dans la partie irrotationnelle..... 403
Théorème fondamental..... 404
1° La partie sans rotation occupe un volume simplement connexe. 405
2° La partie sans rotation occupe un volume doublement connexe. 405
3° Volume triplement connexe..... 407
4° Connexion d'ordre *n*..... 409
764. Extension à un champ quelconque de vecteurs dérivant d'une fonction. 409

III. — DÉTERMINATION DES VITESSES EN FONCTION DES TOURBILLONS DANS UN LIQUIDE INDÉFINI; MOUVEMENT DES TOURBILLONS.

765. Énoncé du problème général..... 409
766. Cas d'un liquide..... 410
Remarque sur le cas où le vase ne serait pas simplement connexe.. 412
767. Cas d'un liquide indéfini..... 413
768. Interprétation cinématique des formules..... 418
Part contributive d'un anneau infiniment délié..... 419
Analogie électrodynamique..... 420
769. Potentiel des vitesses provenant de l'action d'un tube de tourbillon infiniment délié..... 421
770. Anneau de tourbillon infiniment délié et feuillet de doublets..... 423
771. Potentiel des vitesses dans la partie irrotationnelle d'un liquide indéfini avec un nombre quelconque d'anneaux de tourbillon..... 423
772. Vitesse de déplacement de la surface d'un tube de tourbillon..... 424
773. Expression de la force vive du liquide..... 426
774. Application : anneaux de tourbillon circulaires de même axe..... 427
Vitesse..... 428
Tourbillon..... 428
Détermination des vitesses..... 429
Équation différentielle que vérifie la fonction S; current function *de Stokes*..... 433
Cas d'un seul anneau infiniment délié..... 434
Deux anneaux circulaires de même axe..... 440

IV. — DÉTERMINATION DES VITESSES EN FONCTION DES TOURBILLONS DANS LE CAS GÉNÉRAL.

775. Liquide contenu dans un vase..... 442
776. Fluide compressible..... 445
Fluide compressible indéfini..... 446

Pages.
Analogie électromagnétique..... 448
Espace limité..... 448
777. Production expérimentale des tourbillons..... 448

V. — NOTATIONS DE CLEBSCH.

778. Propriété analytique des surfaces de tourbillon..... 449
779. Notations de Clebsch..... 450
Exercices sur le Chapitre XXXV..... 452

CHAPITRE XXXVI.

Mouvements parallèles à un plan fixe.

780. Objet du Chapitre..... 455
781. Cas d'un liquide; fonction de courant..... 456
782. Conditions aux parois..... 457

I. — MOUVEMENT IRROTATIONNEL D'UN LIQUIDE.

783. Équations générales; fonctions conjuguées..... 458
Fonction de courant..... 459
Introduction des fonctions d'une variable complexe..... 459
784. Mouvement ondulatoire d'un liquide pesant..... 460
785. Cinématique du mouvement, par ondes parallèles, de la surface d'un liquide pesant..... 460
Onde progressive simple..... 460
Ondes progressives simples superposées..... 462
Ondes stationnaires. Clapotis..... 462
786. Dynamique du mouvement irrotationnel par ondes parallèles à la surface d'un liquide pesant..... 463
787. Équations approchées..... 466
Oscillations des molécules..... 469
Fonction de courant..... 470
788. Cas général..... 470
Clapotis..... 470
789. Onde solitaire. Indications..... 471
790. Jets liquides irrotationnels parallèles à un plan. Indications..... 471

II. — MOUVEMENTS TOURBILLONNAIRES D'UN LIQUIDE.

791. Propriétés et équations générales..... 472
792. Tubes infiniment déliés dans un liquide indéfini dans le sens xOy..... 474
Un seul tube infiniment délié..... 475
Plusieurs tubes infiniment déliés..... 477
Mouvement des tubes de tourbillon infiniment déliés..... 479
Réduction des équations du mouvement à la forme canonique..... 480

Pages.
Propriétés de la fonction H..... 481
Cas particulier de deux tubes infiniment déliés..... 485
Atmosphère d'un tube de tourbillon..... 487
793. Tubes de dimensions finies..... 488
794. Cas d'un liquide limité par des cloisons perpendiculaires au plan des *xy*..... 491
Exemple..... 491
795. Exemple de mouvement ondulatoire rotationnel d'amplitude finie; ondes trochoïdales de Gerstner; houle..... 491
Exercices sur le Chapitre XXXVI..... 498

CHAPITRE XXXVII.

Notions sur la théorie de l'élasticité.

796. Généralités et indications bibliographiques..... 500

I. — Équations de l'équilibre et du mouvement des milieux élastiques isotropes et homogènes pour des déformations infiniment petites.

797. Étude des efforts intérieurs..... 502
798. Expressions des N et des T en fonction des éléments de la déformation. 505
799. Cas d'un système homogène et isotrope..... 507
800. Constantes caractéristiques d'un milieu élastique homogène et isotrope. 511
801. Équations de l'équilibre et du mouvement intérieurs..... 512
Conditions initiales..... 512
Conditions aux limites..... 512

II. — Équilibre élastique.

802. Équations de l'équilibre élastique..... 513
Conditions aux limites..... 514
803. Superposition des déformations..... 516
804. Cas où il existe un système de déplacements dérivant d'une fonction.. 516
Conditions aux limites..... 518
Remarque..... 518
805. Équilibre élastique en l'absence de forces extérieures appliquées aux éléments de volume..... 518
806. Exemple I : *Compression normale et uniforme d'un milieu isotrope.* 519
Coefficient de compressibilité..... 521
807. Exemple II : *Extension longitudinale d'un cylindre droit à base quelconque par des tractions uniformes exercées sur les bases*.... 521
Coefficient d'élasticité..... 523
Rapport de la contraction transversale à la dilatation longitudinale..... 524
808. Exemple III : *Équilibre d'une couche cylindrique*..... 524
809. Indications sommaires sur quelques travaux..... 528

III. — Mouvements intérieurs.

Pages.
810. Mouvements par ondes planes 533
Exercices sur le Chapitre XXXVII 538

CHAPITRE XXXVIII.

Équations du mouvement d'un fluide visqueux.

811. Efforts intérieurs dans un fluide visqueux 540
812. Détermination des efforts en fonction des dérivées des composantes de la vitesse 541
813. Équations du mouvement 543
Cas d'un liquide visqueux 543
Cas d'un gaz 543

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.

26522 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

APPELL (P.), Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique à l'usage des candidats à l'Ecole Centrale.** In-8, avec 143 figures; 1902. 7 fr. 50 c.

BRESSE, Membre de l'Institut, Professeur de Mécanique à l'École des Ponts et Chaussées. — **Cours de Mécanique appliquée professé à l'École des Ponts et Chaussées.** 2 vol. in-8, avec figures..... 23 fr.

On vend séparément :

Ire PARTIE *Résistance des Matériaux et Stabilité des Constructions.* — 3e éd., revue et beaucoup augmentée. In-8, avec fig.; 1880. 13 fr.

IIe PARTIE : *Hydraulique.* — 3e édition. In-8, avec figures et une planche; 1879..... 10 fr.

DA CUNHA (A.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **L'année technique (1901-1902).** *Tramways. Cycles. Travaux publics. Constructions maritimes et navales. Armements. Navigation aérienne;* avec *Préface* de M. EMILE TRÉLAT, Directeur de l'École spéciale d'Architecture. Grand in-8 de VIII-271 pages avec 114 figures; 1902..... 3 fr. 50 c.

LAURENT (H.). — **Traité de Mécanique rationnelle**, à l'usage des Candidats à l'Agrégation et à la Licence. 3e édition. 2 vol. in-8 avec figures; 1889..... 12 fr.

LORENZ (H.), Ingénieur, Professeur à l'Université de Halle. — **Machines frigorifiques.** *Production et applications du froid artificiel.* Traduit de l'allemand avec l'autorisation de l'Auteur par P. PETIT, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy, Directeur de l'École de Brasserie, et J. JAQUET, Ingénieur civil. Grand in-8 de IX-186 pages, avec 131 figures; 1898..... 7 fr.

TOLDT (**Friedrich**), Ingénieur, professeur à l'Académie impériale des Mines de Léoben. — **Traité des Fours à gaz à chaleur régénérée. Détermination de leurs dimensions.** Traduit de l'allemand sur la 2e édition revue et développée par l'Auteur; par M. F. DOMMER, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à l'École de Physique et de Chimie industrielles de la Ville de Paris. Grand in-8, de 392 pages, avec 68 figures; 1900..... 11 fr.

TANNERY (**Jules**), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. **Deux leçons de Cinématique.** In-4; 1886..... 2 fr. 50 c.

VIEILLE (J.) Recteur de l'Académie de Dijon. — **Éléments de Mécanique**, rédigés conformément au Programme du nouveau plan d'études des Lycées. 4e édition. In-8, avec 146 figures; 1882..... 4 fr. 50 c.

VILLIÉ (E.). — **Traité de Cinématique**, à l'usage des Candidats à la Licence et à l'Agrégation. In-8, avec figures; 1888..... 7 fr. 50 c.

26522 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

~~DUE JUN 20 1932~~

DUE JAN 1 ' 31

FEB 20 '31

~~AUG 31 1933~~

~~MAY 1934~~

DUE ~~SEP 3 '3~~